
EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Fresán

Valores zeta múltiples*

por

Clément Dupont

1. INTRODUCCIÓN

Los *valores zeta múltiples* son las sumas de las series múltiples

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}} \quad (1.1)$$

donde los n_i son enteros mayores o iguales que 1 y $n_r \geq 2$ (esta última condición garantiza la convergencia). En el caso $r = 1$, se trata de los *valores zeta simples*

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

que son los valores en los números enteros de la función zeta de Riemann. Estos números fueron estudiados, en particular por Euler, mucho antes de que Riemann se interesara por $\zeta(s)$ como función de una variable s *compleja*, en relación con la distribución de los números primos. Los valores zeta simples y, más generalmente, los valores zeta múltiples, desempeñan el papel de *constantes fundamentales*. Aparecen en muchas áreas de las matemáticas y la física, en particular, a través de las integrales de Feynman que rigen las interacciones entre partículas elementales.

Por lo tanto, es de interés práctico *organizar* la familia de los valores zeta múltiples y comprender las relaciones entre ellos y con otras constantes. Empezaremos abordando este problema, que vivió un renacimiento hace apenas 30 años, mediante la experimentación, a partir del estudio de Euler sobre los valores zeta simples.

*Traducción de Javier Fresán del artículo “Valeurs zêta multiples” publicado en el volumen colectivo *Périodes et transcendance, Journées mathématiques X-UPS 2019*, Éditions de l’École polytechnique, Palaiseau, 2024, 155–195.

De manera sorprendente, las respuestas poseen una increíble estructura y pueden explicarse por medio de la geometría algebraica. Los valores zeta múltiples resultan ser encarnaciones tangibles de fenómenos profundos ligados a la *teoría de motivos*, una teoría de obstrucción universal para las variedades algebraicas ideada por Grothendieck en los años sesenta. A continuación, intentaremos introducir estas ideas modernas haciendo hincapié en sus implicaciones aritméticas.

Estos resultados apuntan a la potencia del estudio *geométrico* de ciertos números trascendentes: los *periodos*, que son los valores de integrales definidas por fórmulas algebraicas. Una idea central que vamos a desarrollar es que la teoría de Galois, que organiza la familia de los números algebraicos, debería poder generalizarse a todos los periodos y revelar simetrías ocultas en las constantes matemáticas. Describiremos algunos resultados recientes que muestran que estas simetrías también se revelan en las constantes físicas que aparecen en el cálculo de las integrales de Feynman.

2. VALORES ZETA SIMPLES

2.1. EL PROBLEMA DE BASILEA

En la segunda mitad del siglo XVII, se desarrollaron técnicas para calcular las sumas de series infinitas. La búsqueda de una fórmula exacta para $\zeta(2)$, es decir, la suma de los inversos de los cuadrados de los números enteros, es conocida como el *problema de Basilea*, en honor a la ciudad de los hermanos Bernoulli, que fueron quienes popularizaron el problema (ya planteado por Mengoli, originario de Bolonia, en 1644). Fue Euler, otro suizo de Basilea, quien dio la solución en 1735 [28]:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Más generalmente, Euler demostró que los valores de la función zeta en enteros pares son múltiplos racionales de potencias de π :

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|}{2(2n)!} (2\pi)^{2n}, \quad (2.1)$$

donde los B_{2n} son los números de Bernoulli, definidos por su serie generadora exponencial

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

La primera demostración de Euler consistía en identificar los coeficientes del desarrollo en producto infinito de la función seno¹:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

¹Esta fórmula se puede demostrar mediante métodos de análisis complejo [53, cap. 15, ejerc. 4] de los que Euler no disponía.

Algunos años antes, en 1731, Euler ya había logrado una hazaña matemática al calcular el valor aproximado de $\zeta(2)$ con 20 cifras significativas, lo que luego le permitió comprobar su solución al problema de Basilea². Como la serie que define $\zeta(2)$ converge muy lentamente (su resto es equivalente a $1/n$), las sumas parciales dan lugar a aproximaciones mediocres, así que Euler tuvo que inventarse lo que hoy se denomina la *fórmula de Euler-Maclaurin* para estimar la sucesión del desarrollo asintótico [27]. Obtuvo de este modo la aproximación

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \zeta(2) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + \frac{1}{30n^9},$$

cuyo error está acotado por $(10n^{11})^{-1}$. Al calcular solo $n = 100$ términos, se obtiene la aproximación deseada:

$$\zeta(2) \simeq 1,6449340668482264364724076,$$

que es válida con una precisión de 10^{-23} :

$$\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,6449340668482264364724152.$$

Indiquemos para concluir que la fórmula (2.1) implica que los valores de la función zeta en enteros pares son números trascendentes, es decir, no son raíces de ningún polinomio no nulo con coeficientes racionales. En efecto, la fórmula permite deducirlo de la trascendencia de π , que fue demostrada por Lindemann en 1882 [48].

2.2. VALORES ZETA IMPARES

La búsqueda de fórmulas exactas para los valores $\zeta(2n+1)$ de la función zeta en enteros impares fue menos fructífera. Hoy en día, lo más común es admitir que, a diferencia de los valores zeta pares, los números $\zeta(2n+1)$ *probablemente* no se expresan de manera algebraica en función de π y *probablemente* ni siquiera cumplen relaciones algebraicas entre sí: forman una nueva familia de constantes matemáticas. De manera más explícita, tenemos la siguiente conjetura:

CONJETURA 2.1. *Los números π y $\zeta(2n+1)$, para $n \geq 1$, son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.*

Esta conjetura implica, en particular, que los valores zeta impares son números trascendentes. No se hizo ningún progreso en la dirección de esta conjetura antes de Apéry, que demostró la irracionalidad de $\zeta(3)$ en 1979 (véase también la bonita demostración alternativa de Beukers del teorema de Apéry [9]):

TEOREMA 2.2 (Apéry [4]). $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

En 2001, Ball y Rivoal demostraron que hay infinitos valores zeta impares irracionales. Más precisamente:

²Stirling había obtenido la misma aproximación por otros métodos en 1730 [55, p. 55].

TEOREMA 2.3 (Ball-Rivoal [51, 7]). *Para $n \geq 1$, los números $1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(2n+1)$ generan un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}$ -dimensión al menos $\frac{1}{3} \log(2n+1)$. En particular, existen infinitos valores zeta impares irracionales.*

Como $\frac{1}{3} \log(2n+1) \geq 3$ para $2n+1 \geq 8105$, existe un valor de zeta impar linealmente independiente de 1 y $\zeta(3)$ sobre $\mathbb{Q}$, y por lo tanto irracional, entre $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(8105)$. Las cotas más precisas de Ball-Rivoal permiten pararse en $\zeta(169)$. El récord de este tipo de resultados lo tiene Zudilin:

TEOREMA 2.4 (Zudilin [60]). *Existe al menos un número irracional entre $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ y $\zeta(11)$.*

Remitimos al artículo de Rivoal [52] para una discusión de las técnicas empleadas en las demostraciones de este tipo de enunciados, y a la presentación en el seminario Bourbaki de Fischler [29] para más detalles. La irracionalidad de $\zeta(5)$ o de $\zeta(3)/\pi^3$, o la trascendencia de $\zeta(3)$, son problemas abiertos. Es la experimentación lo que da peso a la conjetura 2.1. Una relación algebraica entre números reales es una relación lineal entre monomios formados por estos números, por lo que la conjetura consiste en demostrar que no existe ninguna relación lineal con coeficientes enteros entre estos monomios. Los algoritmos de detección de relaciones enteras como PSLQ [6] permiten encontrar combinaciones lineales «pequeñas» entre ciertos números reales calculados con suficiente precisión. Se pueden utilizar de dos maneras:

1. para descubrir relaciones entre estos números, que luego se pueden intentar demostrar matemáticamente (por ejemplo, encontrar el polinomio mínimo de un número algebraico calculado con suficiente precisión);
2. para convencerse de que no existen relaciones acotando inferiormente el tamaño (grado y valor absoluto de los coeficientes) de las potenciales relaciones entre estos números.

El test de trascendencia de $\zeta(3)$ en [5] es una aplicación de esta última estrategia. Veremos más adelante que la conjetura 2.1 es consecuencia de otra muy general, la *conjetura de periodos* de Grothendieck, lo que constituye otra fuente de certeza, esta vez más teórica.

3. EL ÁLGEBRA DE LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES

3.1. DE LOS VALORES ZETA SIMPLES A LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES

La conjetura 2.1 aborda las relaciones *algebraicas* entre valores zeta simples y, por lo tanto, requiere considerar productos de tales números. Estos productos pueden expresarse como combinaciones lineales de valores zeta múltiples, por ejemplo:

$$\zeta(m)\zeta(n) = \zeta(m, n) + \zeta(n, m) + \zeta(m+n). \quad (3.1)$$

Esta igualdad se demuestra fácilmente descomponiendo el dominio de la suma:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} \right) = \left(\sum_{1 \leq k < l} + \sum_{1 \leq l < k} + \sum_{1 \leq k=l} \right) \frac{1}{k^m l^n}. \quad (3.2)$$

Este cálculo muestra que el estudio de las relaciones *algebraicas* entre los valores zeta simples se reduce al estudio de las relaciones *lineales* entre los valores zeta múltiples. Otra observación importante es que el lado derecho de (3.1) involucra tres valores zeta múltiples cuyos índices suman $m + n$. Esto justifica la definición siguiente:

DEFINICIÓN 3.1. El *peso* de un valor zeta múltiple (1.1) es la suma de los índices $n_1 + \cdots + n_r$.

El cálculo (3.1) admite la generalización siguiente, que se recomienda que el lector demuestre para anticipar la sección 4:

PROPOSICIÓN 3.2. *El producto de dos valores zeta múltiples de pesos m y n puede escribirse como una combinación $\mathbb{Z}$ -lineal de valores zeta múltiples de peso $m + n$.*

Los 2^{n-2} valores zeta múltiples de peso n no son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, como demuestra la igualdad

$$\zeta(1, 2) = \zeta(3)$$

entre los dos valores zeta múltiples de peso 3, ya conocida por Euler. De forma similar, los cuatro valores zeta múltiples de peso 4 son colineales sobre $\mathbb{Q}$:

$$\zeta(1, 1, 2) = \zeta(4), \quad \zeta(1, 3) = \frac{1}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2, 2) = \frac{3}{4}\zeta(4).$$

Veremos en la sección 4 una manera sistemática de producir relaciones lineales entre valores zeta múltiples. Por ahora, contentémonos con estimar el *número de relaciones* entre valores zeta múltiples de peso fijo. Para ello, introducimos el subespacio vectorial $\mathcal{Z}_n \subset \mathbb{R}$ generado por los valores zeta múltiples de peso n . Es conveniente definir $\zeta(\cdot) = 1$ en el caso $r = n = 0$, de modo que $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$. Sea $\mathcal{Z}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ generado por *todos* los valores zeta múltiples; es la suma de los $\mathcal{Z}_n$ para $n \geq 0$. La proposición 3.2 implica que $\mathcal{Z}$ es una sub- $\mathbb{Q}$ -álgebra de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 3.3. Llamamos a $\mathcal{Z}$ el *álgebra de los valores zeta múltiples*.

Es la estructura de esta álgebra lo que se desea estudiar para *organizar* las constantes matemáticas fundamentales que son los valores zeta múltiples.

3.2. DIMENSIONES DE LOS ESPACIOS DE VALORES ZETA MÚLTIPLES

Calculando aproximaciones suficientemente precisas de todos los valores zeta múltiples de peso ≤ 12 y basándose en un algoritmo de detección de relaciones enteras, Zagier llegó a la siguiente conjetura:

CONJETURA 3.4 (Zagier [59]).

1. *Existe una descomposición en suma directa:*

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{Z}_n.$$

Es decir, el álgebra $\mathcal{Z}$ está graduada por el peso: no existen relaciones $\mathbb{Q}$ -lineales no triviales entre valores zeta múltiples de distintos pesos.

2. Para todo entero n se cumple:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) = d_n,$$

donde (d_n) es la sucesión definida recursivamente como

$$\begin{cases} d_0 = 1, & d_1 = 0, & d_2 = 1; \\ d_n = d_{n-2} + d_{n-3} & (n \geq 3). \end{cases}$$

La sucesión (d_n) es una variante «cúbica» de la sucesión de Fibonacci cuyo comportamiento asintótico está dado por $d_n \sim C\alpha^n$, donde C es una constante y $\alpha \simeq 1,3247$ es la raíz real del polinomio característico $X^3 - X - 1$. Por lo tanto, es significativamente más pequeña que el número 2^{n-2} de valores zeta múltiples de peso n , lo que sugiere un gran número de relaciones lineales entre valores zeta múltiples de un peso dado:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d_n	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16
2^{n-2}	—	—	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

La igualdad $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) = d_n$ solo se conoce para $n \leq 4$. Para $n = 5$, se puede demostrar (por ejemplo, utilizando las relaciones de doble shuffle presentadas en la sección 4) que los 8 valores zeta múltiples de peso 5 son todos combinaciones $\mathbb{Q}$ -lineales de $\zeta(2, 3)$ y $\zeta(3, 2)$. Sin embargo, no se sabe si el cociente de estos dos números es irracional.

Otra lección de estos cálculos experimentales es que, conjeturalmente, el álgebra de los valores zeta múltiples contiene mucho más que los polinomios en los valores zeta simples $\zeta(n)$, los cuales solo contribuyen con un factor subexponencial al recuento de dimensiones. La primera aparición de un valor zeta múltiple que no se expresa conjeturalmente en función de valores zeta simples ocurre en peso 8: la experimentación sugiere, por ejemplo, que $\zeta(3, 5)$ y $\zeta(5, 3)$ no son combinaciones $\mathbb{Q}$ -lineales de $\zeta(2)^3$, $\zeta(3)^2$ y $\zeta(3)\zeta(5)$, aunque su suma sí lo sea en virtud de (3.1).

La cota superior en la conjetura 3.4 ha sido demostrada independientemente por Goncharov y Terasoma:

TEOREMA 3.5 (Goncharov [34], Terasoma [56]). *Para todo entero n , se cumple:*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n.$$

Sorprendentemente, la prueba de este resultado no consiste en producir suficientes relaciones $\mathbb{Q}$ -lineales entre valores zeta múltiples, ¡y ni siquiera considera la existencia de familias particulares de tales relaciones! En su lugar, se basa en ideas provenientes de la geometría algebraica, que introduciremos en la sección 3.4.

La siguiente conjetura, debida a Hoffman, propone una base conjetural para el espacio de valores zeta múltiples.

CONJETURA 3.6 (Hoffman [43]). *Los valores zeta múltiples $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ tales que $n_i \in \{2, 3\}$ forman una base del $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial $\mathcal{Z}$.*

Esta conjetura implica la fórmula de la dimensión de Zagier (conjetura 3.4) ya que d_n es el número de palabras $(n_1, \dots, n_r)$ de longitud arbitraria formadas por 2 y 3 que satisfacen $n_1 + \dots + n_r = n$. Brown ha demostrado que los «valores zeta múltiples de Hoffman» (aquellos cuyos argumentos son 2 y 3) generan el espacio de valores zeta múltiples:

TEOREMA 3.7 (Brown [14]). *Los valores zeta múltiples $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ con $n_i \in \{2, 3\}$ generan el espacio vectorial $\mathcal{Z}$ sobre $\mathbb{Q}$.*

Al igual que la del teorema 3.5 de Goncharov y Terasoma, la demostración de este resultado reposa sobre técnicas sofisticadas provenientes de la geometría algebraica. Cabe señalar que el teorema de Brown no es efectivo: no da una fórmula, ni siquiera un algoritmo, para escribir un valor zeta múltiple como combinación $\mathbb{Q}$ -lineal de los valores zeta múltiples de Hoffman. Sin embargo, en la práctica, los coeficientes de estas combinaciones lineales son «pequeños» y se pueden descubrir experimentalmente. Mejor aún, la prueba del teorema de Brown permite descubrir estos coeficientes «uno a uno», por decirlo de alguna manera, es decir, identificando a cada paso *un único* número racional que se conoce con gran precisión. Por lo tanto, este teorema es efectivo «en la práctica» y proporciona una herramienta para escribir los valores zeta múltiples en la base de Hoffman, o en cualquier otra base (ver [15]).

3.3. LA ESTRUCTURA DEL ÁLGEBRA DE LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES

La estructura del álgebra $\mathcal{Z}$ es conjeturalmente muy simple. Introduzcamos símbolos formales f_n para $n \geq 3$ impar y el espacio

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}\langle f_3, f_5, f_7, f_9, \dots \rangle$$

de polinomios no conmutativos en estos símbolos, cuya base está dada por las palabras en el alfabeto $\{f_3, f_5, f_7, f_9, \dots\}$. Se define sobre $\mathcal{A}$ el *producto shuffle* $\sqcup$, que consiste, como su nombre indica, en barajar las palabras como dos mazos de cartas, manteniendo el orden de las letras dentro de cada palabra³. Por ejemplo: $f_3 \sqcup (f_5 f_7) = f_3 f_5 f_7 + f_5 f_3 f_7 + f_5 f_7 f_3$. La fórmula general es:

$$(f_{i_1} \cdots f_{i_r}) \sqcup (f_{i_{r+1}} \cdots f_{i_{r+s}}) = \sum_{\sigma \in \sqcup(r,s)} f_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots f_{i_{\sigma^{-1}(r+s)}}, \quad (3.3)$$

donde $\sqcup(r, s)$ es el conjunto de permutaciones $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ que son estrictamente crecientes en los r primeros índices y en los s últimos índices. Este producto dota a $\mathcal{A}$ de una estructura de álgebra *conmutativa* [50]. Finalmente, introducimos un nuevo símbolo formal f_2 y consideramos el álgebra

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}[f_2]$$

³En inglés, «barajar» se dice *shuffle*, de ahí la elección de la letra $\sqcup$ del alfabeto cirílico, que se pronuncia *sha*.

de polinomios en f_2 con coeficientes en el álgebra de shuffle $\mathcal{A}$. Una base de $\mathcal{F}$ está dada por los monomios $f_2^k f_{i_1} \cdots f_{i_r}$ con los $i_j \geq 3$ impares. Introducimos un *grado* sobre $\mathcal{F}$ decretando que un símbolo f_n tiene grado n para $n = 2$ o $n \geq 3$ impar. Respecto a esta noción de grado, $\mathcal{F}$ es un álgebra graduada.

CONJETURA 3.8. *El álgebra $\mathcal{Z}$ está graduada por el peso y existe un isomorfismo de álgebras graduadas:*

$$\mathcal{Z} \simeq \mathcal{F}.$$

Un isomorfismo como el de la conjetura no tiene por qué ser único, pero es natural normalizarlo de manera que $\zeta(n)$ corresponda al símbolo f_n . Notemos que esta conjetura implica la conjetura 3.4 de Zagier, ya que el número de monomios de peso n en $\mathcal{F}$ es exactamente d_n . De hecho, la serie generadora correspondiente es

$$\sum_{n \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_n) t^n = \frac{1}{1-t^2} \frac{1}{1-(t^3+t^5+t^7+t^9+\cdots)} = \frac{1}{1-t^2-t^3},$$

que coincide con la serie generadora de la sucesión (d_n) .

La conjetura 3.8 podría sugerir una base «sencilla» del álgebra de los valores zeta múltiples, que correspondería a la base de los monomios de $\mathcal{F}$ y estaría dada por los

$$\zeta(2)^k \zeta(i_1, \dots, i_r)$$

con los $i_j \geq 3$ impares. Sin embargo, estos elementos no son linealmente independientes, como lo demuestra la siguiente relación en peso 12:

$$28\zeta(3, 9) + 150\zeta(5, 7) + 168\zeta(7, 5) = \frac{5197}{691}\zeta(12) = \frac{332\,608}{875\,875}\zeta(2)^6.$$

Esta relación es la primera de una familia infinita de relaciones descubiertas por Gangl-Kaneko-Zagier [31] que están indexadas por las formas modulares cuspidales para el grupo modular $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3.4. VALORES ZETA MÚLTIPLES MOTÍVICOS Y TEORÍA DE GALOIS

Uno de los ingredientes principales de las demostraciones de los teoremas 3.5 y 3.7 es la noción de *valor zeta múltiple motivico*, que describimos a continuación para elucidar las relaciones entre las conjeturas y los resultados que hemos enunciado (para más detalles, véanse las secciones 5, 6, 7). Los valores zeta múltiples motivicos son elementos

$$\zeta^{\mathrm{mot}}(n_1, \dots, n_r) \in \mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$$

de una $\mathbb{Q}$ -álgebra $\mathcal{P}^{\mathrm{mot}}$ cuyos elementos se llaman *periodos motivicos*. Esta álgebra no está compuesta por números, pero posee un morfismo de $\mathbb{Q}$ -álgebras

$$\mathrm{per} : \mathcal{P}^{\mathrm{mot}} \rightarrow \mathbb{C},$$

llamado *morfismo de periodos*, tal que

$$\mathrm{per}(\zeta^{\mathrm{mot}}(n_1, \dots, n_r)) = \zeta(n_1, \dots, n_r).$$

Los valores zeta múltiples motivicos se ven así como un *levantamiento* de los valores zeta múltiples «ordinarios». Una conjetura central, debida a Grothendieck, afirma que estas dos versiones contienen exactamente la misma información:

CONJETURA 3.9 (Conjetura de periodos, caso particular). *El morfismo per es inyectivo.*

Esta conjetura afirma que cualquier relación algebraica entre valores zeta múltiples también se cumple para los valores zeta múltiples motivicos: por lo tanto, no debería haber ninguna diferencia entre el álgebra $\mathcal{Z}$ y la subálgebra $\mathcal{Z}^{\text{mot}} \subset \mathcal{P}^{\text{mot}}$ generada por los valores zeta múltiples motivicos. La fuerza de las ideas motivicas es que, a diferencia de $\mathcal{Z}$, se sabe mucho más sobre la estructura de $\mathcal{Z}^{\text{mot}}$:

- (a) El álgebra $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ y su subálgebra $\mathcal{Z}^{\text{mot}}$ están naturalmente graduadas y el elemento $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ vive en la parte homogénea de grado $n = n_1 + \dots + n_r$.
- (b) Existe un isomorfismo de álgebras graduadas $\mathcal{P}^{\text{mot}} \simeq \mathcal{F}$, que puede ser elegido de modo que haga corresponder $\zeta^{\text{mot}}(n)$ a f_n para $n = 2$ o $n \geq 3$ impar.

La parte (a) implica que se conoce la segunda mitad de la conjetura 3.4 de Zagier para los valores zeta múltiples *motivicos*. La parte (b) demuestra el teorema 3.5 de Goncharov y Terasoma gracias a las desigualdades:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n^{\text{mot}}) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}_n^{\text{mot}}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_n) = d_n.$$

Inspirado por la conjetura 3.6 de Hoffman, Brown demuestra:

TEOREMA 3.10 (Brown [14]). *Los valores zeta múltiples motivicos $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ con $n_i \in \{2, 3\}$ son linealmente independientes en $\mathcal{P}^{\text{mot}}$.*

Gracias a un argumento de dimensión, se deduce entonces que los valores zeta múltiples motivicos de Hoffman forman una base de $\mathcal{Z}^{\text{mot}} = \mathcal{P}^{\text{mot}}$. Aplicando el morfismo de periodos, obtenemos así el teorema 3.7. Además, el álgebra graduada $\mathcal{Z}^{\text{mot}}$ es isomorfa al álgebra abstracta $\mathcal{F}$, y se deduce que la conjetura 3.4 de Zagier, la conjetura 3.6 de Hoffman y la conjetura 3.8 sobre la estructura del álgebra $\mathcal{Z}$ son todas ciertas al nivel de los valores zeta múltiples motivicos. Por lo tanto, son lógicamente equivalentes a la conjetura 3.9 de periodos, que afirma que el morfismo de periodos induce un isomorfismo

$$\mathcal{Z}^{\text{mot}} \stackrel{?}{\simeq} \mathcal{Z}.$$

Cabe también señalar que la conjetura de periodos implica la conjetura 2.1 sobre los valores zeta impares, ya que esta es cierta para los valores zeta motivicos (de hecho, en el álgebra $\mathcal{F}$, los elementos f_2, f_3, f_5, f_7 , etc. son algebraicamente independientes).

La demostración del teorema 3.10 utiliza una estructura adicional del álgebra de los valores zeta múltiples motivicos:

- (c) Existe una acción muy rica de un grupo, el *grupo de Galois motivico*, sobre el álgebra $\mathcal{P}^{\text{mot}}$, cuyo efecto sobre los valores zeta múltiples motivicos $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ se puede calcular explícitamente.

Hay que pensar en este último ingrediente como una *teoría de Galois* de los valores zeta múltiples motivicos, que es análoga a la teoría de Galois clásica de los números algebraicos, en la que se sustituyen los grupos de Galois finitos por grupos de matrices sobre $\mathbb{Q}$. La diferencia es que el grupo de Galois motivico no actúa sobre el álgebra de los valores zeta múltiples $\mathcal{Z}$, sino sobre su variante motivica $\mathcal{Z}^{\text{mot}}$, que es la misma si uno cree en la conjetura 3.9. Se trata de una instancia de la idea general de una teoría de Galois de periodos, desarrollada por André [2, 3] a partir de la filosofía de motivos de Grothendieck.

4. RELACIONES DE DOBLE SHUFFLE

Como prometimos, vamos a describir ahora una forma sistemática y combinatoria muy rica de producir relaciones lineales (conjeturalmente *todas* las relaciones lineales) entre valores zeta múltiples.

4.1. PRODUCTO STUFFLE

Comencemos haciendo explícita la estructura combinatoria detrás del cálculo del producto (3.1) y la proposición 3.2. Consideramos sobre el espacio

$$\mathcal{Y} = \mathbb{Q}\langle y_1, y_2, y_3, \dots \rangle$$

de polinomios no conmutativos en infinitas variables formales y_i un producto $*$, llamado producto *stuffle*, que satisface $\alpha * 1 = 1 * \alpha = \alpha$ para todo monomio α , y la fórmula de recurrencia (sobre el grado de los monomios):

$$(\alpha y_m) * (\beta y_n) = ((\alpha y_m) * \beta) y_n + (\alpha * (\beta y_n)) y_m + (\alpha * \beta) y_{m+n},$$

donde α y β son monomios. Por ejemplo, se comprueba que se cumple la siguiente fórmula, que debe hacernos pensar en (3.1):

$$y_m * y_n = y_m y_n + y_n y_m + y_{m+n}.$$

El producto $*$ consiste en mezclar las palabras como en el producto shuffle de la sección anterior y luego fusionar algunos pares de letras consecutivas sumando sus índices⁴. Esto convierte a $\mathcal{Y}$ en una álgebra conmutativa sobre $\mathbb{Q}$, llamada *álgebra stuffle*, introducida por Hoffman [44].

Asociemos un monomio en $\mathcal{Y}$ a un multiíndice mediante la correspondencia:

$$\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \longleftrightarrow Y_{\underline{n}} = y_{n_1} \cdots y_{n_r}.$$

Decimos que $\underline{n}$ o $Y_{\underline{n}}$ es *convergente* si $r = 0$ o $n_r \geq 2$. Los monomios convergentes forman una base de una subálgebra $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$. Escribimos los coeficientes del producto stuffle en esta base bajo la forma:

$$Y_{\underline{m}} * Y_{\underline{n}} = \sum_{\underline{p}} v_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} Y_{\underline{p}} \quad (v_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} \in \mathbb{N}).$$

⁴ *Stuffle* es una palabra compuesta formada por *shuffle* y *stuff* (cosas).

PROPOSICIÓN 4.1. *Para $\underline{m}$ y $\underline{n}$ convergentes, se cumple la fórmula del producto stuffle de valores zeta múltiples:*

$$\zeta(\underline{m})\zeta(\underline{n}) = \sum_{\underline{p}} v_{\underline{m},\underline{n}}^{\underline{p}} \zeta(\underline{p}).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración consiste en observar que el producto stuffle modela exactamente la partición del dominio de la suma en un producto de series múltiples de tipo (1.1), como en el caso particular (3.2). $\square$

En otras palabras, la aplicación $Y_{\underline{n}} \mapsto \zeta(\underline{n})$ define un morfismo de álgebras de $(\mathcal{Y}_0, *)$ en $\mathbb{R}$. Se puede demostrar que existe una única manera de extenderlo a un morfismo definido sobre toda el álgebra $(\mathcal{Y}, *)$ que se anule en y_1 (esto equivale a establecer $\zeta(1) = 0$). A este proceso se le llama la *regularización stuffle* de los valores zeta múltiples.

4.2. UNA FÓRMULA INTEGRAL PARA LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES

Aunque los valores zeta múltiples se definen como sumas de *series* múltiples (1.1), es conveniente interpretarlos como valores de *integrales* múltiples. Para ello introducimos dos formas diferenciales:

$$\omega_0(x) = \frac{dx}{x} \quad \text{y} \quad \omega_1(x) = \frac{dx}{1-x}.$$

A una palabra $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ le asociamos la *integral iterada*:

$$I(a_1, \dots, a_n) = \int_{\Delta^n} \omega_{a_1}(t_1) \cdots \omega_{a_n}(t_n), \quad (4.1)$$

donde $\Delta^n = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$ es el simplex estándar de dimensión n . Observemos que la integral (4.1) converge exactamente cuando $a_1 \neq 0$ y $a_n \neq 1$. La siguiente proposición se atribuye a Kontsevich (usamos la notación $\{0\}^r$ para una secuencia de r ceros consecutivos).

PROPOSICIÓN 4.2. *Se cumple:*

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = I(1, \{0\}^{n_1-1}, \dots, 1, \{0\}^{n_r-1}).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero hacemos aparecer series geométricas en la integral iterada mediante el desarrollo:

$$\omega_1(t) = \sum_{n \geq 0} t^n dt,$$

luego intercambiamos las sumas y las integrales y calculamos las integrales en orden creciente de los índices. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} I(1, 0) &= \iint_{0 \leq x \leq y \leq 1} \frac{dx}{1-x} \frac{dy}{y} = \sum_{k \geq 0} \int_0^1 \left(\int_0^y x^k dx \right) \frac{dy}{y} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} \int_0^1 y^{k+1} \frac{dy}{y} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2). \end{aligned} \quad \square$$

Esta proposición demuestra que los valores zeta múltiples son periodos en el sentido de Kontsevich-Zagier:

DEFINICIÓN 4.3 (Kontsevich-Zagier [47]). Un *periodo* (efectivo) es un número complejo cuyas partes real e imaginaria se pueden escribir como integrales absolutamente convergentes de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}$ sobre dominios de $\mathbb{R}^n$ definidos por desigualdades entre polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Remitimos al lector al texto de Fresán [30] para más detalles sobre esta noción.

Los valores zeta múltiples admiten otras representaciones integrales útiles: por ejemplo, el cambio de variables $t_i = x_i \cdots x_n$, para $i = 1, \dots, n$, permite escribir las integrales iteradas (4.1) como integrales sobre el hipercubo $[0, 1]^n$, según el modelo:

$$\zeta(2) = \iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1 - xy}.$$

4.3. PRODUCTO SHUFFLE

Las integrales iteradas (4.1) tienen una estructura multiplicativa notable. La modelamos de manera paralela al producto stuffle introduciendo el espacio

$$\mathcal{X} = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1 \rangle$$

de polinomios no conmutativos en dos variables x_0, x_1 . El *producto shuffle* $\sqcup$ sobre $\mathcal{X}$ ya lo introdujimos más arriba en otro contexto (3.3), y convierte a $\mathcal{X}$ en una $\mathbb{Q}$ -álgebra conmutativa. Por ejemplo, tenemos:

$$x_1 x_0 \sqcup x_1 x_0 = 2 x_1 x_0 x_1 x_0 + 4 x_1 x_1 x_0 x_0. \quad (4.2)$$

Inspirados por la proposición 4.2, asociamos un monomio en $\mathcal{X}$ a un multiíndice mediante la correspondencia:

$$\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \quad \longleftrightarrow \quad X_{\underline{n}} = x_1 x_0^{n_1-1} \cdots x_1 x_0^{n_r-1}.$$

Los monomios $X_{\underline{n}}$ para $\underline{n}$ convergentes forman una base de una subálgebra $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$. Escribimos el producto shuffle en esta base de la siguiente forma:

$$X_{\underline{m}} \sqcup X_{\underline{n}} = \sum_{\underline{p}} u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} X_{\underline{p}},$$

donde los coeficientes $u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}}$ son enteros naturales.

PROPOSICIÓN 4.4. Para $\underline{m}$ y $\underline{n}$ convergentes, se cumple la fórmula del producto shuffle de los valores zeta múltiples:

$$\zeta(\underline{m})\zeta(\underline{n}) = \sum_{\underline{p}} u_{\underline{m}, \underline{n}}^{\underline{p}} \zeta(\underline{p}).$$

DEMOSTRACIÓN. Escribimos los valores zeta múltiples como integrales iteradas (gracias a la proposición 4.2) y usamos el teorema de Fubini para calcular un producto de integrales de este tipo:

$$I(a_1, \dots, a_r) I(a_{r+1}, \dots, a_{r+s}) = \int_{\Delta^r \times \Delta^s} \omega_{a_1}(t_1) \cdots \omega_{a_{r+s}}(t_{r+s}).$$

El producto de símlices $\Delta^r \times \Delta^s$ es el polítopo de $\mathbb{R}^{r+s}$ definido por las desigualdades $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r \leq 1$ y $0 \leq t_{r+1} \leq \cdots \leq t_{r+s} \leq 1$. Por lo tanto, podemos triangularlo por símlices

$$0 \leq t_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq t_{\sigma(r+s)} \leq 1,$$

donde $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ es una permutación que es estrictamente creciente en los primeros r índices y en los últimos s índices, es decir, un elemento de $\sqcup(r, s)$. Dado que estos símlices se intersectan a lo largo de subconjuntos de medida nula, la integral se descompone en

$$I(a_1, \dots, a_r) I(a_{r+1}, \dots, a_{r+s}) = \sum_{\sigma \in \sqcup(r, s)} I(a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(r+s)}),$$

lo que corresponde precisamente al producto shuffle de los monomios $X_{\underline{n}}$. □

Dicho de otra manera, la aplicación $X_{\underline{n}} \mapsto \zeta(\underline{n})$ define un morfismo de álgebras de $(\mathcal{X}_0, \sqcup)$ a $\mathbb{R}$. Se puede demostrar que existe una única manera de extenderlo a un morfismo sobre toda el álgebra $(\mathcal{X}, \sqcup)$ que se anule en x_0 y x_1 (esto es equivalente a establecer $\zeta(1) = 0$). A este proceso se le llama la *regularización shuffle* de los valores zeta múltiples.

4.4. RELACIONES DE DOBLE SHUFFLE

La comparación de las dos maneras de calcular el producto de dos valores zeta múltiples (proposiciones 4.1 y 4.4) da lugar a relaciones lineales:

PROPOSICIÓN 4.5. *Si $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son multiíndices convergentes, se tiene la igualdad:*

$$\sum_p (u_{\underline{m}, \underline{n}}^p - v_{\underline{m}, \underline{n}}^p) \zeta(\underline{p}) = 0. \quad (4.3)$$

Estas relaciones, llamadas *relaciones de doble shuffle*, son en general no triviales; por ejemplo, para $\underline{m} = \underline{n} = (2)$, la igualdad entre el producto shuffle (4.2) y el producto stuffle (3.1) conduce a

$$4\zeta(1, 3) = \zeta(4).$$

Si $\underline{m} = (1)$ y $\underline{n}$ es un multiíndice convergente, el lector se dará cuenta de que el lado izquierdo de (4.3) solo involucra multiíndices convergentes (las dos apariciones del valor zeta múltiple divergente $\zeta(\underline{n}, 1)$ se compensan) y se puede demostrar que

la relación correspondiente se cumple. En el caso $\underline{n} = (2)$ se obtiene la igualdad $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$ (que también puede deducirse de la representación de $\zeta(3)$ como integral iterada en dimensión 3 y del cambio de variable $t_i \leftrightarrow 1 - t_i$ en la integral). Estas relaciones de doble shuffle que involucran multiíndices potencialmente divergentes se llaman *relaciones de doble shuffle extendido* y fueron introducidas y estudiadas por Ihara-Kaneko-Zagier [46]. Se conjetura que contienen toda la información sobre las relaciones lineales entre valores zeta múltiples:

CONJETURA 4.6. *Las relaciones de doble shuffle extendido generan todas las relaciones $\mathbb{Q}$ -lineales entre valores zeta múltiples.*

Dado que las relaciones de doble shuffle se cumplen para los valores zeta múltiples motivicos, esta conjetura implica la conjetura de periodos (conjetura 3.9). Sin embargo, aún no se conoce una demostración elemental de que también implica la fórmula de dimensión de Zagier (conjetura 3.4). La compatibilidad entre la conjetura 4.6 y las conjeturas de la sección 3 se ha comprobado experimentalmente en pesos bajos (véanse, por ejemplo, [42] y [11]).

5. PERIODOS, COHOMOLOGÍA, MOTIVOS

Esta sección constituye un aparte introductorio a las ideas necesarias para comprender la noción de valor zeta múltiple motivico. Remitimos al lector a la exposición de Fresán [30] para más detalles sobre estas ideas.

5.1. LOGARITMO COMPLEJO, INTEGRALES ELÍPTICAS Y PERIODOS

Es un hecho clásico que no existe una función logaritmo complejo, es decir, que la ecuación diferencial

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

no tiene solución en el espacio de funciones holomorfas $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$. La demostración consiste en calcular una integral a lo largo del camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ que recorre el círculo unidad en sentido positivo, es decir, dado por $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)} = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i. \quad (5.1)$$

Sin embargo, el teorema de Stokes implica que la integral de una derivada a lo largo de un camino *cerrado* γ debe anularse:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 d(f(\gamma(t))) \\ &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0. \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, la fórmula

$$\log(z) = \int_1^z \frac{dx}{x}$$

define una función holomorfa *multivaluada* de la variable compleja $z \in \mathbb{C}^*$, cuyo valor depende de la elección del camino de integración entre 1 y z ; si se cambia el camino añadiendo un giro alrededor de 0, se añade $2\pi i$ al valor de la función.

La teoría de residuos de Cauchy explica que este fenómeno es la *única* obstrucción al cálculo de primitivas de funciones meromorfas con singularidad en $z = 0$. Paralelamente, la teoría de residuos es un enunciado sobre la topología de $\mathbb{C}^*$: un lazo (camino continuo cerrado) trazado en $\mathbb{C}^*$ es contractible (es decir, se puede contraer continuamente sobre un punto) si y solo si la integral de $\frac{dz}{z}$ sobre este camino es nula: el círculo unidad representa, por lo tanto, la *única* obstrucción a la deformación de lazos trazados en $\mathbb{C}^*$. Observemos que el número $2\pi i$ que aparece en la comparación entre estas dos nociones de obstrucción mediante la fórmula (5.1) es un periodo en el sentido de la definición 4.3. Es también el periodo, en el sentido habitual, de la función exponencial compleja, lo que constituye otra manera de expresar la obstrucción a la existencia de un logaritmo complejo.

Consideraciones análogas están en el corazón de la teoría de integrales elípticas⁵, de la forma

$$F(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

donde k es una constante. Aparecen en el siglo XVIII en el cálculo del periodo del péndulo simple, o del perímetro de las elipses (de ahí su nombre). Se interpretan de manera moderna como integrales sobre la *curva elíptica*⁶

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\}.$$

La función $F(z)$ es entonces una función multivaluada sobre E , ya que depende de la elección de un camino de integración. Dado que una curva elíptica se identifica topológicamente con la superficie de un toro, existen (salvo deformación) dos contornos de integración cerrados independientes γ_1 y γ_2 sobre E . Las integrales de la forma diferencial dx/y a lo largo de γ_1 y γ_2 se llaman los *periodos* de E y desempeñan el mismo papel que $2\pi i$ en la teoría de residuos. (Son periodos, en el sentido habitual, de la función recíproca de $F(z)$, que se llama una *función elíptica* y es el análogo de la función exponencial del párrafo anterior. Es en este contexto donde se cristalizó el uso del término «periodo» en el sentido más general de la definición 4.3.)

5.2. COHOMOLOGÍA Y PERIODOS

Las discusiones de la sección anterior se interpretan en el lenguaje moderno como una comparación entre dos teorías de obstrucción asociadas a una variedad algebraica X definida por ecuaciones polinomiales con coeficientes en un subcuerpo $K \subset \mathbb{C}$. En el caso de la teoría de residuos, $X = \mathbb{C}^*$ corresponde a las soluciones de la ecuación $xy = 1$ en $\mathbb{C}^2$ y podemos tomar $K = \mathbb{Q}$. En el caso de las integrales elípticas, $X = E$ y K es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ que contiene el parámetro k^2 .

⁵En este caso, se trata de integrales elípticas de *primera especie*.

⁶El lector avisado se habrá dado cuenta de que en realidad se trata de una curva elíptica privada del punto en el infinito, que aparece al compactificar E en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

1. Por un lado, se puede medir la obstrucción *analítica* al cálculo de primitivas de formas diferenciales sobre X por medio de los grupos de *cohomología de de Rham* $H_{\text{dR}}^n(X)$, donde n es el grado de las formas diferenciales. Un descubrimiento importante de Grothendieck es que todas estas obstrucciones provienen de formas diferenciales *algebraicas*: por lo tanto, los grupos de cohomología de de Rham son espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo K [36].
2. Por otro lado, se puede medir la obstrucción *topológica* a deformar dominios trazados continuamente sobre X por medio de los grupos de *cohomología de Betti* (o singular) $H_{\text{B}}^n(X)$, donde n es la dimensión de los dominios. Estos son espacios vectoriales definidos sobre $\mathbb{Q}$.

La comparación entre estas dos teorías se hace mediante la integración de las formas diferenciales sobre los dominios y da lugar al siguiente isomorfismo que combina el isomorfismo de de Rham [25] y la comparación, establecida por Grothendieck, entre la cohomología de de Rham analítica y algebraica:

$$\int : H_{\text{dR}}^n(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\text{B}}^n(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}. \quad (5.2)$$

Lo llamamos *el isomorfismo de periodos* y una matriz correspondiente (relativa a una base de $H_{\text{dR}}^n(X)$ sobre K y una base de $H_{\text{B}}^n(X)$ sobre $\mathbb{Q}$) una *matriz de periodos*. Sus coeficientes son ciertas integrales de formas diferenciales algebraicas sobre dominios trazados sobre X y son periodos en el sentido de la definición 4.3 si K es un cuerpo de números (una extensión finita de $\mathbb{Q}$). Recíprocamente, se puede demostrar que si se permite considerar grupos de cohomología *relativa* asociados a pares de variedades (X, Y) , entonces todo periodo en el sentido de la definición 4.3 aparece en una matriz de periodos para un par definido sobre un cuerpo de números [45].

Los ejemplos estudiados en la sección anterior corresponden a integrales a lo largo de caminos, es decir, el caso $n = 1$. La teoría de residuos nos enseña que los grupos de cohomología $H_{\text{dR/B}}^1(\mathbb{C}^*)$ son de dimensión 1. La matriz de periodos contiene la constante $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$. En el caso de una curva elíptica, los grupos de cohomología $H_{\text{dR/B}}^1(E)$ son de dimensión 2. La matriz de periodos contiene, entre otras cosas, las integrales de dx/y a lo largo de los caminos⁷ γ_1 y γ_2 .

5.3. LA FILOSOFÍA DE LOS MOTIVOS

La existencia del isomorfismo de periodos (5.2) es un fenómeno intrigante ya que establece un vínculo entre dos nociones de obstrucción *a priori* muy diferentes. A lo largo del siglo XX se fueron definiendo otras teorías cohomológicas, que miden obstrucciones adicionales y resultan ser todas ellas comparables entre sí en el sentido de que están relacionadas mediante isomorfismos canónicos, siguiendo el modelo de (5.2). La cohomología étale, que desempeña un papel importante en la demostración de las conjeturas de Weil por Grothendieck y Deligne, es un ejemplo

⁷También contiene otros dos periodos llamados integrales elípticas de *segunda especie* o *cuasi-periodos* de E .

relevante [58, 37, 21, 22]. En este caso, la comparación con la cohomología singular permite relacionar el recuento de soluciones a un sistema de ecuaciones polinomiales sobre cuerpos finitos con la topología de la variedad compleja correspondiente.

Estas «coincidencias» impulsaron a Grothendieck a considerar la posibilidad de que las diferentes cohomologías asociadas a una variedad algebraica X no fueran sino «proyecciones» de un objeto más primitivo, el *motivo* de X . A diferencia de la cohomología, este motivo no es un objeto algebraico como un espacio vectorial, pero se maneja de manera esencialmente similar (por ejemplo, se puede hablar de núcleo o imagen de un morfismo entre motivos, tomar productos cartesianos o tensoriales, etc.)⁸. Las diferentes teorías de cohomología se ven entonces como operadores⁹ que permiten asociar un espacio vectorial a un motivo, por ejemplo

$$M \mapsto M_{\text{dR}} \quad \text{y} \quad M \mapsto M_B$$

para la cohomología de de Rham y la cohomología de Betti. Una distinción fundamental es que un morfismo entre motivos siempre es «de origen geométrico» (por ejemplo, inducido por un morfismo entre variedades algebraicas o, más generalmente, por ciclos algebraicos).

La contrucción de la teoría de motivos soñada por Grothendieck ha ocupado a los matemáticos durante ya medio siglo, y las herramientas y técnicas que han implementado con este fin han transformado indiscutiblemente la geometría algebraica y aritmética. Los valores zeta múltiples motivicos de los que nos ocupamos aquí son solo una de las muchas manifestaciones de esta teoría. Existen varias aproximaciones a la teoría de los motivos y remitimos al lector a los libros [1] y [45] para más detalles sobre los desarrollos recientes. En lo que sigue, dejaremos de lado estas dificultades asumiendo que se tiene una teoría de los motivos con las propiedades esperadas. Vamos a interesarnos particularmente por la familia de motivos que se obtienen (en un sentido preciso) a partir del motivo correspondiente al grupo de cohomología $H^1(\mathbb{C}^*)$, que se designa $\mathbb{Q}(-1)$ y se llama el *motivo de Lefschetz*. Estos motivos se llaman *de Tate mixtos* y constituyen una parte diminuta, pero aún así extremadamente rica, de la teoría de motivos.

5.4. PERIODOS MOTÍVICOS

Ahora podemos dar una definición (relativamente precisa) de periodo motivico:

DEFINICIÓN 5.1. Un *periodo motivico* es un triplete (M, φ, ω) con

- M un motivo,
- $\omega \in M_{\text{dR}}$ un elemento de su realización de de Rham y
- $\varphi \in M_B^\vee$ una forma lineal sobre su realización de Betti.

Se considera que dos periodos motivicos (M, φ, ω) y (M', φ', ω') son iguales si existe un morfismo de motivos $f : M \rightarrow M'$ tal que $f_{\text{dR}}(\omega) = \omega'$ y $f_B^\vee(\varphi') = \varphi$.

⁸Los motivos son, según la idea de Grothendieck, objetos de una categoría *tannakiana*.

⁹Estos operadores se llaman *funtores de realización*.

El *periodo* asociado a (M, φ, ω) es el número complejo

$$\text{per}(M, \varphi, \omega) = \langle \varphi, \int \omega \rangle,$$

donde $\int$ es el isomorfismo de comparación (5.2).

Los periodos motivicos forman un álgebra¹⁰ $\tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$ y entonces tenemos un morfismo de álgebras, llamado el morfismo de periodos:

$$\text{per} : \tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (5.3)$$

En la práctica, M es el motivo de una variedad X (o más generalmente de un par de variedades), ω es la clase de una forma diferencial algebraica sobre X y φ es la clase de un dominio trazado sobre X . El periodo correspondiente es entonces simplemente la integral de ω sobre φ . Por lo tanto, es fácil construir periodos motivicos correspondientes a determinados periodos *concretos* como $2\pi i$ o las integrales elípticas estudiadas anteriormente. Por ejemplo, la versión motivica de $2\pi i$ es

$$(2\pi i)^{\text{mot}} = (\mathbb{Q}(-1), [\gamma], [dx/x]).$$

Una clase de morfismos entre motivos viene de los morfismos entre variedades algebraicas, en cuyo caso la igualdad entre periodos motivicos prevista por la definición es una versión abstracta de la fórmula de cambio de variables del cálculo integral.

Una primera intuición es que un periodo motivico es el *ingrediente geométrico* detrás de un periodo. Una distinción fundamental es que, por definición, las relaciones entre periodos motivicos son todas de *naturaleza geométrica*, ya que están controladas por morfismos entre motivos. La conjetura de periodos de Grothendieck afirma que esto también es cierto para los periodos:

CONJETURA 5.2 (Conjetura de periodos de Grothendieck, caso general). *El morfismo de periodos (5.3) es inyectivo.*

Es una conjetura muy fuerte: afirma esencialmente que toda relación algebraica entre periodos puede demostrarse utilizando únicamente herramientas algebraicas. Dicho de otra manera, no debería haber ninguna diferencia entre trabajar con los periodos o con sus versiones motivicas. La conjetura 5.2 es de la misma naturaleza que la siguiente conjetura más explícita¹¹:

CONJETURA 5.3 (Conjetura de Kontsevich-Zagier, [47]). *Todas las relaciones lineales entre periodos son consecuencia de:*

1. *la bilinealidad de la integración;*
2. *la fórmula de cambio de variable;*

¹⁰Utilizamos el símbolo tilde aquí para evitar cualquier confusión con el álgebra $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ definida más arriba, que es una subálgebra de $\tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$.

¹¹La conjetura de Kontsevich-Zagier es esencialmente equivalente a la conjetura de periodos según el enfoque de la teoría de motivos de Nori [45]. No se sabe si este enfoque da la misma teoría que otros enfoques, incluido el de Voevodsky, con el que trabajamos implícitamente en este texto [57].

3. la fórmula de Stokes.

Observemos que las relaciones de doble shuffle entre los valores zeta múltiples no son directamente de naturaleza geométrica, ya que el producto stuffle se obtiene a partir de las representaciones como series. Sin embargo, es posible demostrarlas manipulando únicamente integrales [54], lo que demuestra que cumplen las predicciones de las dos conjeturas anteriores.

6. INTEGRALES ITERADAS Y GRUPO FUNDAMENTAL DE $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

Como hemos visto en la proposición 4.2, los valores zeta múltiples tienen representaciones integrales. En esta sección desarrollamos esta idea haciendo intervenir el grupo fundamental del espacio $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Los valores zeta múltiples motivicos se definen y manipulan usando este punto de vista geométrico.

6.1. INTEGRALES ITERADAS Y POLILOGARITMOS

Estudiamos el espacio $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Recordemos las dos formas diferenciales elementales de grado 1 sobre X :

$$\omega_0 = \frac{dx}{x} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \frac{dx}{1-x}.$$

Para dos puntos base $a, b \in X$, consideremos caminos continuos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. El conjunto de estos caminos módulo la relación de homotopía (que identifica dos caminos que se pueden deformar continuamente uno en el otro) se designa $\pi_1(X, a, b)$. La composición de caminos induce una aplicación

$$\pi_1(X, a, b) \times \pi_1(X, b, c) \rightarrow \pi_1(X, a, c). \quad (6.1)$$

Esto hace que $\pi_1(X, a, a) =: \pi_1(X, a)$ sea un grupo, llamado el *grupo fundamental* de X basado en a . Más generalmente, la colección de todos los conjuntos $\pi_1(X, a, b)$ dotada de las operaciones de composición (6.1) forma el *grupoide fundamental* de X . Se demuestra fácilmente que el grupo fundamental no depende del punto base y es isomorfo a un grupo libre sobre dos generadores γ_0 y γ_1 , que son las (clases de) lazos alrededor de 0 y 1, respectivamente. Por ejemplo, para el punto base $a = \frac{1}{2}$ se pueden elegir $\gamma_0(t) = \frac{1}{2} \exp(2i\pi t)$ y $\gamma_1(t) = 1 - \frac{1}{2} \exp(2i\pi t)$.

Dado un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$ y cualquier palabra $\omega_{i_1} \cdots \omega_{i_n}$ con $i_k \in \{0, 1\}$, podemos considerar la *integral iterada*

$$\int_{\gamma} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_n} = \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1} \omega_{i_1}(\gamma(t_1)) \cdots \omega_{i_n}(\gamma(t_n)). \quad (6.2)$$

Para $n = 1$ estas son simplemente integrales de formas 1-diferenciales a lo largo de caminos, y obtenemos valores especiales de la función logaritmo:

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \log(b/a).$$

Un ejemplo de integral iterada de longitud $n = 2$ es:

$$\int_{\gamma} \omega_0 \omega_1 = \int_{\gamma} \frac{dx}{1-x} \log(x/a).$$

Tras un cambio de variable, se puede expresar en función de un valor especial de la función *dilogaritmo*:

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = - \int_0^z \frac{dx}{x} \log(1-x).$$

Esta función está bien definida sobre el disco unidad $\{|z| < 1\}$ y se extiende como una función *multivaluada* a todo X . Las integrales iteradas de cualquier longitud contienen valores especiales de las funciones *polilogaritmo*

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} = \int_0^z \frac{dx}{x} \text{Li}_{n-1}(z),$$

y más generalmente de los *polilogaritmos múltiples*:

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}. \quad (6.3)$$

6.2. EL ISOMORFISMO DE CHEN

La teoría de las integrales iteradas de Chen sigue la misma filosofía que los trabajos de de Rham [25] sobre la homología singular que llevaron al isomorfismo de periodos (5.2): su objetivo es entender el grupo fundamental de X en términos de formas diferenciales mediante las integrales iteradas. Dado que el grupo fundamental es un objeto profundamente «no abeliano», la teoría de Chen solo se ocupa de una aproximación lineal del grupo fundamental, llamada su *compleción pro-unipotente* o *compleción de Malcev*. Para definirla, escribamos $G = \pi_1(X, a)$ y sea $\mathbb{C}[G]$ su álgebra de grupo, con base dada por el conjunto G y multiplicación por la extensión lineal de la ley de grupo. Tenemos un ideal $I \subset \mathbb{C}[G]$, el *ideal de aumentación*, generado por las diferencias de dos elementos de G . Consideramos sus potencias I^{n+1} , que son ideales cada vez más pequeños de $\mathbb{C}[G]$. La elección de un camino de a a b induce una biyección $\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X, a, b)$ y podemos ver los ideales I^{n+1} como subespacios vectoriales del espacio vectorial¹² $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]$. Los cocientes $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]/I^{n+1}$ son aproximaciones lineales cada vez más fieles de $\pi_1(X, a, b)$.

Designemos $\mathbb{C}\langle\omega_0, \omega_1\rangle$ el espacio de polinomios no conmutativos en los símbolos ω_0, ω_1 , y $\mathbb{C}\langle\omega_0, \omega_1\rangle_{\leq n}$ el subespacio de polinomios de grado $\leq n$, generado por las palabras (monomios) de longitud $\leq n$. La integral iterada (6.2) es invariante por homotopía, así que induce, para cada una de estas palabras, una forma lineal sobre el espacio $\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]$, que se puede demostrar que se anula sobre el subespacio I^{n+1} .

¹²Estos subespacios vectoriales no dependen de la elección del camino de a a b .

TEOREMA 6.1 (Chen [20]). *Las integrales iteradas inducen un isomorfismo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$:*

$$\int : \mathbb{C}\langle\omega_0, \omega_1\rangle_{\leq n} \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}[\pi_1(X, a, b)]/I^{n+1})^\vee. \quad (6.4)$$

En la versión más general del teorema, se puede sustituir X por cualquier variedad diferencial. El lado izquierdo del isomorfismo de Chen está dado entonces por un objeto que selecciona las integrales iteradas invariantes por homotopía (esta condición se satisface automáticamente en el caso que estudiamos aquí).

6.3. GRUPO FUNDAMENTAL MOTÍVICO Y VALORES ZETA MÚLTIPLES MOTÍVICOS

El isomorfismo de Chen (6.4) es análogo en apariencia al isomorfismo de periodos (5.2) ya que compara un espacio vectorial de formas diferenciales algebraicas con un invariante topológico de X . Esta analogía puede hacerse precisa mediante un teorema atribuido por Goncharov a Beilinson [33, Th. 4.1], que afirma que el isomorfismo de Chen es un caso particular del isomorfismo de periodos para un cierto grupo de cohomología (relativa). Entonces se puede considerar el motivo que corresponde a este grupo de cohomología y luego hacer tender n a $+\infty$; el objeto obtenido es denominado erróneamente el *grupo fundamental motivico* de X con puntos base a y b . El lema es entonces: las integrales iteradas son los periodos del grupo fundamental motivico. La teoría de los grupos fundamentales motivicos fue desarrollada por Deligne y Goncharov [23, 35, 32, 24] y refleja trabajos más antiguos de Hain y Hain-Zucker sobre las estructuras de Hodge sobre el grupo fundamental [38, 39, 40, 41].

Para estudiar los valores zeta múltiples, según la proposición 4.2 debemos considerar integrales iteradas (6.2) a lo largo del camino $\gamma = [0, 1]$. Sin embargo, los extremos de este camino no están contenidos en $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$, de modo que la teoría que acabamos de esbozar no se aplica. Necesitamos una variante donde los puntos base a y b no sean puntos de X sino *puntos base tangenciales al infinito*, es decir, direcciones tangentes en un punto 0 , 1 o ∞ que están «en el infinito» desde el punto de vista del espacio X . Las integrales iteradas pueden ser divergentes y para dar un sentido al isomorfismo de Chen (6.4) es necesario *regularizarlas*: aquí es donde nos encontramos con la regularización shuffle ya mencionada en la sección 4.3.

Una vez realizadas estas construcciones, tenemos un motivo M que cumple:

- la realización de de Rham de M es el espacio $M_{\text{dR}} = \mathbb{C}\langle\omega_0, \omega_1\rangle$. Para cualquier multiíndice $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$, convergente o no, existe un elemento

$$\Omega_{\underline{n}} = \omega_1 \omega_0^{n_1-1} \dots \omega_1 \omega_0^{n_r-1} \in M_{\text{dR}};$$

- la realización de Betti M_{B} es el espacio de funciones sobre el completado pro-unipotente del grupo fundamental de X con los puntos base tangenciales adecuados en 0 y en 1 . El segmento unidad define un elemento

$$[0, 1] \in M_{\text{B}}^\vee.$$

Siguiendo la receta de la sección 5.4, se puede entonces dar la definición de los valores zeta múltiples motivicos:

DEFINICIÓN 6.2. Se define el *valor zeta múltiple motivico*

$$\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r) = (M, [0, 1], \Omega_{\underline{n}}) \in \tilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}.$$

El periodo asociado a $\zeta^{\text{mot}}(n_1, \dots, n_r)$ es por definición la integral iterada de $\Omega_{\underline{n}}$ entre 0 y 1, es decir, el número $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ según la proposición 4.2. En el caso en que $\underline{n}$ sea un multiíndice divergente, este número se interpreta mediante la regularización shuffle.

La imagen del segmento unidad $[0, 1] \in M_{\mathbb{B}}^{\vee}$ por el isomorfismo de comparación de M se llama el *asociador de Drinfel'd*. Es una serie formal en dos variables cuyos coeficientes son todos los valores zeta múltiples, lo que constituye uno de los puntos de partida de la teoría de Grothendieck-Teichmüller (pro-unipotente)[26].

7. APLICACIONES DE LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES MOTÍVICOS

Es hora de explicar cómo las ideas motivicas permiten demostrar el teorema 3.5 de Goncharov y Terasoma, así como el teorema 3.7 de Brown.

7.1. DE LOS NÚMEROS ALGEBRAICOS A LOS PERIODOS

Los números algebraicos son periodos particulares en el sentido de la definición 4.3; por ejemplo, podemos escribir $\sqrt{2} = \int_{x^2 \leq 2} \frac{1}{2} dx$. Desde un punto de vista más cohomológico, una raíz de un polinomio irreducible $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ aparece en la matriz de periodos del grupo de cohomología $H^0(X)$ con $X = \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) = 0\}$. La cohomología de de Rham es simplemente el espacio de funciones $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ y la cohomología de Betti tiene como base los puntos de X . Una matriz de periodos es, por lo tanto, la matriz de Vandermonde asociada a las raíces de f . En resumen, los números algebraicos son los periodos de las variedades algebraicas de dimensión cero sobre $\mathbb{Q}$.

La teoría de Galois estudia las *simetrías* de las ecuaciones polinomiales en una variable. Al cuerpo de números $K = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ se le asocia su *grupo de Galois* G , que es por definición el grupo de los automorfismos del cuerpo K . Es un grupo finito que se inyecta en el grupo de permutaciones del conjunto de raíces complejas de f . Un elemento de G está determinado únicamente por su acción sobre el generador x y el cardinal de G es como máximo el grado de la extensión $[K : \mathbb{Q}] = \deg(f)$. Se dice que la extensión es *galoisiana* si se cumple la igualdad $|G| = [K : \mathbb{Q}]$. En este caso, la *correspondencia de Galois* establece una biyección entre los subcuerpos de K y los subgrupos de G .

Parte de esta teoría se generaliza (conjeturalmente) a los periodos [2]. Para un motivo cualquiera M se puede definir un grupo G_M , denominado *grupo de Galois motivico*, cuyos elementos son los automorfismos lineales del espacio vectorial M_{dR}

que «respetan todas las construcciones algebraicas entre motivos»¹³. Se demuestra que es un grupo algebraico, es decir, un grupo de matrices cuadradas definido por ecuaciones algebraicas. Este grupo actúa sobre los periodos motivicos de M mediante la fórmula

$$g \cdot (M, \varphi, \omega) = (M, \varphi, g \cdot \omega),$$

es decir «por multiplicación por la derecha de la matriz de periodos». Si creemos en la conjetura de periodos de Grothendieck (conjetura 5.2), esta acción se reduce a una acción sobre los periodos de M . Sin esta conjetura, solo tenemos acceso a una teoría de Galois de periodos *motivicos*. Observemos que una reformulación de la conjetura de periodos es que la dimensión de G_M es igual al grado de trascendencia del álgebra generada por los periodos de M .

No toda la intuición proveniente de los números algebraicos se traslada a los periodos, pero sí al menos dos principios generales que revisaremos más adelante:

- *Principio de finitud*. Sea K un subcuerpo de $\mathbb{C}$ generado por un número finito de números algebraicos. Entonces K tiene dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$.
- *Principio de reconocimiento*. Supongamos que la extensión $K/\mathbb{Q}$ es galoisiana y que G es su grupo de Galois. Si $x \in K$ es un punto fijo de la acción de G , entonces $x \in \mathbb{Q}$.

El primer principio es esencialmente tautológico, ya que un número es algebraico exactamente cuando sus potencias generan un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$. Una aplicación trivial pero ilustrativa del segundo principio es la siguiente: consideremos el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ constituido por los números $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Es una extensión galoisiana de $\mathbb{Q}$ cuyo grupo de Galois es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, generado por la «conjugación» $\tau : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. Como τ es un morfismo de cuerpos, respeta suma y producto y actúa trivialmente sobre el número $x_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$. De esto deducimos, sin hacer ningún cálculo, que x_n es un número racional.

7.2. EL PRINCIPIO DE FINITUD Y LA COTA DE GONCHAROV-TERASOMA

La aplicación del principio de finitud en el caso de los valores zeta múltiples permite demostrar el teorema 3.5 de Goncharov y Terasoma. Sea M el motivo definido en la sección 6.3 cuyos periodos contienen los valores zeta múltiples. Forma parte de una familia de motivos llamados *motivos de Tate mixtos sobre $\mathbb{Z}$* y que son muy particulares por dos razones:

1. Todos ellos se pueden obtener (en un sentido preciso) a partir del motivo de Lefschetz $\mathbb{Q}(-1)$. Esto excluye, por ejemplo, los motivos de las curvas elípticas.
2. Tienen *buena reducción* en todo número primo p , es decir, la reducción módulo p no cambia la geometría subyacente al motivo. Esto excluye los grupos fundamentales motivicos de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ con puntos base finitos; por ejemplo, el punto base $a = 2$ se comporta mal al reducir módulo $p = 2$.

¹³Es necesario el *formalismo tannakiano* para darle un verdadero sentido matemático a la expresión entre comillas.

Estas fuertes restricciones implican una cota al tamaño de esta familia. Concretamente, los periodos motivicos de estos motivos viven en una subálgebra $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ del álgebra $\widetilde{\mathcal{P}}^{\text{mot}}$ de todos los periodos motivicos, que es *pequeña* en el sentido de que tiene dimensión finita en todo peso. Se puede cuantificar su tamaño e incluso su estructura abstracta gracias a resultados profundos, en particular, el cálculo por Borel de la K -teoría racional del anillo de los enteros [12]. Se obtiene el isomorfismo

$$\mathcal{P}^{\text{mot}} \simeq \mathcal{F}$$

anunciado en la sección 3.4, que da las dimensiones de $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ en todo peso, y el teorema 3.5 una vez aplicado el morfismo de periodos¹⁴.

7.3. EL PRINCIPIO DE RECONOCIMIENTO Y EL TEOREMA DE BROWN

La acción del grupo de Galois motivico G_M sobre los valores zeta múltiples motivicos es sorprendentemente sencilla de calcular explícitamente gracias a una fórmula combinatoria descubierta por Goncharov [32] y refinada por Brown [14]. Los valores zeta (motivicos) simples desempeñan un papel especial respecto a esta acción en el sentido de que tienen un espacio de conjugados mínimo. Más precisamente, tenemos la fórmula, para $n \geq 2$:

$$g \cdot \zeta^{\text{mot}}(n) = a_g^{(n)} \zeta^{\text{mot}}(n) + b_g^{(n)}$$

donde $a_g^{(n)}$ y $b_g^{(n)}$ son funciones sobre G_M y $b_g^{(n)} = 0$ para n par. (Esta anulación es una manifestación de la solución de Euler al problema de Basilea, que dice que los valores de la función zeta en enteros pares son múltiplos racionales de potencias de π .) Una observación importante es que esta fórmula *caracteriza* los valores zeta (motivicos) simples, lo cual es una variante del principio de reconocimiento:

PROPOSICIÓN 7.1. *Sea $\xi \in \mathcal{P}^{\text{mot}}$ un periodo motivico de peso $n \geq 2$ tal que se cumple $G \cdot \xi \subset \mathbb{Q}\xi \oplus \mathbb{Q}$. Entonces ξ es un múltiplo racional de $\zeta^{\text{mot}}(n)$.*

Un descubrimiento de Brown es que esta observación permite demostrar la existencia de relaciones entre valores zeta múltiples por vía galoisiana [15]. Por ejemplo, partiendo de la fórmula

$$g \cdot \zeta^{\text{mot}}(2, 3) = a_g^{(5)} \zeta^{\text{mot}}(2, 3) + 3 a_g^{(2)} b_g^{(3)} \zeta^{\text{mot}}(2) + c_g^{(5)}$$

dada por teoría de Galois de $\zeta^{\text{mot}}(2, 3)$, se deduce que la combinación lineal

$$\zeta^{\text{mot}}(2, 3) - 3 \zeta^{\text{mot}}(2) \zeta^{\text{mot}}(3)$$

satisface las hipótesis de la proposición 7.1 y es por tanto un múltiplo racional de $\zeta^{\text{mot}}(5)$:

$$\zeta^{\text{mot}}(2, 3) - 3 \zeta^{\text{mot}}(2) \zeta^{\text{mot}}(3) = \lambda \zeta^{\text{mot}}(5) \quad (\lambda \in \mathbb{Q}).$$

¹⁴*Stricto sensu*, lo que se denota $\mathcal{P}^{\text{mot}}$ es el álgebra de periodos motivicos *efectivos* y *reales* de la categoría de motivos de Tate mixtos sobre $\mathbb{Z}$.

Este método no permite determinar el coeficiente de proporcionalidad exacto, pero se puede calcular empíricamente aplicando el morfismo de periodos:

$$\lambda = \frac{\zeta(2, 3) - 3\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(5)},$$

un número que se puede aproximar con precisión arbitraria¹⁵. Las demostraciones de los teoremas 3.7 y 3.10 de Brown giran en torno a esta estrategia.

8. LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES COMO AMPLITUDES EN FÍSICA

8.1. AMPLITUDES E INTEGRALES DE FEYNMAN

A finales de la década de 1940, Feynman revolucionó la física al introducir un método para calcular la amplitud de probabilidad de las interacciones entre partículas elementales, que rápidamente demostró su efectividad y sigue utilizándose hoy en día. Estas amplitudes se calculan como series enteras cuyo parámetro se denomina *constante de acoplamiento*, y cuyos coeficientes son integrales (de Feynman) indexadas por grafos (de Feynman). Cada grafo refleja un escenario de colisión posible, donde las aristas representan partículas y los vértices representan interacciones. La precisión del resultado aumenta a medida que se calculan integrales de Feynman asociadas a grafos cada vez más complejos. (La complejidad se mide por el número de ciclos independientes en el grafo.) Entonces, se puede comprobar que estos cálculos describen fielmente la realidad comparando sus predicciones con las mediciones provenientes de los aceleradores de partículas, como el LHC (*Large Hadron Collider* o Gran Colisionador de Hadrones, un gigantesco acelerador del CERN situado bajo la frontera franco-suiza). Las integrales de Feynman son notoriamente difíciles de calcular, incluso en el caso de interacciones simples, pero en los casos abordables, describen la realidad de manera sorprendentemente precisa.

Uno de estos casos es la teoría ϕ^4 no masiva, que corresponde a grafos (en el sentido usual) donde cada vértice está conectado a como máximo 4 aristas. Dado un grafo G de este tipo, que suponemos conexo, sean $e_1, \dots, e_{N_G}$ sus aristas y definamos un polinomio

$$\Psi_G = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e,$$

donde la suma se realiza sobre los árboles generadores T de G (conjuntos de aristas maximales sin ciclos), y donde x_e es una variable formal (llamada *parámetro de Schwinger*) asociada a cada arista e . Este polinomio apareció por primera vez en los trabajos de Kirchhoff sobre circuitos eléctricos. Se define entonces una integral

$$I_G = \int_{\sigma} \frac{\Omega_G}{\Psi_G^2}, \quad (8.1)$$

¹⁵Se obtiene $\lambda \simeq -11/2$. En este caso sencillo, obviamente se puede demostrar la relación en cuestión gracias a las relaciones de doble shuffle.

donde σ es el dominio $\{x_e \geq 0 \text{ para todo } e\}$ del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{N_G-1}$ y

$$\Omega_G = \sum_{i=1}^{N_G} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{N_G}$$

es la forma volumen canónica. Es fácil caracterizar los grafos, llamados primitivos log-divergentes, para los cuales la integral anterior converge. En este caso, su valor es un periodo en el sentido de la definición 4.3 y constituye una contribución a una amplitud de la teoría ϕ^4 . Esencialmente, no se saben calcular las integrales (8.1) para grafos con más de 12 ciclos independientes.

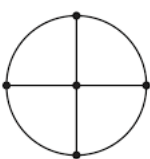
El estudio geométrico de las amplitudes (8.1) fue iniciado en el artículo [10] de Bloch-Esnault-Kreimer, que asocian a G un grupo de cohomología relativa cuya matriz de periodos contiene I_G . La comprensión de este grupo de cohomología pasa por el estudio de la *hipersuperficie de grafo* $X_G = \{\Psi_G = 0\}$ y se relaciona principalmente con la teoría de singularidades.

8.2. APARICIÓN DE LOS VALORES ZETA MÚLTIPLES

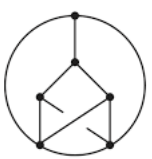
Las integrales (8.1) fueron calculadas de manera sistemática en la década de 1990, especialmente por Broadhurst y sus colaboradores, véase por ejemplo Broadhurst-Kreimer [13]. Para algunos grafos, se expresan en términos de valores zeta simples:



$6 \zeta(3)$

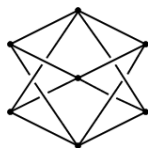


$20 \zeta(5)$



$36 \zeta(3)^2$

También se encuentran valores zeta múltiples que (conjeturalmente) no son polinomios en los valores zeta simples:



$$\frac{27}{5} \zeta(5, 3) + \frac{45}{4} \zeta(5) \zeta(3) - \frac{261}{20} \zeta(8)$$

También aparecen variantes *ciclotómicas* de los valores zeta múltiples: son las evaluaciones en las raíces de la unidad de los polilogaritmos múltiples (6.3). No se sabe qué clase de periodos aparecen como amplitudes de la forma (8.1), pero hoy en día se admite comúnmente que, a diferencia de lo que muestran los cálculos

para grafos pequeños, la geometría subyacente a estas amplitudes puede ser «tan complicada como sea posible» [8, 17]. Por lo tanto, se espera encontrar periodos cada vez más ricos a medida que las técnicas de cálculo se vayan desarrollando.

8.3. HACIA UNA TEORÍA DE GALOIS CÓSMICA

Es notable que las amplitudes de la teoría ϕ^4 que son combinaciones lineales de valores zeta múltiples generen un pequeño subespacio $\mathcal{Z}_{\phi^4}$ del álgebra $\mathcal{Z}$. Por ejemplo, se cree que ni $\zeta(2)$ ni ningún producto $\zeta(2)\zeta(2n+1)$ pertenece a este subespacio. Por lo tanto, existe una tensión entre la riqueza de estas amplitudes que acabamos de mencionar y su *rareza*. Este fenómeno sigue siendo misterioso, pero podría tener un origen galoisiano. De hecho, los cálculos de Panzer-Schnetz sugieren que la versión motivica $\mathcal{Z}_{\phi^4}^{\text{mot}}$ es estable bajo la acción del grupo de Galois motivico de los valores zeta múltiples [49]. Más ambiciosamente, Panzer y Schnetz proponen la siguiente conjetura, que va mucho más allá del marco de los valores zeta múltiples:

CONJETURA 8.1 (Conjetura de coacción). *El espacio generado por todas las amplitudes (motivicas) de la teoría ϕ^4 es estable bajo la acción del grupo de Galois motivico.*

Esta conjetura afirma que las restricciones sobre los periodos que aparecen en la teoría ϕ^4 se propagan mediante la acción del grupo de Galois motivico¹⁶. Por lo tanto, sugiere simetrías ocultas en los cálculos de amplitudes en la física de partículas y otorga peso a la idea, popularizada por Cartier, de que existe una «teoría de Galois cósmica» de algunas constantes físicas [19].

PARA PROFUNDIZAR MÁS. El estudio de los valores zeta múltiples yace en la intersección de muchos campos de las matemáticas y la física. Por lo tanto, solo hemos podido abordar algunos de los aspectos de la teoría y hemos tenido que dejar de lado temas igualmente fascinantes, como la relación con los asociadores y la teoría de Grothendieck-Teichmüller, o los desarrollos recientes relacionados con los fenómenos modulares en los valores zeta múltiples. El lector curioso podrá encontrar pistas de reflexión y una bibliografía más extensa en el libro de referencia [18].

AGRADECIMIENTOS. El autor desea dar las gracias a Michel Alessandri por su lectura atenta de una primera versión de este texto.

REFERENCIAS

- [1] Y. ANDRÉ, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panor. Synthèses **17**, Société Math. de France, Paris, 2004.

¹⁶Aún queda por demostrar que existen restricciones, lo que puede hacerse mediante un número finito de cálculos de acuerdo con el *principio de los grafos pequeños* de Brown [16], que afirma que los periodos de peso «pequeño» deben aparecer como amplitudes de grafos «pequeños».

- [2] Y. ANDRÉ, Galois theory, motives and transcendental numbers, *Renormalization and Galois theories*, 165—177, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **15**, European Mathematical Society, Zürich, 2009.
- [3] Y. ANDRÉ, Groupes de Galois motiviques et périodes, Séminaire Bourbaki, *Astérisque* **390**, Société Math. de France, Paris, 2017, Exp. No. 1104, 1—26.
- [4] R. APÉRY, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Journées arithmétiques de Luminy, *Astérisque* **61**, Société Math. de France, Paris, 1979, 11—13.
- [5] D. H. BAILEY Y H. R. P. FERGUSON, Numerical results on relations between fundamental constants using a new algorithm, *Math. Comp.* **53** (1989), no. 188, 649—656.
- [6] D. H. BAILEY Y H. R. P. FERGUSON, A polynomial time, numerically stable integer relation algorithm, Report SRC-TR-92-066, Supercomputing Research Center, 14 p., 1991.
- [7] K. BALL Y T. RIVOAL, Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, *Invent. math.* **146** (2001), no. 1, 193—207.
- [8] P. BELKALE Y P. BROSNAN, Matroids, motives, and a conjecture of Kontsevich, *Duke Math. J.* **116** (2003), no. 1, 147—188.
- [9] F. BEUKERS, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), no. 3, 268—272.
- [10] S. BLOCH, H. ESNAULT Y D. KREIMER, On motives associated to graph polynomials, *Comm. Math. Phys.* **267** (2006), no. 1, 181—225.
- [11] J. BLÜMLEIN, D. J. BROADHURST Y J. A. M. VERMASEREN, The multiple zeta value data mine, *Comput. Phys. Comm.* **181** (2010), no. 3, 582—625.
- [12] A. BOREL, Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **4** (1977), no. 4, 613—636.
- [13] D. J. BROADHURST Y D. KREIMER, Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops, *Phys. Lett. B* **393** (1997), no. 3—4, 403—412.
- [14] F. BROWN, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, *Ann. of Math.* **175** (2012), no. 2, 949—976.
- [15] F. BROWN, On the decomposition of motivic multiple zeta values, *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, 31—58. *Adv. Stud. Pure Math.* **63**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2012.
- [16] F. BROWN, Feynman amplitudes, coaction principle, and cosmic Galois group, *Commun. Number Theory Phys.* **11** (2017), no. 3, 453—556.
- [17] F. BROWN Y O. SCHNETZ, A K3 in ϕ^4 , *Duke Math. J.* **161** (2012), no. 10, 1817—1862.
- [18] J. I. BURGOS GIL Y J. FRESÁN, Multiple zeta values: from numbers to motives, *Clay Mathematics Proceedings*, en prensa.
- [19] P. CARTIER, A mad day’s work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), no. 4, 389—408.

- [20] K.-T. CHEN, Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **83** (1977), no. 5, 831–879.
- [21] P. DELIGNE, La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 43, 273–307.
- [22] P. DELIGNE, La conjecture de Weil. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, 137–252.
- [23] P. DELIGNE, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, *Galois groups over $\mathbb{Q}$* (Berkeley, CA, 1987), 79–297. Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, Springer, New York, 1989.
- [24] P. DELIGNE Y A. B. GONCHAROV, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 1, 1–56.
- [25] G. DE RHAM, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*, Doctorat d'état, Faculté des Sciences de Paris, 1931.
- [26] V. G. DRINFEL'D, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991), no. 4, 829–860.
- [27] L. EULER De summatione innumerabilium progressionum, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1738), 91–105.
- [28] L. EULER, De summis serierum reciprocarum, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1740), 123–134.
- [29] S. FISCHLER, Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal,...), Séminaire Bourbaki, *Astérisque* **294**, Société Math. de France, Paris, 2004, 27–62.
- [30] J. FRESÁN, Une introduction aux périodes, *Périodes et transcendance. Journées X-UPS 2019*, 1–147. Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2024.
- [31] H. GANGL, M. KANEKO Y D. ZAGIER, Double zeta values and modular forms, *Automorphic forms and zeta functions*, 71–106. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.
- [32] A. B. GONCHAROV, The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(\ell)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$, *Duke Math. J.* **110** (2001), no. 3, 397–487.
- [33] A. B. GONCHAROV, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, 2001. arXiv:math/0103059.
- [34] A. B. GONCHAROV, Multiple ζ -values, Galois groups, and geometry of modular varieties, *European Congress of Mathematics, Vol. I*, (Barcelona, July 10–14, 2000), 361–392. *Progr. Math.* **201**, Birkhäuser Basel, Basel, 2001.
- [35] A. B. GONCHAROV, Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry, *Duke Math. J.* **128** (2005), no. 2, 209–284.
- [36] A. GROTHENDIECK, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 29, 95–103.
- [37] A. GROTHENDIECK, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 31–45. Adv. Stud. Pure Math. **3**, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [38] R. M. HAIN, Mixed Hodge structures on homotopy groups, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **14** (1986), no. 1, 111–114.

- [39] R. M. HAIN, The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I, *K-Theory* **1** (1987), no. 3, 271–324.
- [40] R. M. HAIN, The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, *Algebraic geometry*, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 247–282. Proc. Sympos. Pure Math. **46**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.
- [41] R. M. HAIN Y S. ZUCKER, Unipotent variations of mixed Hodge structure, *Invent. math.* **88** (1987), no. 1, 83–124.
- [42] V. HOANG NGOC MINH, G. JACOB, M. PETITOT Y N. E. OUSSOUS, Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d’Euler-Zagier, *Sém. Lothar. Combin.* **43** (1999), Art. B43e, 29pp.
- [43] M. E. HOFFMAN, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra* **194** (1997), no. 2, 477–495.
- [44] M. E. HOFFMAN, Quasi-shuffle products, *J. Algebraic Combin.* **11** (2000), no. 1, 49–68.
- [45] A. HUBER Y S. MÜLLER-STACH, Periods and Nori motives, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)* **65**, Springer, Cham, 2017.
- [46] K. IHARA, M. KANEKO Y D. ZAGIER, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 2, 307–338.
- [47] M. KONTSEVICH Y D. ZAGIER, Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, 771–808, Springer, Berlin, 2001.
- [48] F. LINDEMANN, Ueber die Zahl π , *Math. Ann.* **20** (1882), no. 2, 213–225.
- [49] E. PANZER Y O. SCHNETZ, The Galois coaction on ϕ^4 periods, *Commun. Number Theory Phys.* **11** (2017), 657–705.
- [50] C. REUTENAUER, *Free Lie algebras*, London Math. Soc. Monographs (N.S.), **7**, Oxford Sci. Publ. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
- [51] T. RIVOAL, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 4, 267–270.
- [52] T. RIVOAL, Les E -fonctions et G -fonctions de Siegel, *Périodes et transcendance, Journées X-UPS*, 197–298, Éditions de l’École polytechnique, Palaiseau, 2024.
- [53] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [54] I. SOUDÈRES, Motivic double shuffle, *Int. J. Number Theory* **6** (2010), no. 2, 339–370.
- [55] J. STIRLING, *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, G. Bowyer, impensis G. Strahan (Londini), 1730.
- [56] T. TERASOMA, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. math.* **149** (2002), no. 2, 339–369.
- [57] V. VOEVODSKY, Triangulated categories of motives over a field, *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, 188–238, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

- [58] A. WEIL, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.
- [59] D. ZAGIER, Values of zeta functions and their applications, *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, July 6–10, 1992)*, 497–512, Birkhäuser Basel, Basel, 1994.
- [60] W. ZUDILIN, One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational, *Uspekhi Mat. Nauk* **56** (2001), no. 4(340), 149–150. Traducido al inglés en *Russian Math. Surveys* **56** (2001), no. 4, 774–776.

CLÉMENT DUPONT, INSTITUT MONTPELLIÉRAIN ALEXANDER GROTHENDIECK (IMAG), UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER, CNRS, PLACE EUGÈNE BATAILLON, 34090 MONTPELLIER, FRANCE

Correo electrónico: clement.dupont@umontpellier.fr

Página web: <https://imag.umontpellier.fr/~dupont/>