
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico oscar.ciaurri@unirioja.es en archivos con formato T_EX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2026.

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (★) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

PROBLEMA 513 ★. *Propuesto por Ernest N. Barisien, J. E., París, Francia.*

Dado un triángulo ABC no equilátero sean, sobre la recta BC , los puntos B_a y C_a simétricos de los vértices B y C respecto del pie de la altura que parte del vértice A . Se consideran análogamente los puntos C_b y A_b sobre la recta CA y A_c y B_c sobre la recta AB . Tomadas de tres en tres, las rectas AB_a , AC_a , BC_b , BA_b , CA_c y CB_c determinan veinte triángulos. Demostrar que si los ángulos del triángulo ABC son $(30^\circ, 70^\circ, 80^\circ)$ o $(40^\circ, 60^\circ, 80^\circ)$, uno de esos veinte triángulos será equilátero.

PROBLEMA 514. *Propuesto por Marian Ursărescu, “Roman Vodă” College, Roman, y Florică Anastase, “Alexandru Odobescu” High school, Lehliu-Gară, Rumanía, modificado por los editores.*

Para cada entero positivo k consideramos

$$J_k(n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + n^2)(x^2 + n^2) \cdots (x^2 + n^{2k})}.$$

Evaluar, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_k(n)}{n^\alpha}.$$

PROBLEMA 515. *Propuesto por Seán M. Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Arabia Saudita.*

Evaluar

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt{1 - u^2})}{1 + u^2} du.$$

PROBLEMA 516. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sintămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sean p y q dos polinomios reales del mismo grado y con coeficiente principal positivo. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt[n]{(2n+1)!!} p(n)} - \frac{(n-1)^2}{\sqrt[n-1]{(2n-1)!!} q(n-1)} \right),$$

donde $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$.

PROBLEMA 517. *Propuesto por Paolo Perfetti, Università degli studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.*

Evaluar

$$\int_1^\infty \frac{\log(x-1)(\log(1+x^2) - 2\log x)}{x} dx.$$

PROBLEMA 518. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En un cierto triángulo ABC , si M y N son, respectivamente, los puntos medios de los lados BC y AC , se tiene $\angle AMB = \angle ANB = \pi/4$. Además, si el perímetro del triángulo es de x unidades, el área es x unidades cuadradas. Hallar x .

PROBLEMA 519. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean a , b y c números reales positivos. Probar que

$$\frac{(5a^2 + 6ab + 5b^2)c^2}{(a+3b)^2(b+3a)^2} + \frac{(5b^2 + 6bc + 5c^2)a^2}{(b+3c)^2(c+3b)^2} + \frac{(5c^2 + 6ca + 5a^2)b^2}{(c+3a)^2(a+3c)^2} \geq \frac{3}{16}.$$

PROBLEMA 520. *Propuesto por Yagub Aliyev, ADA University, Bakú, Azerbaiyán.*

Sea ABC un triángulo que tiene agudos los ángulos ABC y ACB . La bisectriz interior del ángulo BAC corta BC en el punto D . La perpendicular al lado AC por el punto D corta AC en E . Sea E' el punto de AC tal que $CE' = AE$. La perpendicular a BC por el punto E' corta a las rectas BC y AB , respectivamente, en los puntos M y N . Probar que los segmentos AC , AN y MN son los lados de un triángulo.

Soluciones

PROBLEMA 489. *Propuesto por Vasile Mircea Popa, Lucian Blaga University, Sibiu, Rumanía.*

Evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \log x}{1+x^3} dx.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Denotando por I la integral a evaluar, probaremos que $I = 2\pi^2/27$.

Con el cambio de variable $x = 1/y$ en la segunda integral, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x \log x}{1+x^3} dx + \int_1^{\infty} \frac{x \log x}{1+x^3} dx = \int_0^1 \frac{(x-1) \log x}{1+x^3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(2x-1) \log x}{1-x+x^2} dx - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx =: \frac{1}{3} I_1 - \frac{2}{3} I_2, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la descomposición en fracciones simples

$$\frac{x-1}{1+x^3} = \frac{2x-1}{3(1-x+x^2)} - \frac{2}{3(1+x)}.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1-x+x^2) \log x = 0$, por integración por partes, deducimos que

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^1 \frac{\log(1-x+x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\log(1+x^3)}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que el cambio de variable $x^3 = t$ implica

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^3)}{x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt.$$

Ahora, observando que por integración por partes

$$I_2 = - \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

y utilizando la conocida identidad

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12},$$

concluimos que

$$I = \frac{8}{9} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{2\pi^2}{27}.$$

También resuelto por A. Álamo, B. Bradie, M. L. Glasser, M. Á. Ingelmo, E. y V. Lanchares (conjuntamente), J. Nadal, P. Perfetti, H. Ricardo, B. Salgueiro, S. Sharma, A. Stadler (tres soluciones), S. M. Stewart y el proponente.

NOTA. Las soluciones recibidas, exceptuando la publicada, utilizan tres tipos de argumentos. Una amplia mayoría de ellas emplea la identidad (para la que se presenta una prueba o se proporciona una referencia)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \log x}{1+x^b} dx = -\frac{\pi^2}{b^2} \csc\left(\frac{\pi a}{b}\right) \cot\left(\frac{\pi a}{b}\right), \quad 0 < a < b.$$

Una forma sencilla de probar este resultado es utilizar derivación bajo el signo integral en la relación

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b} \csc\left(\frac{\pi a}{b}\right), \quad 0 < a < b,$$

que se obtiene aplicando la fórmula de reflexión de Euler para la función Gamma. Las restantes soluciones usan desarrollos en series de potencias para la función $1/(1+x^3)$ o integración compleja. Las tres soluciones enviadas por A. Stadler se basan en estos tres tipos de argumentaciones.

PROBLEMA 490. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean s , R y r respectivamente el semiperímetro, el circunradio y el inradio de un triángulo ABC . Probar que ABC es un triángulo rectángulo si y solo si se cumple la relación $s = r + 2R$.

Comentario enviado por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

La equivalencia planteada es la segunda del apartado 1. del Problema **2874** de *Crux Mathematicorum*, propuesto por Vedula N. Murty (vol. 29 (6) (2003), pág. 401), y comentado, referenciado y resuelto en vol. 30 (7) (2004), págs. 437–438.

He aquí el enunciado de los tres apartados de dicho problema:

Sean $y = s/R$ y $x = r/R$. Probar que

1. $\sum_{\text{cíclica}} \sin^2 A = 2 \iff y - x = 2 \iff \triangle ABC \text{ es rectángulo};$
2. $\sum_{\text{cíclica}} \sin^2 A > 2 \iff y - x > 2 \iff \triangle ABC \text{ es acutángulo};$
3. $\sum_{\text{cíclica}} \sin^2 A < 2 \iff y - x < 2 \iff \triangle ABC \text{ es obtusángulo}.$

La primera de las equivalencias en 1., y por lo tanto un problema equivalente a este de La Gaceta, coincide a su vez con el segundo apartado del problema número 21.36 del libro *Problemas de Oposiciones. Tomo 10 (2019 y 2021)*, de J. M. Gamboa, F. J. Baena, B. de Diego, A. Llerena, J. M. Lorenzo, M. B. Rodríguez, J. M. Hernández y B. Salgueiro, editorial Deimos, Madrid, 2021, págs. 88–90.

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

El triángulo ABC es rectángulo si y solo si, indicando por a , b y c las longitudes de sus lados, se cumple

$$(2R - a)(2R - b)(2R - c) = 0, \quad (1)$$

esto es,

$$8R^3 - 4R^2(a + b + c) + 2R(ab + bc + ca) - abc = 0.$$

Habida cuenta de que $a + b + c = 2s$, $ab + bc + ca = s^2 + 4Rr + r^2$ y $abc = 4Rrs$,¹ podemos escribir (1) equivalentemente en la forma

$$2R(r^2 + s^2 + 4R^2 - 2rs + 4Rr - 4Rs) = 0,$$

es decir,

$$2R(r - s + 2R)^2 = 0,$$

condición equivalente a su vez a

$$r - s + 2R = 0,$$

como se quería demostrar.

También resuelto por F. D. Aranda, M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, A. Stadler y el proponente.

NOTA. En un comentario al Problema **2874** de *Cruz Mathematicorum*, Walther Janous expone que los resultados de dicho problema son bastante familiares y que se pueden encontrar, junto con otras varias caracterizaciones equivalentes, en [1, 11.26–11.28, pág. 102]. En efecto, aquí podemos leer en particular:

11.27 Dependiendo de que un triángulo sea, respectivamente, acutángulo, rectángulo u obtusángulo, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1^a. $s > 2R + r$, o $s = 2R + r$, o $s < 2R + r$.

2^a. $\sum \sin^2 A > 2$, o $\sum \sin^2 A = 2$, o $\sum \sin^2 A < 2$.

3^a. $\sum a^2 > 8R^2$, o $\sum a^2 = 8R^2$, o $\sum a^2 < 8R^2$.

Bottema et al. [1] remiten a C. Ciamberlini, *Boll. Un. Mat. Ital.* II, Ser. 5 (1943), págs 37–41.

¹Los lados a , b y c de un triángulo son las raíces de la ecuación en z

$$z^3 - 2sz^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)z - 4sRr = 0.$$

Ver este resultado enunciado, por ejemplo, en [1, pág. 72], donde se remite a Ramus y É. Rouché (1851). Se encuentra una prueba en [2, pág. 52].

REFERENCIAS

- [1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
- [2] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić y V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

PROBLEMA 491. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{1 + n^2 \sin^2 x}{1 + n^2 \cos^2 x} dx.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Università degli studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.

El valor del límite solicitado es 1.

Sea k_n el mayor entero tal que $k_n \pi < n$, que verifica $n = k_n \pi + \delta$ con $0 < \delta < \pi$. Evidentemente, denotando por $f_n(x)$ la función en el integrando del límite, tenemos

$$\frac{1}{n^2} \int_0^n f_n(x) dx = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k_n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_n(x) dx + \frac{1}{n^2} \int_{k_n\pi}^n f_n(x) dx.$$

Teniendo en cuenta que f_n es una función π -periódica y aplicando el cambio de variable $\tan x = t$, deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_n(x) dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2(n^2 + 1) + 1}{(t^2 + n^2 + 1)(t^2 + 1)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n^2 + 2}{t^2 + n^2 + 1} dt - \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi \left(\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k_n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n \pi}{n^2} \left(\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \delta}{n^2} \left(\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} - 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalmente, por la positividad de f_n es claro que

$$0 < \int_{k_n\pi}^n f_n(x) dx < \int_0^\pi f_n(x) dx = \pi \left(\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} - 1 \right)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_{k_n\pi}^n f_n(x) dx = 0,$$

con lo que hemos concluido.

También resuelto por S. Betancur, B. Bradie, M. Á. Ingelmo, E. y V. Lanchares (conjuntamente), Kee-Wai Lau, B. Salgueiro, A. Stadler, S. M. Stewart y los proponentes.

PROBLEMA 492. Propuesto por Gregory Dresden, Washington & Lee University, Lexington, VA, EE. UU.

La figura muestra la *epitrocoide* de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + A \cos(5t), \\ y(t) = \sin(2t) + A \sin(5t), \end{cases}$$

para $A = 0.9$. Probar que los tres bucles interiores de la epitrocoide son tangentes entre sí cuando

$$A = \frac{\sqrt{6}}{20} \sqrt{7\sqrt{21} + 27} \approx 0.941399 \dots$$

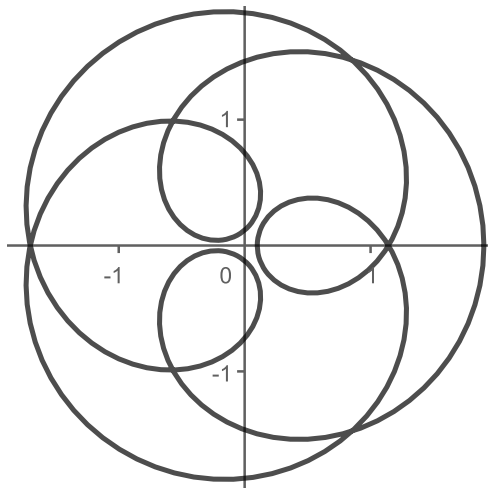


Figura correspondiente al problema 492.

Solución enviada por Ernesto y Víctor Lanchares, Universidad de La Rioja, Logroño.

La curva dada es invariante bajo la acción del grupo diédrico de orden seis. Esto se puede ver fácilmente, ya que, si (x, y) es un punto de la curva, también lo es $(x, -y)$, pues basta cambiar t por $-t$ en las ecuaciones paramétricas. Por otra parte, si (x, y) es un punto de la curva, también lo es dicho punto rotado $2\pi/3$, puesto que

$$\begin{aligned} \cos(2t + 2\pi/3) + A \cos(5t + 2\pi/3) &= \cos(2(t - 2\pi/3)) + A \cos(5(t - 2\pi/3)), \\ \sin(2t + 2\pi/3) + A \sin(5t + 2\pi/3) &= \sin(2(t - 2\pi/3)) + A \sin(5(t - 2\pi/3)). \end{aligned}$$

Además, basta considerar $A > 0$, pues $(x(t; A), y(t; A)) = (x(t + \pi; -A), y(t + \pi; -A))$. Teniendo esto en cuenta, si los tres bucles interiores son tangentes, deben de serlo

en los ejes de simetría, por lo que una condición necesaria para ser tangentes es $y(t) = y'(t) = 0$. Esto nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2t) + A \operatorname{sen}(5t) = 0, \\ 2 \cos(2t) + 5A \cos(5t) = 0. \end{cases}$$

Por las fórmulas de De Moivre

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(5t) &= (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) \operatorname{sen} t, \\ \cos(5t) &= (16 \cos^4 t - 20 \cos^2 t + 5) \cos t, \end{aligned}$$

y el sistema de ecuaciones se puede escribir como

$$\begin{cases} (2 \cos t + A(16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1)) \operatorname{sen} t = 0, \\ 4 \cos^2 t - 2 + 5A(16 \cos^4 t - 20 \cos^2 t + 5) \cos t = 0. \end{cases}$$

Si $\operatorname{sen} t = 0$, resulta $A = 2/5$ cuando $t = \pi$, pero este valor no proporciona una solución válida ya que entonces es $x'(\pi) = 0$, y lo que tenemos es el punto cuspidal $(3/5, 0)$.

Si $\operatorname{sen} t \neq 0$, mediante la sustitución $\cos t = z$ queda el sistema polinómico

$$\begin{cases} 2z + A(16z^4 - 12z^2 + 1) = 0, \\ 4z^2 - 2 + 5A(16z^5 - 20z^3 + 5z) = 0. \end{cases}$$

Igualando las expresiones de A despejadas de ambas ecuaciones, resulta

$$\frac{2z}{16z^4 - 12z^2 + 1} = \frac{4z^2 - 2}{5(16z^5 - 20z^3 + 5z)}$$

que, tras simplificar, queda

$$\frac{2(z^2 - 1)(48z^4 - 12z^2 - 1)}{5(16z^4 - 12z^2 + 1)(16z^5 - 20z^3 + 5z)} = 0.$$

Las soluciones $z = \pm 1$ de esta ecuación se corresponden con valores de t que verifican $\operatorname{sen} t = 0$, posibilidad que ya ha sido descartada. Por tanto solo quedan como posibles soluciones las de la ecuación bicuadrada

$$48z^4 - 12z^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

Así que, por un lado, debe ser

$$z^2 = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{24} \quad (3)$$

y, por otro lado, usando (2),

$$A = \frac{2z}{16z^4 - 12z^2 + 1} = \frac{6z}{4 - 24z^2}.$$

En el segundo miembro de (3) descartamos la raíz cuadrada negativa. Buscamos un valor $A > 0$, lo que deja solamente la posibilidad

$$z = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{24}}.$$

Por tanto,

$$A = \frac{-6\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{24}}}{1 - \sqrt{21}} = \frac{6}{20} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{24}} (\sqrt{21} + 1) = \frac{\sqrt{6}}{20} \sqrt{7\sqrt{21} + 27}.$$

Queda comprobar que para estos valores de A y de $z = \cos t$ se tiene $x'(t) \neq 0$. Volviendo a hacer uso de las fórmulas de De Moivre y de (2) se obtiene

$$x'(t) = -\sin t \frac{z(23 - 228z^2 + 240z^4)}{2 - 12z^2} = -14 \sin t \cos t \neq 0.$$

También resuelto por M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, C. Sacristán, A. Stadler y el proponente.

NOTA. C. Sacristán advierte que hay que corregir el valor decimal aproximado de A del enunciado, que debe ser $0.941366\dots$ y no lo que figura erróneamente.

PROBLEMA 493. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College “Theodor Costescu”, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean x, y y z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Probar que:

$$e^3(e^{-2x} + e^{-2y} + e^{-2z}) + 3e \geq 2(e^x + e^y + e^z).$$

Solución enviada por Miguel Ángel Ingelmo, I. E. S. José Saramago, Arganda Del Rey, Madrid.

Tomando unas nuevas variables α y β tales que

$$x = \beta + 1 + \alpha, \quad y = \beta + 1 - \alpha \quad \text{y} \quad z = 1 - 2\beta,$$

para las que las restricciones $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 3$ implican $-1 < \beta < 1/2$ y $-3/2 < \alpha < 3/2$ (aunque esto último no será necesario en nuestra argumentación), la desigualdad a probar se convierte en

$$2e^{1-2\beta}(\cosh(2\alpha) - 1) - 4e^{1+\beta} \cosh \alpha + e^{1+4\beta} + 3e \geq 0.$$

Ahora, aplicando la identidad $\cosh(2\alpha) = 2 \cosh^2 \alpha - 1$, llegamos a que debe verificarse que

$$4e^{1-2\beta}g(\alpha, \beta) \geq 0,$$

donde

$$g(\alpha, \beta) = \left(\cosh \alpha - \frac{e^{3\beta}}{2} \right)^2 + \frac{3e^{2\beta}}{4} - 1.$$

Si $\log(4/3) \leq 2\beta < 1$, es claro que $g(\alpha, \beta) > 0$. Veamos que si $-2 < 2\beta < \log(4/3)$ se cumple que $g(\alpha, \beta) \geq 0$. En el caso $\beta = 0$, la desigualdad $g(\alpha, 0) \geq 0$ se transforma en

$$\cosh \alpha (\cosh \alpha - 1) \geq 0,$$

que es obviamente cierta por ser $\cosh \alpha \geq 1$. Además, se tiene que $g(\alpha, 0) = 0$ si y solo si $\cosh \alpha = 1$; es decir, $\alpha = 0$ (lo que implica que para $x = y = z = 1$ se alcanza la igualdad en la desigualdad propuesta). Supongamos ahora que $-2 < 2\beta < \log(4/3)$, $\beta \neq 0$ y, buscando un absurdo, que $g(x, y) \leq 0$. En tal caso se cumpliría que

$$\cosh \alpha \leq \frac{e^{3\beta}}{2} + \sqrt{1 - \frac{3e^{2\beta}}{4}}. \quad (4)$$

Sin embargo, se tiene que

$$\frac{e^{3\beta}}{2} + \sqrt{1 - \frac{3e^{2\beta}}{4}} < 1,$$

ya que esta desigualdad es equivalente a

$$(e^\beta - 1)^2(e^{2\beta} + 2e^\beta + 3) > 0,$$

y entonces (4) implicaría $\cosh \alpha < 1$, lo que es absurdo. Por tanto en este caso $g(\alpha, \beta) > 0$.

De este modo hemos probado, además, que la igualdad en la desigualdad propuesta se alcanza si y solo si $x = y = z = 1$.

También resuelto por C. Beade, B. Salgueiro, I. V. Codreanu, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, H. Ricardo, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta y otra incorrecta.

NOTA. Un grupo importante de las soluciones recibidas (entre ellas la del proponente) basan su resolución en la desigualdad de Popoviciu (https://en.wikipedia.org/wiki/Popoviciu%27s_inequality), que establece que para funciones convexas se satisface que

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ \geq \frac{2}{3} \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

En el caso particular del problema que nos ocupa debe aplicarse esta desigualdad a la función $f(x) = e^{2x}$.

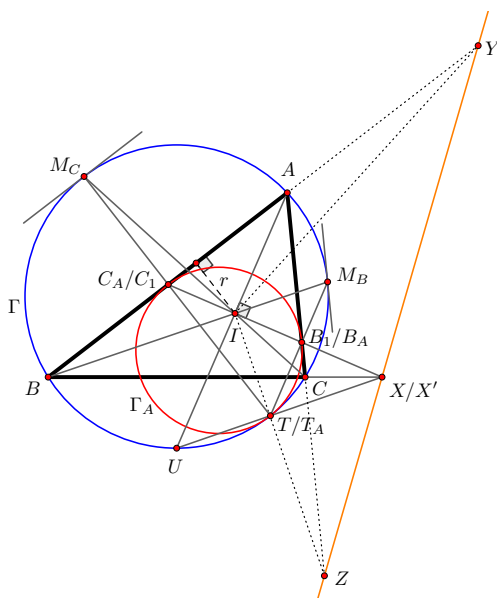


Figura 1: Esquema para la solución del problema 494 (la condición $a < b < c$ no es esencial; basta que el triángulo ABC no sea isósceles).

PROBLEMA 494. *Propuesto por Ricardo Barroso, Sevilla.*

Las longitudes de los lados de un triángulo ABC verifican $a < b < c$ ($a = BC$, etc. cíclicamente). Sean I el incentro del triángulo y r la recta perpendicular a AI por el punto I , y supongamos que r corta a la recta BC en el punto X .

- Calcular las distancias CX y BX en función de a , b y c .
- Sea $U \neq A$ el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo BAC con la circunferencia circunscrita, y supongamos que la recta XU corta de nuevo a esta circunferencia en el punto T . Demostrar que T es el punto de tangencia de la circunferencia circunscrita con la circunferencia que es tangente a los lados AB y AC y que también es tangente interiormente a la circunscrita.
- Se construyen los puntos Y sobre el lado AC y Z sobre el lado AB de manera análoga a como se ha construido X sobre BC . Demostrar que los puntos X , Y y Z están alineados.

Solución enviada por Saturnino Campo Ruiz, Salamanca.

a) Desde aquí, denotaremos con r y s , respectivamente, el inradio y el semiperímetro del triángulo ABC y seguiremos el esquema de la figura 1. Sean B_1 y C_1 los puntos donde la recta perpendicular a AI por el punto I corta a los lados AC y AB ,

respectivamente. En el triángulo rectángulo AC_1I se tiene $\cos(A/2) = AI/AC_1$, y por otra parte es $\sin(A/2) = r/AI$, luego

$$AC_1 = \frac{2r}{\sin A} = \frac{2rbc s}{sbc \sin A} = \frac{bc}{s}, \quad (5)$$

ya que $2sr = bc \sin A$. Ahora, el teorema de Menelao aplicado al triángulo ABC con la transversal IX da la relación

$$\frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{XC}{XB} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1,$$

de donde, aplicando que $B_1A = C_1A$ y (5), resulta

$$\frac{CX}{BX} = \frac{B_1C}{C_1B} = \frac{b - AB_1}{c - AC_1} = \frac{b(s - c)}{c(s - b)}. \quad (6)$$

A partir de (6) (se supone $c > b$),

$$\frac{CX}{b(s - c)} = \frac{BX}{c(s - b)} = \frac{BX - CX}{c(s - b) - b(s - c)} = \frac{a}{s(c - b)},$$

luego

$$CX = \frac{ab(s - c)}{s(c - b)} \quad \text{y} \quad BX = \frac{ac(s - b)}{s(c - b)}.$$

b) Sea Γ_A la circunferencia que es tangente a los lados AB y AC y que es también tangente interiormente a la circunferencia circunscrita Γ (que es conocida como la *circunferencia inscrita mixtilineal* del triángulo ABC correspondiente al vértice A ; ver su construcción en la solución del problema 455 de esta sección, en el volumen 26, número 3 (2023), páginas 530–531). Sea T_A el punto de tangencia entre Γ_A y Γ , y sean respectivamente B_A y C_A los puntos de tangencia de Γ_A con los lados AC y AB . Comenzaremos demostrando una propiedad importante de esta configuración.

LEMA. *El incentro I del triángulo ABC es el punto medio del segmento B_AC_A .*

DEMOSTRACIÓN. Sea M_B , alineado con I y B , el punto medio del arco AC de Γ que no contiene a B , y análogamente M_C , alineado con I y C , el punto medio del arco AB que no contiene a C . Consideremos la homotecia de centro T_A que transforma Γ_A en Γ . Como la tangente a Γ en M_B es paralela a AC , el punto M_B es el homotético del punto B_A en dicha homotecia, así que T_A , B_A y M_B están alineados. Análogamente se concluye que los puntos T_A , C_A y M_C están alineados.

Considerando el hexágono $T_AM_CM_B$ inscrito en la circunferencia Γ , del teorema de Pascal (a saber, los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están sobre una misma recta) se deduce que los puntos I , B_A y C_A están alineados, ya que $I = BM_B \cap CM_C$, $C_A = T_AM_C \cap AB$ y $B_A = T_AM_B \cap AC$. Ahora bien, los triángulos AIC_A y AIB_A son congruentes, ya que el lado AI es común, $AC_A = AB_A$ y $\angle C_AAI = \angle B_AAI$. Por tanto, I es el punto medio del segmento B_AC_A . $\square$

Por el lema anterior el segmento AI forma parte de la mediatriz del segmento $B_A C_A$, y la recta perpendicular a AI por el punto I es la recta $B_A C_A$. De modo que B_A es el punto que se llamaba B_1 en el apartado a), y C_A el punto que se llamaba C_1 .

Veamos finalmente que $T_A = T$. Para ello bastará probar que la recta $T_A U$ pasa por el punto $X = B_1 C_1 \cap BC$:

De nuevo por el teorema de Pascal, aplicado ahora al hexágono $T_A M_C C B A U$ inscrito en Γ , resulta que los puntos

$$I = C M_C \cap AU, \quad C_1 = AB \cap T_A M_C \quad \text{y} \quad X' = BC \cap T_A U$$

están alineados. Dicho de otro modo, las rectas $B_1 C_1$, BC y $T_A U$ concurren en X' . Pero $B_1 C_1 \cap BC = X$. Luego $X' = X$, y en consecuencia $T_A = T$.

c) El mismo razonamiento expuesto en el apartado a) sirve para concluir que

$$\frac{YA}{YC} = \frac{c(s-a)}{a(s-c)} \quad \text{y} \quad \frac{ZB}{ZA} = \frac{a(s-b)}{b(s-a)}.$$

Tenemos ahora

$$\frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{YA}{YC} \cdot \frac{XC}{XB} = \frac{a(s-b)}{b(s-a)} \cdot \frac{c(s-a)}{a(s-c)} \cdot \frac{b(s-c)}{c(s-b)} = 1.$$

Por tanto, los puntos X, Y, Z , en virtud del recíproco del teorema de Menelao, están alineados.

Solución al apartado b) enviada por F. D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España.

Seguiremos el esquema de la figura 2. Vamos a probar en primer lugar que $\angle UTI = \pi/2$. Como quiera que $\angle XCI = \angle XIB = C/2$ y que los ángulos en X son comunes, los dos triángulos XIC y XBI son semejantes, y se verifica

$$\frac{XI}{XC} = \frac{XB}{XI}, \quad \text{luego} \quad XB \cdot XC = XI^2.$$

Por otra parte, los puntos B, C, U y T son concíclicos y (potencia del punto X) se tiene $XU \cdot XT = XB \cdot XC$, de manera que

$$\frac{XI}{XU} = \frac{XT}{XI},$$

lo que implica que los triángulos XTI y XIU son semejantes ya que tienen común el ángulo en X y proporcionales los lados que lo abarcan en ambos. Se sigue que

$$\angle UTI = \angle XTI = \angle XIU = \frac{\pi}{2}.$$

Consideramos ahora la circunferencia ω de centro A y radio $AB_1 = AC_1$, donde B_1 y C_1 (con la misma notación que en la primera solución) son los puntos donde la

por lo que

$$r \underset{r \perp AI}{\equiv} 2bcx - c(a - b + c)y - b(a + b - c)z = 0.$$

Entonces,

$$X = r \cap BC = (0 : b(a + b - c) : -c(a - b + c))$$

y, por tanto,

$$\begin{cases} BX^2 = \frac{a^2 c^2 (a - b + c)^2}{(b - c)^2 (a + b + c)^2}, \\ CX^2 = \frac{a^2 b^2 (a + b - c)^2}{(b - c)^2 (a + b + c)^2}, \end{cases} \implies \begin{cases} BX = \frac{ac(a - b + c)}{|b - c|(a + b + c)}, \\ CX = \frac{ab(a + b - c)}{|b - c|(a + b + c)}. \end{cases}$$

b) Como²

$$\odot(ABC) \equiv c^2 xy + b^2 xz + a^2 yz = 0,$$

resulta que

$$U = AI \cap \odot(ABC) = (-a^2 : b(b + c) : c(b + c)).$$

Además, como según el *lema de Verrièr*,³ la recta (que es la recta r anterior) que pasa por el incentro $I = (a : b : c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior AI corta a los lados AB y CA en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilíneo correspondiente al vértice A , entonces las coordenadas de dichos puntos son

$$B_1 = (a + b - c : 0 : 2c) \quad \text{y} \quad C_1 = (a - b + c : 2b : 0).$$

La ecuación del incírculo mixtilíneo correspondiente al vértice A tendrá la forma

$$a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy - (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0, \quad u, v, w \in \mathbb{R},$$

por lo que, imponiendo que pase por los puntos B_1 y C_1 y sea tangente a la recta CA en el punto B_1 (o a la recta AB en el punto C_1), obtenemos que

$$u = \frac{4b^2 c^2}{(a + b + c)^2}, \quad v = \frac{c^2 (a - b + c)^2}{(a + b + c)^2} \quad \text{y} \quad w = \frac{b^2 (a + b - c)^2}{(a + b + c)^2}$$

y, por tanto, la ecuación de dicho incírculo mixtilíneo queda

$$(a + b + c)^2 (a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy) - \left[4b^2 c^2 x + c^2 (a - b + c)^2 y + b^2 (a + b - c)^2 z \right] (x + y + z) = 0.$$

²La notación $\odot(ABC)$ indica la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

³M. Á. Pérez no da referencia acerca de la denominación de este lema, un resultado geométrico del que en la solución de S. Campo ha quedado proporcionada una prueba.

Las coordenadas del punto T_A de tangencia entre este incírculo mixtilineal y la circunferencia circunscrita al triángulo ABC se determinan por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = (a+b+c)^2 (a^2yz + b^2xz + c^2xy) \\ \quad - \left[4b^2c^2x + c^2(a-b+c)^2y + b^2(a+b-c)^2z \right] (x+y+z), \\ 0 = a^2yz + b^2xz + c^2xy, \end{cases}$$

así que

$$T_A = (-a(a-b+c)(a+b-c) : 2b^2(a+b-c) : 2c^2(a-b+c)).$$

Finalmente, los puntos U , X y T_A están alineados, ya que

$$\begin{vmatrix} -a^2 & b(b+c) & c(b+c) \\ 0 & b(a+b-c) & -c(a-b+c) \\ -a(a-b+c)(a+b-c) & 2b^2(a+b-c) & 2c^2(a-b+c) \end{vmatrix} = 0.$$

c) Con cálculos análogos a los del apartado a) se llega a las coordenadas de los correspondientes puntos

$$Y = (-a(a+b-c) : 0 : c(-a+b+c)) \quad \text{y} \quad Z = (a(a-b+c) : -b(-a+b+c) : 0).$$

Y como se verifica

$$\begin{vmatrix} 0 & b(a+b-c) & -c(a-b+c) \\ -a(a+b-c) & 0 & c(-a+b+c) \\ a(a-b+c) & -b(-a+b+c) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

los puntos X , Y y Z están alineados sobre la recta de ecuación

$$bc(-a+b+c)x + ac(a-b+c)y + ab(a+b-c)z = 0.$$

Este tercer apartado se verifica también si el triángulo ABC es isósceles, ya que:

1. Si el triángulo ABC es isósceles pero no equilátero, cumpliéndose por ejemplo $a \neq b = c$ (en los otros dos casos se razonaría de forma totalmente análoga), entonces por simetría es $CY = BZ$, por lo que las rectas BC e YZ son paralelas. Además, como la recta r también es paralela a BC , entonces, el punto X es el punto del infinito de la recta YZ y, por tanto, los puntos X , Y y Z están alineados.
2. Si el triángulo ABC es equilátero, razonando de igual forma que en el caso anterior, resulta que los puntos X , Y y Z son los puntos del infinito de las rectas BC , CA y AB , respectivamente, por lo que están alineados en la recta del infinito.

No se han recibido otras soluciones.

NOTA. La solución de los apartados a) y c) en la solución de F. D. Aranda es similar a la de S. Campo. Debemos comentar que este problema 494 tuvo su origen en una comunicación personal de Ricardo Barroso con Aranda y Campo, y que fueron estos dos colaboradores quienes nos enviaron en su día las soluciones que a partir de ella habían elaborado independientemente. Una vez propuesto el problema en La Gaceta, volvieron a enviar cada uno una nueva solución, con lo que al final hemos recibido de ellos cuatro soluciones.

Por su parte, M. Á. Pérez anota, aportando una figura que no reproducimos, lo siguiente: según el recíproco del teorema de Pascal, el hecho de que los puntos X , Y y Z están alineados significa que el hexágono $B_1F_CE_CF_BE_BC_1$ (donde los puntos E_B , F_B , E_C y F_C están definidos de forma análoga a como si los puntos B_1 y C_1 se hubieran denotado E_A y F_A) está inscrito en una cónica, siendo

$$\begin{aligned}E_B &= (2a : -a + b + c : 0), \\F_B &= (0 : a + b - c : 2c), \\E_C &= (0 : 2b : a - b + c), \\F_C &= (2a : 0 : -a + b + c),\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de dicha cónica es

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} -2bc(-a+b+c) & c(3ab-S_C) & b(3ac-S_B) \\ c(3ab-S_A) & -2ac(a-b+c) & a(3bc-S_A) \\ b(3ac-S_B) & a(3bc-S_A) & -2ab(a+b-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

(donde se usa la notación de Conway $S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2$, etcétera, cíclicamente). Se puede comprobar que esta es la ecuación de una elipse: se trata de una cónica no degenerada, ya que

$$\begin{vmatrix} -2bc(-a+b+c) & c(3ab-S_C) & b(3ac-S_B) \\ c(3ab-S_A) & -2ac(a-b+c) & a(3bc-S_A) \\ b(3ac-S_B) & a(3bc-S_A) & -2ab(a+b-c) \end{vmatrix} = 32abcs^4[a(s-a) + b(s-b) + c(s-c)] \neq 0$$

y su discriminante, que es $\Delta = -8s^4[a(s-a) + b(s-b) + c(s-c)]$, es negativo. El centro de esta elipse (punto conjugado de la recta del infinito) es el incentro I del triángulo ABC .

PROBLEMA 495. *Propuesto por Mihaly Bencze, Braşov, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Determinar las soluciones reales de la ecuación

$$\begin{aligned}\log_4 \left(\frac{\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x}}{2 + \sqrt[4]{x-2}} \right) + \sqrt{x-1} + 2\sqrt[4]{-x^2+4x-3} (1 + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}) \\ + \sqrt{3-x} + 6\sqrt{-x^2+4x-3} \\ = 16 + 36\sqrt[4]{x-2} + 25\sqrt{x-2} + x + 8\sqrt[4]{(x-2)^3}.\end{aligned}$$

Solución enviada por Rousen Pirgulyev.

Veamos que $x = 2$ es la única solución de la ecuación propuesta. Es sencillo comprobar que, efectivamente, $x = 2$ es solución. Comprobemos la unicidad.

Para que la ecuación esté bien definida sobre los reales es necesario que $x \in [2, 3]$ y en ese caso puede reescribirse como

$$f(2 + \sqrt[4]{x-2}) = f(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x}), \quad (7)$$

siendo

$$f(x) = \log_4 x + x^2 + x^4.$$

Observando que

$$f'(x) = \frac{1}{x \log 4} + 2x + 4x^3 > 0, \quad x > 0,$$

deducimos que la función f es inyectiva en $(0, \infty)$ y, por tanto, la ecuación (7) se verificará si y solo si

$$2 + \sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x}. \quad (8)$$

Ahora, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} &= \sqrt[4]{(x-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} + \sqrt[4]{(x-3) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \\ &\leq \frac{x-1+1+1+1}{4} + \frac{3-x+1+1+1}{4} = 2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que (8) solo puede ocurrir si $\sqrt[4]{x-2} \leq 0$, lo que implica que $x = 2$ es la única solución posible de la ecuación dada.

También resuelto por M. Á. Ingelmo, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 496. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioculescu School, Găești, Rumanía.*

Sea $M_n(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con entradas complejas. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible para la que existen $k \in \mathbb{N}$ impar y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $A^k = \alpha I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n . Si $B \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz para la que existe $\ell \in \mathbb{N}$ que verifica

$$A^{\ell+1} = \frac{1}{2^\ell} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} A^k B A^{\ell-k},$$

probar que $A = B$.

Solución enviada por Alberto Elduque, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Denotemos por L_A, R_A los endomorfismos de $M_n(\mathbb{C})$ dados por $L_A(X) = AX$ y $R_A(X) = XA$. La asociatividad del producto de matrices nos asegura que L_A y R_A conmutan. La ecuación dada se puede escribir entonces como

$$(L_A + R_A)^\ell(A) = (L_A + R_A)^\ell(B),$$

por lo que basta ver que el endomorfismo $L_A + R_A$ es invertible.

Por otro lado, como el polinomio mínimo de A divide a $x^k - \alpha$, cuyas raíces son distintas (A es invertible, luego $\alpha \neq 0$), A es diagonalizable y sus valores propios son las raíces k -ésimas de α . En particular, si μ es valor propio, $-\mu$ no lo es, por ser k impar. Es decir, la suma de dos valores propios (iguales o no) siempre es no nula.

Podemos suponer, por tanto, que A es diagonal; es decir, $A = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Si E_{ij} es la matriz con 1 en la posición (i, j) y ceros en el resto, se tiene

$$(L_A + R_A)E_{ij} = (\mu_i + \mu_j)E_{ij}.$$

Concluimos que $L_A + R_A$ es diagonalizable con valores propios no nulos y, en consecuencia, es invertible, como deseábamos.

También resuelto por el proponente.

NOTA. En la propuesta original se daba erróneamente la identidad

$$A^{\ell+1} = \frac{1}{2^\ell} \sum_{k=0}^n \binom{\ell}{k} A^k B A^{\ell-k},$$

lo que aparece corregido en la solución recibida. En un comentario enviado por M. Á. Ingelmo se observa, mediante varios contraejemplos, que en caso de tenerse la identidad anterior el resultado es falso.