
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico oscar.ciaurri@unirioja.es en archivos con formato $\text{T}_\text{E}\text{X}$. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2026.

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco () junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.*

Problemas

PROBLEMA 521. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College “Theodor Costescu”, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Determinar $x, y, z \in (0, \infty)$ tales que

$$18 + \frac{27x^3}{(y+3)(z+3)} + \frac{27y^3}{(z+3)(x+3)} + \frac{27z^3}{(x+3)(y+3)} = 7(x+y+z).$$

PROBLEMA 522. *Propuesto por Marian Ursărescu, “Roman-Vodă” National College, Roman, Rumanía.*

Probar que en todo triángulo ABC se cumple la desigualdad

$$\frac{m_a}{\tan^4 \frac{B}{2}} + \frac{m_b}{\tan^4 \frac{C}{2}} + \frac{m_c}{\tan^4 \frac{A}{2}} \geq \frac{(8R - 7r)^2}{r},$$

donde A , B y C representan las medidas de los ángulos, r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, y m_a , m_b y m_c las longitudes de las medianas que parten, respectivamente, de los vértices A , B y C .

PROBLEMA 523. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean M y N los puntos de intersección de los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O y radio R . Probar que

$$\cos(\angle MON) = \frac{R^2}{OM \cdot ON}.$$

PROBLEMA 524. *Propuesto por Vasile Cîrtoaje, Petroleum & Gas University of Ploiesti, Ploiesti, Rumanía.*

Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales tales que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ y $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Para $n \geq 3$, probar que

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1) \geq 3n.$$

PROBLEMA 525. *Propuesto por Paolo Perfetti, Università degli studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sean $a, p \in \mathbb{R}$ tales que $|p| < 1$ y $0 < a < \pi$. Calcular

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} \frac{\operatorname{sen}(px)}{x^2 - a^2} dx.$$

PROBLEMA 526. *Propuesto por Ovidiu Furdul y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Para cada $\alpha > -3$, calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^\alpha \sqrt[n]{\left| \arctan x - x + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right|} dx.$$

PROBLEMA 527. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $0 < a \leq b < 1$ y $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Probar que

$$\int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2} f(x) dx \left(\int_0^{\sqrt{ab}} f(x) dx + \int_0^{\sqrt{(a+b)/2}} f(x) dx \right) \leq 2 \int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2} x f(x) dx.$$

PROBLEMA 528. *Propuesto por Neculai Stanciu, Buzău, y Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía. In memoriam de Titu Zvonaru (1953-2025).*

Sean $a, b, c > 0$ y $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq m < 1 \leq n$. Probar que

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cíclica}} \frac{a^2}{(ma + b + c)(na + b + c)} &\geq \frac{3}{(m+2)(n+2)} \\ &+ \frac{n-1}{(n-m)(n+2)} \sum_{\text{cíclica}} \frac{(a-b)^2}{(na + b + c)(a + nb + c)}. \end{aligned}$$

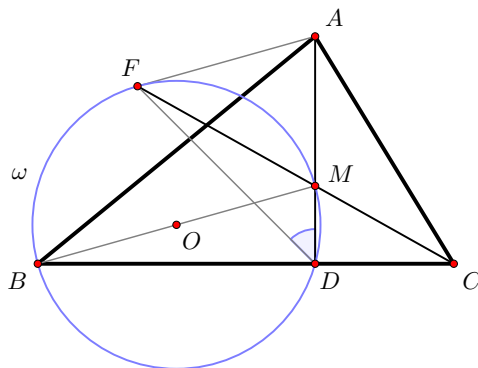


Figura 1: Esquema para la solución del problema 497.

Soluciones

PROBLEMA 497. *Propuesto por Joaquim Nadal, Llagostera, Girona.*

En un triángulo ABC , el punto D es el pie de la altura correspondiente al vértice A . La bisectriz interior del ángulo ACB corta a la recta AD en el punto M , y a la circunferencia ω circunscrita al triángulo BDM en un segundo punto F . Si $\angle ADF = \pi/4$, probar que la recta AF es tangente a la circunferencia ω .

Solución enviada por César Beade, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Tomamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares con origen en el punto $D = (0, 0)$ y ponemos en principio $B = (-1, 0)$, $A = (0, a)$, $C = (c, 0)$ y $M = (0, m)$ (ver la figura 1). Vamos a llegar a expresar c y a en función de m .

Es fácil determinar la ecuación de ω , ya que por ser $\angle MDB = \pi/2$, el segmento BM es un diámetro de la misma y resulta $\omega \equiv x^2 + y^2 + x - my = 0$. Como $\angle ADF = \pi/4$, la ecuación de la recta DF es $x + y = 0$, y se sigue que

$$F = \left(-\frac{1+m}{2}, \frac{1+m}{2} \right).$$

De modo que la ecuación de la recta FM es $x/(1+m) = (y-m)/(m-1)$, lo que permite calcular, por intersección de las rectas BD y FM , la abscisa del punto C , que es $c = m(1+m)/(1-m)$. Usamos ahora que CM es la bisectriz del ángulo ACB . Llamando $\alpha = \angle MCD$, tenemos $\tan \alpha = MD/DC = (1-m)/(1+m)$, luego

$$\tan(\angle ACB) = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1 - m^2}{2m}$$

y entonces

$$AD = DC \cdot \tan(\angle ACB) = \frac{1}{2}(1+m)^2,$$

lo que implica $a = (1+m)^2/2$. Finalmente, siendo $O = (-1/2, m/2)$ el centro de ω , el producto escalar

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FO} = \left(-\frac{1+m}{2}, -\frac{m(1+m)}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0,$$

por tanto nos da que AF es tangente a ω por ser perpendicular al radio OF .

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, M. Á. Pérez, J. Polo y B. Salgueiro.

NOTA. La solución de Salgueiro es muy similar a la publicada. La solución de Pérez usa coordenadas baricéntricas.

PROBLEMA 498. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a > 1$ y b números reales. Determinar todas las funciones $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tales que $f(ax+b) = a^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución enviada por Fernando Madrid Martínez y Daniel Tormos Esbert (estudiantes), Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Vamos a demostrar que, siendo $p = b/(1-a)$,

$$f(x) = c(x-p)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Resulta evidente que estas funciones satisfacen las condiciones del enunciado y vemos que son las únicas que lo hacen.

Si derivamos dos veces la relación $f(ax+b) = a^2 f(x)$ y utilizamos que $a \neq 0$, llegamos a que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las relaciones

$$f'(ax+b) = af'(x) \quad (2)$$

y

$$f''(ax+b) = f''(x). \quad (3)$$

Consideremos la transformación lineal $T(x) = ax+b$ y su inversa $Q(x) = (x-b)/a$, cuyo único punto fijo es p . Tomando $x = p$ en $f(ax+b) = a^2 f(x)$ y en (2) obtenemos $f(ap+b) = a^2 f(p)$ y $f'(ap+b) = af'(p)$. Ahora, usando que p es punto fijo de T , deducimos que $f(p) = a^2 f(p)$ y $f'(p) = af'(p)$ y, como $a \neq \pm 1$, se cumple que

$$f(p) = f'(p) = 0. \quad (4)$$

Por otro lado, veamos que todas las funciones continuas g tales que $g(x) = g(ax + b)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ son constantes. Dichas funciones cumplen que $g(Q(x)) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$g(x) = g(Q^n(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

donde Q^n indica composición iterada. Como el valor absoluto de la derivada de Q es $1/a < 1$, Q es contractiva. Luego, fijando $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, la sucesión $x_n = Q^n(x_0)$ tiende a p , único punto fijo de Q . Tomando límite en (5) y usando que g es continua, se obtiene

$$g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(Q^n(x_0)) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n(x_0)\right) = g(p).$$

Dado que x_0 es arbitrario, concluimos que $g(x) = g(p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como f'' cumple (3) y es continua, el razonamiento anterior nos asegura que es constante y, por tanto, f es un polinomio de segundo grado y, además, por (4) sabemos que p es raíz doble de f . Resumiendo, hemos probado que si f cumple las condiciones del enunciado, entonces f toma la forma dada en (1).

Por último, observamos que la demostración propuesta permite relajar las condiciones del enunciado sobre a , suponiendo solo que $a \neq -1, 0, 1$. En efecto, la condición $a > 1$ se ha usado solo para demostrar que Q es contractiva. Sin embargo, si $0 < a < 1$ es la función T la que sería contractiva, así que la sucesión x_n podría definirse en términos de iteradas de T y el argumento seguiría siendo válido. Si $a < -1$ o $-1 < a < 0$ las funciones Q y T , respectivamente, mantendrían su carácter contractivo, pues esto solo depende del valor absoluto de la derivada, y permitirían llegar a la misma conclusión.

También resuelto por S. J. Álvarez, A. Castillo (estudiante), J. Duoandikoetxea, M. Fernández, J. Gómez, M. Á. Ingelmo, J. Polo, J. Ráñez, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

NOTA. En la solución enviada por J. Ráñez se observa que si $a = 0$, la condición dada se transforma en $f(b) = 0$ y, en este caso, hay múltiples funciones que satisfacen esta condición. De hecho, dada cualquier $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, la función $f(x) = h(x) - h(b)$ la verifica. Además, para $a = 1$ la condición sobre f pasa a ser $f(x + b) = f(x)$ que es una cuestión de periodicidad y para $a = -1$ se transforma en $f(-x + b) = f(x)$ y, ya que $-(-x + b) + b = x$, esta condición solo nos dice que la función f es simétrica respecto al valor $b/2$.

Finalmente, el propio J. Ráñez también comenta que si se consideran funciones $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ tales que $f(ax + b) = a^n f(x)$, con $a \neq -1, 0, 1$, se puede probar que las únicas funciones que cumplen estas condiciones son de la forma $f(x) = c(x - p)^n$, donde p es como en la solución publicada.

PROBLEMA 499. *Propuesto por M. Lawrence Glasser, Clarkson University, Potsdam, NY, EE. UU.*

Para $n = 1, 2, \dots$, evaluar la integral

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\left(\frac{\sin(3t)}{\cos t \cos(2t)}\right)^{2n}\right) \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

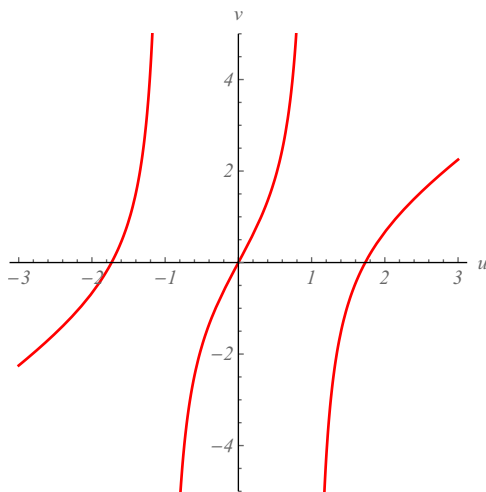


Figura 2: Representación gráfica de la función f del problema 499.

Solución enviada por Albert Stadler, Herliberg, Suiza, modificada por los editores.

Probaremos que $I_n = \Gamma(1/2n)/n$.

El cambio de variable $u = \tan t$, como

$$\frac{\operatorname{sen}(3t)}{\cos t \cos(2t)} = \frac{u(u^2 - 3)}{u^2 - 1},$$

nos da

$$I_n = \int_{-\infty}^{-1} \exp\left(\left(\frac{u(u^2 - 3)}{u^2 - 1}\right)^{2n}\right) du + \int_{-1}^1 \exp\left(\left(\frac{u(u^2 - 3)}{u^2 - 1}\right)^{2n}\right) du + \int_1^{\infty} \exp\left(\left(\frac{u(u^2 - 3)}{u^2 - 1}\right)^{2n}\right) du.$$

La función $f(u) = u(u^2 - 3)/(u^2 - 1)$ es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$ y, además,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow -1^-} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = -\infty$$

y

$$\lim_{u \rightarrow -1^+} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty.$$

Una representación de la función f puede verse en la figura 2. Por tanto, la ecuación $f(u) = v$ tendrá tres soluciones distintas para cada $v \in \mathbb{R}$, que denotaremos por $u_1(v)$, $u_2(v)$ y $u_3(v)$, y se verificará que

$$dv = f'(u) du = \frac{u^4 + 3}{(u^2 - 1)^2} du.$$

De este modo,

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2n}} \sum_{i=1}^3 \frac{(u_i^2(v) - 1)^2}{u_i^4(v) + 3} dv.$$

Probando que

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(u_i^2(v) - 1)^2}{u_i^4(v) + 3} = 1, \quad (6)$$

tendremos que

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2n}} dv = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^{2n}} dv = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-w} w^{1/2n-1} dw = \frac{\Gamma(\frac{1}{2n})}{n}$$

y habremos concluido.

Veamos una prueba de (6). La ecuación $f(u) = v$ puede escribirse como

$$0 = u^3 - vu^2 - 3v + v = (u - u_1(v))(u - u_2(v))(u - u_3(v))$$

y, por las fórmulas de Cardano-Vieta, se verificará que

$$u_1(v) + u_2(v) + u_3(v) = v.$$

Como $du_i/dv = (u_i^2(v) - 1)^2/(u_i(v)^4 + 3)$, deducimos que

$$1 = \frac{d}{dv} (u_1(v) + u_2(v) + u_3(v)) = \sum_{i=1}^3 \frac{(u_i^2(v) - 1)^2}{u_i^4(v) + 3}$$

y (6) queda demostrada.

También resuelto por B. Salgueiro, S. M. Stewart y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Las restantes soluciones recibidas utilizan el denominado *Glasser's master theorem*. Este afirma que si g es una función integrable sobre \mathbb{R} (en sentido impropio de Riemann) y $a, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ con $k = 1, \dots, n$ y $a_k > 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} g \left(x - a - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x - b_k} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

Tras el cambio de variable inicial, puesto que la función f de la solución presentada puede escribirse como

$$f(u) = u - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1},$$

la integral propuesta (por el propio Glasser) se corresponde a tomar $g(x) = e^{-x^{2n}}$, $a = 0$, $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = 1$ y $b_2 = -1$ en este teorema.

Este resultado puede encontrarse en el artículo de L. M. Glasser, A remarkable property of definite integrals, *Math. Comp.* **40** (1983), 561–563. La idea fundamental de la demostración dada en este artículo es la misma que hemos aplicado en la solución presentada para probar la identidad (6).

Las coordenadas del punto M son $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ y, por tanto, las de P son $(2r \cos \phi, 2r \sin \phi)$. Puesto que $P = (x, y)$ pertenece a la hipotenusa del triángulo, se verifica la ecuación $x/a + y/b = 1$, es decir,

$$\frac{2r \cos \phi}{a} + \frac{2r \sin \phi}{b} = 1,$$

de donde obtenemos que $r = ab/(2(a \sin \phi + b \cos \phi))$, lo que nos permite escribir el área del triángulo en función solo de ϕ como

$$A_T(\phi) = \frac{a^2 b^2}{4 \sin(2\phi)(a \sin \phi + b \cos \phi)^2}.$$

Usando que $\sin(\phi + \beta) = \sin \phi \cos \beta + \sin \beta \cos \phi = (a \sin \phi + b \cos \phi)/\sqrt{a^2 + b^2}$, reescribimos

$$A_T(\phi) = \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2) \sin(2\phi) \sin^2(\phi + \beta)}.$$

Ya que es $A_T(\phi) > 0$, para obtener su valor mínimo basta estudiar el valor máximo de la función

$$f(\phi) = \sin(2\phi) \sin^2(\phi + \beta).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= 2 \sin(\phi + \beta)(\cos(2\phi) \sin(\phi + \beta) + \sin(2\phi) \cos(\phi + \beta)) \\ &= \sin(\phi + \beta) \sin(3\phi + \beta), \end{aligned}$$

por tanto $f'(\phi) = 0$ si y solo si $\sin(\phi + \beta) = 0$ o $\sin(3\phi + \beta) = 0$. Como $0 < \phi + \beta < \pi$, hay que descartar la primera posibilidad. Dentro de la segunda, como $0 < 3\phi + \beta < 2\pi$, solo cabe que $3\phi + \beta = \pi$. Sea $\phi_0 = (\pi - \beta)/3$. Es inmediato comprobar que $\phi_0 \in (\alpha/2, \alpha/2 + \pi/4)$. Por tanto, $f'(\phi)$ tiene un único cero, ϕ_0 en el intervalo $(\alpha/2, \alpha/2 + \pi/4)$. Puesto que f' es positiva en $(\alpha/2, \phi_0)$ y negativa en $(\phi_0, \alpha/2 + \pi/4)$, $f(\phi_0)$ es el máximo absoluto de $f(\phi)$ en dicho intervalo. Equivalentemente, queda demostrado que $A_T(\phi_0)$ es el mínimo absoluto de $A_T(\phi)$. Usando que $ab/(a^2 + b^2) = \sin \beta \cos \beta$, este valor se puede escribir como

$$A_{\min} = \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2) \sin(2\phi_0) \sin^2(\phi_0 + \beta)} = \frac{ab \sin(2\beta)}{8 \sin \frac{2(\pi - \beta)}{3} \sin^2 \left(\frac{\pi + 2\beta}{3} \right)}.$$

Solución del proponente.

Quisimos celebrar la que hace el número 500 de las propuestas de esta sección con algo especial, buceando en la literatura matemática un poco «descatalogada», como hemos hecho en otras ocasiones. Tuvimos la suerte de encontrar por pura casualidad el artículo [1], que firmaba en 1942 el profesor de la Universidad de Michigan Carl Jennes Coe (1886-1976), y de allí sacamos este quingentésimo enunciado. Su solución proporcionaba un buen ejemplo de la interpretación geométrica de un problema de

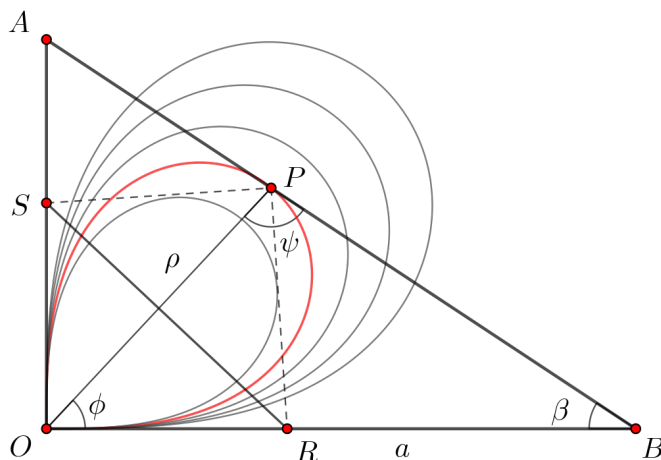


Figura 4: Esquema para la segunda solución del problema 500.

optimización de una función de dos variables sujetas a una condición. No vamos a transcribir la solución completa, sino solo el final de la misma, con la idea clave que abrevia el cálculo. Escribimos en cursiva nuestra versión del texto original.

Coe denominaba ρ a la distancia OP y u al área del triángulo ORS y, dejando escrita la ecuación (7) de arriba en la forma

$$\rho^2 = 4u \operatorname{sen}(2\phi),$$

venía a considerarla como la ecuación en coordenadas polares (ρ, ϕ) de la familia de lemniscatas *trazadas por el punto P cuando el área u permanece constante*. Pero P debe estar en la hipotenusa AB del triángulo y el valor mínimo del parámetro u en ese contexto se obtendrá cuando la lemniscata correspondiente sea tangente en P a la hipotenusa (ver la figura 4).

Es una propiedad familiar de estas lemniscatas que el ángulo ψ que la tangente en un punto forma con el radio vector ρ es el doble del ángulo polar ϕ . Del triángulo OPB se tiene, entonces,

$$3\phi + \beta = \pi, \quad \frac{\rho}{\operatorname{sen}(3\phi)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(2\phi)},$$

donde $\tan \beta = b/a$. Se sigue que $\phi = \frac{1}{3}(\pi - \beta)$ y el valor mínimo deseado de u es

$$u = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(3\phi)}{4 \operatorname{sen}^3(2\phi)}.$$

En particular. . . , para un caso numérico sencillo con datos y solución racionales, tómese $a = 36/11$ y $b = 16/13$. Se obtiene $OR = 1$ y $u = 3/8$.

También resuelto por J. Gómez y M. Á. Ingelmo. Se ha recibido una solución incompleta y un comentario por B. Salgueiro.

NOTA. Fernández López envía también el resultado de su investigación sobre el problema y las soluciones del mismo publicadas o accesibles en internet. Lo encuentra, *aunque sin solución general*, como él dice, en [2, 3.3] de Paul J. Nahin. France Dacar, recoge el reto de Nahin, *expresando el área en función de $t = \tan \phi$ y termina el problema resolviendo una ecuación cúbica en t* . Estas dos primeras referencias también nos las señala Salgueiro en su comentario. Además, sigue diciendo Fernández López, M. D. Hirschhorn [4] *resuelve el problema usando varios cambios de variable ingeniosos que simplifican la expresión del área del triángulo y, por tanto, su análisis. Su solución, como la nuestra, estudia el mínimo de A_T analizando el máximo de $1/A_T$* . Por otra parte, Dacar termina su artículo [3], que no contiene referencias, con el que podríamos ahora llamar «método de las lemniscatas» de Coe.

De las otras soluciones recibidas, la de Gómez Ayala es del mismo tipo que la primera de las citadas de Dacar, mientras que la solución de Ingelmo es muy similar a la publicada de Fernández López.

REFERENCIAS

- [1] C. J. COE, Problems on maxima and minima, *Amer. Math. Monthly* **49** (1942), 33–37.
- [2] P. J. NAHIN, *When least is best: how mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible*, Princeton University Press, 2004.
- [3] F. DACAR, The envelope-folding problem from Paul J. Nahin's "When least is best", 2009. <https://dis.ijs.si/france/notes/envelope-folding.pdf>
- [4] M. D. HIRSCHHORN, A triangle folding problem, *Math. Gaz.* **95** (2011), 514–517.

PROBLEMA 501. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determinar todas las matrices $A \in \mathcal{M}$ tales que

$$A^4 + 4A^2 + I_2 = 3(A^3 + A),$$

donde I_2 denota la matriz identidad de orden dos.

Solución enviada, independientemente, por A. Arenas y Á. Sanz (estudiante), Universidad de La Rioja, Logroño; A. Elduque, Universidad de Zaragoza, Zaragoza; J. Duoandikoetxea, Vizcaya; M. I. Garrido, Universidad Complutense de Madrid,

Madrid; H. Ricardo, Westchester Area Math Circle, Purchase, NY, EE. UU.; y J. Vinuesa, Universidad de Cantabria, Santander.

Puesto que \mathcal{M} es isomorfo, como anillo, al cuerpo de los números complejos \mathbb{C} mediante la aplicación

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

el problema se reduce a calcular las raíces complejas del polinomio

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = (z - 1)^2(z^2 - z + 1).$$

Puesto que las raíces de este polinomio son $z = 1$ (doble) y $z = (1 \pm i\sqrt{3})/2$, las matrices solicitadas son la identidad I_2 ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

También resuelto por A. Arenas y Á. Sanz (una segunda solución), B. Bradie, J. Duoandikoetxea (una segunda solución), M. Fernández, M. Á. Ingelmo, J. Polo, J. Rández, B. Salgueiro, A. Stadler, S. M. Stewart, D. Văcaru y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

NOTA. En una parte importante de las soluciones recibidas para este problema se utiliza una gran variedad de argumentos algebraicos (estudio de determinantes, análisis del polinomio mínimo, etc.); otras, sin embargo, optan por un argumento que podríamos denominar de «fuerza bruta»: calcular las correspondientes potencias de la matriz A y reducir la resolución al estudio de un sistema no lineal en a y b .

PROBLEMA 502. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sintămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots \right) - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Solución elaborada por los editores a partir de las enviadas, independientemente, por Miguel Ángel Ingelmo, I. E. S. José Saramago, Arganda del Rey, Madrid, y Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Denotando por S la suma a evaluar, probaremos que $S = (4 \log 2 - 1)/24$.

Sean $f_n = 1/n - 1/(n+1) + 1/(n+2) - \cdots$, $S_m = (f(1) - 1/2)^2 + (2f(2) - 1/2)^2 + \cdots + (mf(m) - 1/2)^2$ y

$$U_m = \frac{m}{12} + \frac{\log 2}{6} - \left(\frac{m(m+1)}{3} + \frac{1}{6} \right) f_{m+1} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} f_{m+1}^2.$$

En primer lugar, probaremos, por inducción, que $S_m = U_m$. Como $f_1 = \log 2$ y $f_2 = 1 - \log 2$, tendremos

$$U_1 = \log^2 2 - \log 2 + \frac{1}{4} = \left(\log 2 - \frac{1}{4}\right)^2 = S_1.$$

Ahora, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} S_m &= S_{m-1} + \left(mf_m - \frac{1}{2}\right)^2 = U_{m-1} + \left(mf_m - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{m+2}{12} + \frac{\log 2}{6} - \left(\frac{m(m+2)}{3} + \frac{1}{6}\right)f_m + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}f_m^2 \end{aligned}$$

y aplicando la identidad $f_m = 1/m - f_{m+1}$ concluimos la identidad buscada.

De este modo,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{m \rightarrow \infty} U_m = \frac{\log 2}{6} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{12} - \frac{m(m+1)}{3}f_m + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}f_{m+1}^2 \right) \\ &= \frac{\log 2}{6} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \left(f_{m+1} - \frac{1}{2m+1} \right)^2 - \frac{m}{12(2m+1)} \right) \\ &= \frac{\log 2}{6} - \frac{1}{24} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \left(f_{m+1} - \frac{1}{2m+1} \right)^2 \end{aligned}$$

y viendo que este último límite es cero habremos concluido. Para ello basta probar que $f_m = 1/(2m) + O(1/m^2)$. Comprobemos este hecho. En el caso $m = 2k + 1$ tenemos la identidad

$$f_{2k+1} = \log 2 + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j}{j} = \log 2 - \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$$

y el resultado se obtiene usando que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. En efecto,

$$f_{2k+1} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{4k+2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Para concluir la estimación para $m = 2k$ es suficiente aplicar la relación $f_{2k} = 1/(2k) - f_{2k+1}$.

También resuelto por S. Betancur, B. Bradie, M. Fernández, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler, S. M. Stewart, A. Zapater y los proponentes.

NOTA. La mayoría de las restantes soluciones recibidas establece una de las identidades

$$S = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)(1-y)(1-xy)}{(1+x)(1+y)(1-xy)^3} dx dy$$

o

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(1+x)^2(1+y)^2(1-xy)} dx dy$$

y obtienen el resultado evaluando de manera apropiada las integrales a las que se ha reducido la suma.

PROBLEMA 503. *Propuesto por Shivam Sharma, Universidad de Deli, Nueva Deli, India.*

Para cada $x > 0$, evaluar el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+x+1}{n+x} \right)^n e^{\frac{2x-2n+1}{2n}}.$$

Solución enviada por Brian Bradie, Christopher Newport University, Newport News, VA, EE. UU.

Denotaremos por P el producto infinito y por P_N el N -ésimo producto parcial. Si H_N es el N -ésimo número armónico, resulta evidente que

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{(N+x+1)^N}{\prod_{n=1}^N (n+x)} e^{(x+1/2)H_N-N} \\ &= \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(N+x+1)} N^N \left(1 + \frac{x+1}{N} \right)^N e^{(x+1/2)H_N-N}. \end{aligned}$$

Por la equivalencia de Stirling

$$\begin{aligned} \Gamma(N+x+1) &\sim \sqrt{2\pi} (N+x)^{N+x+1/2} e^{-N-x} \\ &= \sqrt{2\pi} N^{N+x+1/2} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^{N+x+1/2} e^{-N-x} \end{aligned}$$

y usando que $H_N \sim \log N + \gamma$, siendo γ la constante de Euler-Mascheroni, tenemos

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \frac{\Gamma(x+1)e^{(x+1/2)\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^N \left(1 + \frac{x+1}{N} \right)^N N^{x+1/2} e^{-N}}{N^{N+x+1/2} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^{N+x+1/2} e^{-N-x}} \\ &= \frac{\Gamma(x+1)e^{(x+1/2)\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+1}{N} \right)^N}{\left(1 + \frac{x}{N} \right)^{N+x+1/2} e^{-x}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N+x+1/2} = e^x \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{N}\right)^N = e^{x+1},$$

concluimos que

$$P = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{x+1+(x+1/2)\gamma}.$$

También resuelto por P. Bracken, A. Castillo (estudiante), K. Farid, M. Fernández, M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, A. Stadler y el proponente.

NOTA. B. Salgueiro nos hace llegar un comentario en el que observa que la misma cuestión fue propuesta como Problema 11612 en la revista *The American Mathematical Monthly*, vol. 118 (2011), pág. 937. El proponente era Pablo Fernández Refolio. Las soluciones en esa revista pueden verse en el vol. 120 (2013), págs. 574–576. La solución remitida por P. Bracken es la que entonces envió a dicha revista.

PROBLEMA 504. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, ADA University, Bakú, Azerbaiyán.*

Sean A y B , respectivamente, puntos en los lados CD y CE de un triángulo CDE isósceles ($CD = CE$) para los cuales se cumple

$$\tan(\angle CDE) = \tan(\angle CED) = \left(\frac{AK + BL}{KL}\right)^{1/3},$$

donde K y L son, respectivamente, las proyecciones ortogonales de los puntos A y B sobre el lado DE . Sea J el punto de intersección de las rectas AB y DE . Probar que si $AK > BL$, entonces $AJ \geq CD$.

Solución enviada (independientemente) por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China, y Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $DE = 2$. Sea $m := \tan(\angle CDE) > 0$, $D = (-1, 0)$, $E = (1, 0)$, $K = (-k, 0)$ y $L = (\ell, 0)$ (ver la figura 5), donde $0 < k, \ell < 1$ y $k \neq \ell$. Con esto, se tiene

$$C = (0, m), \quad A = (-k, m(1-k)), \quad B = (\ell, m(1-\ell)), \quad J = \left(\frac{k+\ell-2k\ell}{\ell-k}, 0\right)$$

y, como es

$$m^3 = \frac{AK + BL}{KL} = \frac{m(2-k-\ell)}{\ell+k},$$

resulta $m^2 = (2-k-\ell)/(\ell+k)$. Se supone $AK > BL$, así que $\ell > k$, y se sigue de manera sencilla que

$$AJ^2 - CD^2 = \frac{2k^2(2-k-\ell)(3\ell-2k\ell-k)}{(k+\ell)(\ell-k)^2},$$

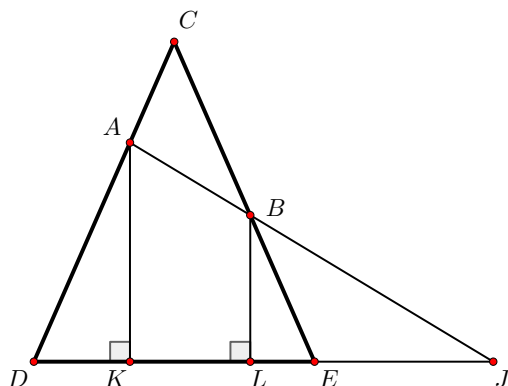


Figura 5: Esquema para la solución del problema 504.

una fracción claramente positiva, ya que

$$3\ell - 2k\ell - k = \ell(3 - 2k) - k > k(3 - 2k) - k = 2k(1 - k) > 0.$$

Por tanto, $AJ > CD$.

También resuelto por M. Á. Ingelmo, M. Á. Pérez, F. Madrid y D. Tormos (estudiantes), B. Salgueiro y el proponente.

NOTA. Salvo las publicadas y la del proponente, el resto de las soluciones recibidas usan en algún momento cálculo diferencial. La solución de Pérez usa además coordenadas baricéntricas. Ingelmo aclara que la igualdad $AJ = CD$ solo es posible cuando el punto A coincide con C , con lo que la recta AB va a coincidir con el lado CE y el punto J es E . Aliyev añade que entonces ha de ser $\angle CDE = \pi/4$ para cumplir el enunciado; este caso extiende la solución publicada, en la que $k = 0$ y $\ell = 1$ eran valores excluidos.