https://doi.org/10.63427/GKQM6392

Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2026.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 527 (Corrección). *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $0 < a \leq b < 1$ y $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Probar que

$$\int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2} f(x)\,dx \left(\int_0^{\sqrt{ab}} f(x)\,dx + \int_0^{(a+b)/2} f(x)\,dx \right) \leq 2 \int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2} x f(x)\,dx.$$

Problema 529. *Propuesto por Paolo Perfetti, Università degli Studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sean p un número real positivo y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión dada por $a_1 = 1$ y $a_{n+1}(1+a_n^p) = a_n$, para $n \geq 1$. Si definimos

$$b_n = a_n - \frac{1}{(pn)^{1/p}} + \frac{p-1}{2p^{2+1/p}} \frac{\log n}{n^{1+1/p}},$$

determinar los valores de $q > 0$ para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q$ es convergente.

PROBLEMA 530. *Propuesto por Xicheng Peng, Central China Normal University, Wuhan, China.*

En un cuadrilátero $ABCD$, sean M y N, respectivamente, los puntos de intersección de AB y CD y de AD y BC. Si la circunferencia circunscrita al triángulo ABC tiene centro O y radio R, probar que

$$\begin{aligned} &AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \operatorname{sen}(\angle BAD + \angle BCD) S_{ABC} \\ &\qquad = 4(S_{ABC} - S_{ABD})(S_{BDM} - S_{ACM})(R^2 - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}), \end{aligned}$$

donde S_{PQR} denota el área del triángulo PQR.

PROBLEMA 531. *Propuesto por Yagub Aliyev, ADA University, Baku, Azerbaiyán.*

Sean $b_0, \dots, b_n, d_0, \dots, d_n$ números reales distintos dos a dos. Probar que

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b_0 - d_1} & \frac{1}{b_0 - d_2} & \cdots & \frac{1}{b_0 - d_n} \\ 1 & \frac{1}{b_1 - d_1} & \frac{1}{b_1 - d_2} & \cdots & \frac{1}{b_1 - d_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{b_n - d_1} & \frac{1}{b_n - d_2} & \cdots & \frac{1}{b_n - d_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{0 \le i < j \le n} (b_i - b_j) \prod\limits_{0 \le i < j \le n} (d_j - d_i)}{\prod\limits_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} (b_i - d_j)}.$$

PROBLEMA 532. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB, s su semiperímetro, y r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente. Si h_a, h_b y h_c son, respectivamente, las longitudes de las alturas desde los vértices A, B y C, probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} (a^2 - ab + b^2) \left(\frac{h_a}{\sqrt{a^4 + 3b^4}} + \frac{h_b}{\sqrt{b^4 + 3a^4}} \right) \ge \frac{2r(5s^2 + r^2 + 4R)}{s^2 + r^2 + 2Rr}.$$

PROBLEMA 533. *Propuesto por Marius Drăgan, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB, y r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente. Probar que

$$1 \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \le \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \le \frac{R}{2r}.$$

Problema 534. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

En el plano de un rectángulo $ABCD$, y en el exterior de este, se traza una semicircunferencia de diámetro AB. Sean M un punto de dicha semicircunferencia y X e Y los respectivos puntos de intersección de las semirrectas MC y MD con AB. Si $AB = \sqrt{2}AD$, demostrar que $AX^2 + BY^2 = AB^2$.

Problema 535. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sqrt{(n+1)^2x^{2n+2} + n^2x^{2n} + 1}\, dx.$$

Problema 536. *Propuesto por Vasile Mircea Popa, Lucian Blaga University, Sibiu, Rumanía.*

Evaluar la integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{\operatorname{arc\,cot} x}{\sqrt{x^4 - 12x^2 + 32}}\, dx.$$

Soluciones

Problema 505. *Propuesto por Paolo Perfetti, Università degli Studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sean a y b valores reales y

$$L(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^a)}{x^b}\, dx.$$

Evaluar $L(a,b)$ para los valores de a y b que sea posible.

Solución enviada por A. Stadler, Herrliberg, Suiza.

En [1, 3.761.4] encontramos la fórmula

$$\int_0^\infty x^{t-1} \operatorname{sen} x\, dx = \Gamma(t) \operatorname{sen} \frac{t\pi}{2}, \qquad 0 < |t| < 1. \tag{1}$$

En esta identidad la convergencia para $-1 < t < 0$ es absoluta y para $0 \le t < 1$ es condicional. Para $|t| \ge 1$ resulta sencillo comprobar la divergencia de la integral. El valor para $0 \le t < 1$ se obtiene por el principio de prolongación analítica a partir del resultado para $-1 < t < 0$.

Supongamos ahora que $a > 0$. El cambio de variable $x^a = y$ implica que

$$L(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^\infty y^{(1-b)/a-1} \operatorname{sen} y\, dy = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1-b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1-b}{a}\frac{\pi}{2}\right), \quad |1-b| < a,$$

donde hemos aplicado (1) con $t = (1-b)/a$. Cuando $a < 0$, con el cambio de variable $x = 1/y$ y usando el caso anterior, tenemos que

$$L(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(y^{-1})}{y^{2-b}}\, dy = L(-a, 2-b) = -\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1-b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1-b}{a}\frac{\pi}{2}\right),$$

con $|1-b| < -a$. Resulta evidente que $L(0,b)$ es divergente.

En resumen,

$$L(a,b) = \frac{1}{|a|}\Gamma\left(\frac{1-b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1-b}{a}\frac{\pi}{2}\right), \qquad |1-b| < |a|.$$

REFERENCIAS

[1] I. S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, corrected and enlarged edition, Academic Press, 1980.

También resuelto por B. Salgueiro y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Puesto que es la pieza fundamental de la solución que hemos publicado, nos parece oportuno incorporar una demostración de (1) para $-1 < t < 0$. De la identidad

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} = \int_0^\infty e^{-xs} s^{\alpha-1}\, ds, \qquad \alpha, x > 0,$$

resulta

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{t-1} \operatorname{sen} x\, dx &= \frac{1}{\Gamma(1-t)}\int_0^\infty \operatorname{sen} x \int_0^\infty e^{-xs} s^{-t}\, ds\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-t)}\int_0^\infty s^{-t} \int_0^\infty e^{-xs} \operatorname{sen} x\, dx\, ds,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini (lo que es posible ya que $e^{-xs}s^{-t} \operatorname{sen} x \in L^1((0,\infty)\times(0,\infty))$). Una doble integración por partes o bien una tabla de transformadas de Laplace, nos da que

$$\int_0^\infty e^{-xs} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{1+s^2}$$

y, de este modo, con el cambio de variable $s^2 = u$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{t-1} \operatorname{sen} x\, dx &= \frac{1}{\Gamma(1-t)}\int_0^\infty \frac{s^{-t}}{1+s^2}\, ds = \frac{1}{2\Gamma(1-t)}\int_0^\infty \frac{u^{-t/2-1/2}}{1+u}\, du \\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-t)\cos\frac{t\pi}{2}} = \frac{\Gamma(t)\operatorname{sen}(t\pi)}{2\cos\frac{t\pi}{2}} = \Gamma(t)\operatorname{sen}\frac{t\pi}{2},\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la expresión racional para la función Beta y la fórmula de reflexión de Euler para la función Gamma.

Problema 506. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1, \dots, a_n$ valores reales positivos y $0 < b \le c$. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(n-1)a_1 - (a_2 + \cdots + a_n)}{\sqrt{a_2 + \cdots + a_n}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{(c-b)\sqrt{(n-1)(a_2 + \cdots + a_n)}}{(n-1)bc + a_2 + \cdots + a_n}\right) \ge 0.$$

Solución enviada por Miguel Ángel Ingelmo, I. E. S. José Saramago, Arganda del Rey, Madrid.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n > 0$. Si tomamos $A = a_1 + \cdots + a_n$, consideramos la función

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{A-y}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{n-1}{A-y}}\right), \qquad x > 0, \quad 0 < y < A,$$

usamos la identidad

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{p-q}{1+pq} = \operatorname{arc\,tg} p - \operatorname{arc\,tg} q,$$

y denotamos por S la suma en la desigualdad, podemos escribir esta suma como

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\text{cíclica}} \frac{(a_1 - a_2) + \cdots + (a_1 - a_n)}{\sqrt{A - a_1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(c-b)\sqrt{\frac{n-1}{A-a_1}}}{1 + bc\frac{n-1}{A-a_1}} \\ &= \sum_{\text{cíclica}} ((a_1 - a_2) + \cdots + (a_1 - a_n))(F(c,a_1) - F(b,a_1)) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} (a_i - a_j)(F(c,a_i) - F(b,a_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_j)(F(c,a_i) - F(c,a_j) - F(b,a_i) + F(b,a_j)). \end{aligned}$$

Veamos ahora que cada sumando es no negativo.

Como la función $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha \operatorname{arc\,tg}(\alpha x) - \beta \operatorname{arc\,tg}(\beta x)$ es creciente cuando $x > 0$ y $\alpha \ge \beta$ (para probarlo basta aplicar un sencillo argumento de derivación), tomando $\alpha = 1/\sqrt{A - a_i}$ y $\beta = 1/\sqrt{A - a_j}$, lo que implica que $\alpha \ge \beta$, tendremos que

$$f_{\alpha,\beta}(c\sqrt{n-1}) \ge f_{\alpha,\beta}(b\sqrt{n-1}),$$

por ser $b \le c$, y esto es equivalente a

$$F(c,a_i) - F(c,a_j) \ge F(b,a_i) - F(b,a_j).$$

De este modo, como $a_i - a_j \geq 0$, deducimos que cada sumando es no negativo y, por tanto, $S \geq 0$.

Debemos observar que de nuestro razonamiento se deduce que la igualdad ocurre si y solo si $b = c$ o $a_1 = \cdots = a_n$.

También resuelto por B. Salgueiro y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. La solución del proponente parte de la desigualdad de Nesbitt generalizada

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{b_1}{b_2 + \cdots + b_n} \geq \frac{n}{n-1}, \qquad b_1, \ldots, b_n > 0.$$

Tomando en ella $b_k = a_k + x^2$ y usando integración obtiene el resultado.

PROBLEMA 507. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $x \in (0, \pi/2)$ y $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$. Probar que

$$\frac{F_n^2}{1 + F_n^2 \csc^2 x} + \frac{F_{n+1}^2}{1 + F_{n+1}^2 \sec^2 x} \leq \frac{F_{2n+1}}{1 + F_{2n+1}}.$$

Solución enviada por Alejandro Castillo Soriano (estudiante), Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Demos en primer lugar un resultado previo sobre la media armónica de dos números. Para $x, y > 0$, denotamos por $H(x, y)$ su media armónica. Entonces, para cualesquiera $a, b, c, d > 0$ se verifica que

$$H(a, b) + H(c, d) \leq H(a + c, b + d). \tag{2}$$

En efecto, tras eliminar denominadores, esta desigualdad resulta ser equivalente a

$$0 \leq (a + b)(a + c)(b + d)(d + c) - (abc + bcd + cda + dab)(a + b + c + d) = (ad - bc)^2,$$

que es obviamente cierta. Además, es claro que la igualdad ocurre si y solo si $a/c = b/d$.

La desigualdad propuesta se puede escribir como

$$H(\operatorname{sen}^2 x, F_n^2) + H(\cos^2 x, F_{n+1}^2) \leq H(1, F_{2n+1})$$

y viene implicada por (2) aplicando la identidad

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \tag{3}$$

Además, la igualdad ocurre si y solo si $\operatorname{tg} x = F_n/F_{n+1}$.

Veamos una prueba elemental de (3). Considerando la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es conocido, y fácilmente demostrable por inducción, que

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = M^{2n} = (M^n)^2 = \begin{pmatrix} F_n^2 + F_{n+1}^2 & F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \\ F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) & F_{n-1}^2 + F_n^2 \end{pmatrix}$$

lo que prueba (3) y la identidad complementaria $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$.

También resuelto por S. J. Álvarez, B. Bradie, M. Fernández, M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, J. Polo, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

Nota. En la solución enviada por Ingelmo también se recurre a la desigualdad de medias armónicas (2); sin embargo, la identidad (3) la da por bien conocida. La solución de Stadler es idéntica a la de Ingelmo aunque sin hacer mención a la media armónica. La solución de Fernández recurre a la desigualdad de Bergström para probar la propuesta e incluye una prueba idéntica a la publicada de (3). Las restantes soluciones prueban la desigualdad por otros procedimientos, pero en todas ellas se hace necesaria la identidad (3). De hecho, en la solución de Kee-Wai Lau se da una prueba de (3) utilizando la fórmula de Binet para los números de Fibonacci.

Problema 508. *Propuesto por Ángeles Carmona y Andrés M. Encinas, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Caracterizar los valores complejos $c_0, \ldots, c_m$, con $m \geq 2$, para los que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \log(n+k)$$

es convergente y, en ese caso, hallar su suma.

Solución enviada por Manuel Fernández López, I. E. S. San Clemente, Santiago de Compostela, A Coruña.

Probaremos que la serie es convergente si y solo si

$$\sum_{k=0}^{m} c_k = \sum_{k=1}^{m} k c_k = 0$$

y, en ese caso, su suma es $-\sum_{k=2}^{m} c_k \log k!$.

Comencemos analizando la sucesión de sumas parciales de la serie. Si las denotamos por S_N, se tiene que

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} c_k \log(n+k) = \sum_{k=0}^{m} c_k \sum_{n=1}^{N} \log(n+k) = \sum_{k=0}^{m} c_k \log\frac{(N+k)!}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} c_k \log(N+k)! - \sum_{k=2}^{m} c_k \log k! \\
&= \log N! \sum_{k=0}^{m} c_k + \sum_{k=1}^{m} \log(N+k) \sum_{i=k}^{m} c_i - \sum_{k=2}^{m} c_k \log k! \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\log(N+k)}{\log N!} \sum_{i=k}^{m} c_i - \sum_{k=2}^{m} c_k \frac{\log k!}{\log N!}\right) \log N!.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log(N+k)}{\log N!} = \lim_{N\to\infty} \frac{\log k!}{\log N!} = 0, \qquad k = 1, \dots, m,$$

si el límite de las sumas parciales existe y es finito se debe cumplir que $\sum_{k=0}^{m} c_k = 0$. En ese caso,

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=1}^{m} \log(N+k) \sum_{i=k}^{m} c_i - \sum_{k=2}^{m} c_k \log k! \\
&= \sum_{k=1}^{m} \log\left(\frac{N+k}{N}\right) \sum_{i=k}^{m} c_i + \log N \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=k}^{m} c_i - \sum_{k=2}^{m} c_k \log k! \\
&= \sum_{k=1}^{m} \log\left(\frac{N+k}{N}\right) \sum_{i=k}^{m} c_i + \log N \sum_{k=1}^{m} k c_k - \sum_{k=2}^{m} c_k \log k!.
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\lim_{N\to\infty} \log\frac{N+k}{N} = 0, \qquad k = 1, \dots, m,$$

vemos que si las sumas parciales convergen se debe verificar que $\sum_{k=1}^{m} k c_k = 0$. En tal caso, se cumple que la suma de la serie es $-\sum_{k=2}^{m} c_k \log k!$.

De la argumentación anterior se puede concluir fácilmente que las condiciones

$$\sum_{k=0}^{m} c_k = \sum_{k=1}^{m} k c_k = 0$$

son, además de necesarias, suficientes para la convergencia de la serie.

También resuelto por M. Á. Ingelmo, B. Salgueiro, A. Stadler y los proponentes.

Problema 509. *Propuesto por Marian Ursărescu, “Roman-Vodă” National College, Roman, Rumanía.*

Sean z_1, z_2 y z_3 tres números complejos distintos de módulo uno. Probar que si se cumple la condición

$$3z_1z_2z_3|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)| + \sum_{\text{cíclica}} \big(z_1(z_2-z_3)^2|z_2-z_3|\big) = 0,$$

entonces z_1, z_2 y z_3 son los afijos de los vértices de un triángulo equilátero.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Demostraremos que la condición del enunciado es equivalente a que z_1, z_2 y z_3 sean los afijos de los vértices de un triángulo equilátero. Como los números z_1, z_2 y z_3 tienen módulo uno, son no nulos, y la condición del enunciado equivale a la que resulta de dividir sus dos miembros entre $z_1z_2z_3$, es decir, a

$$3\prod_{\text{cíclico}} |z_2-z_3| + \sum_{\text{cíclica}} \frac{z_2-z_3}{z_2z_3}(z_2-z_3)|z_2-z_3| = 0. \tag{4}$$

Para cada $k=1,2,3$ se tiene $z_k\overline{z_k} = |z_k|^2 = 1$, luego

$$\frac{z_2-z_3}{z_2z_3} = \frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2} = \overline{z_3} - \overline{z_2} = \overline{z_3 - z_2} = -\overline{z_2 - z_3}$$

y cíclicamente, con lo cual la condición (4) es la misma que

$$3\prod_{\text{cíclico}} |z_2-z_3| - \sum_{\text{cíclica}} |z_2-z_3|^3 = 0. \tag{5}$$

Consideramos ahora el triángulo ABC con $A(z_1)$, $B(z_2)$ y $C(z_3)$. Las longitudes de sus lados son $BC=a=|z_2-z_3|$, $CA=b=|z_3-z_1|$ y $AB=c=|z_1-z_2|$. La condición (5) se reescribe como

$$3abc-(a^3+b^3+c^3) = -(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) = 0.$$

Como $a+b+c \neq 0$, esta última igualdad se cumple si y solo si $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$, es decir, si y solo si $a=b=c$, o sea, si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

También resuelto por S. J. Álvarez, M. Á. Ingelmo, A. Stadler y el proponente.

Problema 510. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean A', B' y C', respectivamente, los puntos simétricos de los vértices A, B y C de un triángulo ABC respecto de los lados BC, CA y AB. Sean X, Y y Z, respectivamente, las proyecciones ortogonales del centro W de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC sobre los lados BC, CA y AB. Demostrar que los baricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y XYZ están alineados.

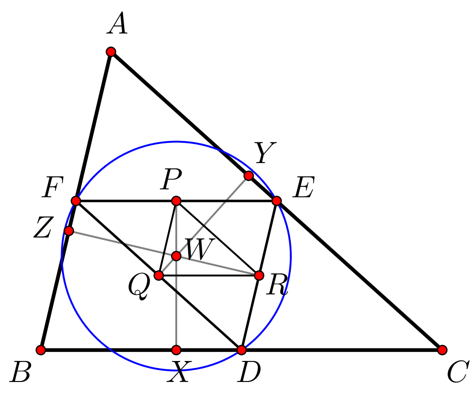

Figura 1: Primer esquema para la solución del problema 510.

Solución enviada por César Beade, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

La circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por los puntos medios D, E y F de los lados del triángulo, de modo que W es el circuncentro del $\triangle DEF$ que se conoce como *triángulo medial* del $\triangle ABC$, y es también el ortocentro del triángulo medial PQR del $\triangle DEF$, ya que las mediatrices de DEF son alturas de PQR.

De manera que X es el simétrico del punto P respecto del lado QR, Y es el simétrico del punto Q respecto del lado RP y Z el simétrico del punto R respecto del lado PQ (figura 1).

Si G es el baricentro de ABC, la homotecia de centro G y razón $1/4$ transforma $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$. Se deduce que esa misma homotecia transformará el triángulo $A'B'C'$ en el XYZ (figura 2). Como los baricentros de dos triángulos homotéticos son puntos homólogos en la homotecia que transforma uno en otro, los baricentros de los triángulos $A'B'C'$ y XYZ estarán alineados con G.

También resuelto por F. D. Aranda, M. Á. Ingelmo, Kee-Wai Lau, B. Salgueiro y el proponente.

Nota. Salgueiro apunta que el triángulo $A'B'C'$ suele conocerse como *triángulo de reflexión* del $\triangle ABC$, y el hecho de que es homólogo al triángulo XYZ —que es el *triángulo pedal* del punto W respecto del $\triangle ABC$— en la homotecia de centro G y razón $1/4$, tal como aparece en la suya y en la solución que hemos publicado, es un resultado que se atribuye a Gilles Boutte (2001) en `https://mathworld.wolfram.com/ReflectionTriangle.html`. Para un lector con interés suplementario en el tema de los triángulos de reflexión, Salgueiro aporta la referencia `http://www.hyacinthos.epizy.com/message.php?msg=3992`. Se trata de un mensaje que abría una motivadora conversación (extendida hasta el mensaje 4000) entre Patrick J. Callahan, Paul Yiu y G. Boutte en un foro de geometría de `Yahoo` ya desaparecido que, según nos explica, se denominaba `Hyacinthos` en honor al geómetra Émile Michel Hyacinthe Lemoine.

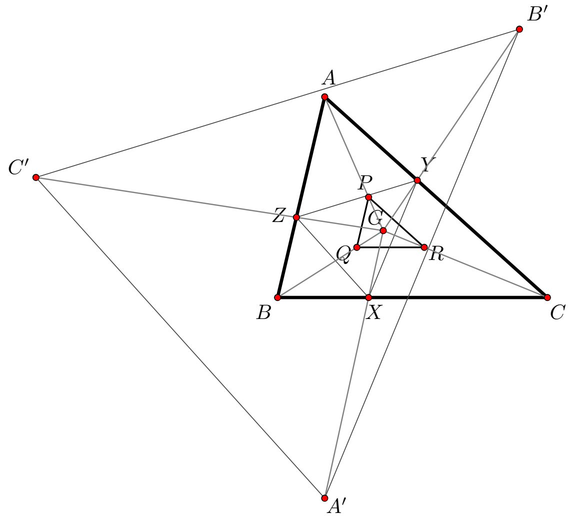

Figura 2: Segundo esquema para la solución del problema 510.

Problema 511. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean a, b, c y d las longitudes de los lados de un cuadrilátero, i y j las longitudes de sus diagonales y m la distancia entre los puntos medios de las diagonales. Probar la relación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = i^2 + j^2 + 4m^2.$$

Primera solución, enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Supóngase que el cuadrilátero es $WXYZ$ con $WX = a$, $XY = b$, $YZ = c$ y $ZA = d$. Tomando coordenadas cartesianas rectangulares, sean $W = (w_1, w_2)$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ y $Z = (z_1, z_2)$, de modo que

$$\begin{aligned} a^2 &= (w_1 - x_1)^2 + (w_2 - x_2)^2, \qquad & b^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2, \\ c^2 &= (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2, \qquad & d^2 &= (z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2, \\ i^2 + j^2 &= (w_1 - y_1)^2 + (w_2 - y_2)^2 + (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2, \end{aligned}$$

y

$$m^2 = \left(\frac{x_1 + z_1}{2} - \frac{w_1 + y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + z_2}{2} - \frac{w_2 + y_2}{2}\right)^2.$$

La relación del problema se sigue a partir de las expresiones anteriores por desarrollo directo.

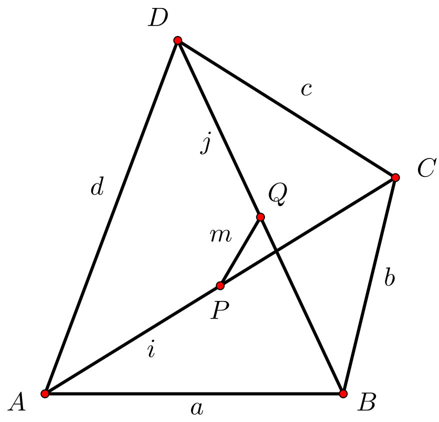

Figura 3: Esquema para las soluciones segunda y tercera del problema 511.

Segunda solución, enviada por S. Jesús Álvarez Contreras, jubilado, Madrid.

Sean A, B, C y D los vértices del cuadrilátero de tal manera que $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{BC}| = b$, $|\overrightarrow{CD}| = c$ y $|\overrightarrow{DA}| = d$. Sean P el punto medio de la diagonal AC de longitud i, y Q el punto medio de la diagonal BD de longitud j.

El vector $\overrightarrow{PQ}$ satisface la relación $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{PQ}$, resultado de sumar las relaciones

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$

y

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QB}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} 4m^2 = |2\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2 &= a^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \\ i^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 &= a^2 + b^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \\ j^2 = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}|^2 &= d^2 + a^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

y, sumando,

$$\begin{aligned} 4m^2 + i^2 + j^2 &= 3a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= 3a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

Tercera solución, enviada conjuntamente por Alejandro Martínez Gómiz y Ángela Sanz Miguel (estudiantes), Universidad de La Rioja, Logroño.

Con la notación de la solución anterior, si se aplica el teorema de Apolonio (o de las medianas) a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ respectivamente, se tiene

$$a^2+b^2 = \frac{i^2}{2} + 2\overline{BP}^2,$$
$$d^2+c^2 = \frac{i^2}{2} + 2\overline{DP}^2.$$

Sumando ambas expresiones deducimos que

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = i^2 + 2(\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2). \tag{6}$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Apolonio al triángulo $\triangle BDP$ obtenemos la relación

$$\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 = \frac{j^2}{2} + 2m^2, \tag{7}$$

y basta sustituir (7) en (6) para terminar.

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, C. Beade, A. Cano, A. Castillo, M. Fernández, J. Gómez, M. Á. Ingelmo, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru, J. J. Zárate y el proponente.

Nota. Las soluciones de Beade, Gómez, Ingelmo y Stadler son muy similares a la primera solución publicada. La de Fernández es completamente similar a la segunda publicada, y las de Amengual, Salgueiro y Văcaru muy similares a la tercera. El resto de soluciones usan técnicas parecidas pero son más prolijas.

Salgueiro señala que la relación dada en este problema, que generaliza la encontrada por el propio Apolonio para paralelogramos, a saber, $a^2+b^2+c^2+d^2 = i^2+j^2$, ya que en ese caso es $m=0$, vale para cualquier cuadrilátero, sea convexo o no, y que aparece ya formulada en una carta de Euler a Goldbach de fecha 13 de febrero de 1748. Y que, a su vez, este teorema de Euler se puede generalizar para cuadriláteros alabeados en $\mathbb{R}^n$, como se puede ver en el artículo *Euler's theorem for generalized quadrilaterals* de Geoffrey Allan Kandall en *The College Mathematics Journal* **33** (2002), 403–404.

Problema 512. *Propuesto por D. M. Bătinetu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Si $\{F_n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ si $n \geq 2$, Γ denota la función Gamma de Euler y $m>0$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \Gamma\left(\frac{x}{n} F_n^{m/n}\right) dx,$$

siendo $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Solución elaborada por los editores a partir de las enviadas, independientemente, por B. Bradie, Christopher Newport University, Newport News, VA, EE. UU., y Miguel Ángel Ingelmo, I. E. S. José Saramago, Arganda del Rey, Madrid.

Veamos que el límite solicitado vale $\Gamma(\phi^m/e)/e$.

Puesto que, como se puede comprobar fácilmente, $a_{n+1} > a_n$ la monotonía y positividad de la función Gamma implican que

$$c_n < \int_{a_n}^{a_{n+1}} \Gamma\left(\frac{x}{n} F_n^{m/n}\right) dx < C_n,$$

donde

$$c_n = (a_{n+1} - a_n)\Gamma\left(\frac{a_n}{n} F_n^{m/n}\right) \qquad \text{y} \qquad C_n = (a_{n+1} - a_n)\Gamma\left(\frac{a_{n+1}}{n} F_n^{m/n}\right).$$

La sucesión $a_{n+1} - a_n$ es la conocida sucesión de Lalescu y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{e}$$

(los detalles del cálculo de este límite pueden consultarse en la solución al problema 430, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **25** (2022), 552–554). Ahora, por el criterio de la raíz se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

y lo mismo para a_{n+1}/n. La formula de Binet para los números de Fibonacci implica que

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{m/n} = \left(\lim_{n\to\infty} F_n\right)^m = \phi^m.$$

De este modo, la continuidad de la función Gamma nos permite obtener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \Gamma\left(\frac{x}{n} F_n^{m/n}\right) dx = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{e}\Gamma\left(\frac{\phi^m}{e}\right)$$

y hemos concluido.

También resuelto por B. Salgueiro, A. Stadler y los proponentes.

NOTA. B. Salgueiro, en su solución, en lugar de la función Gamma considera una función continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ cualquiera y utiliza el teorema del valor medio integral para obtener que el límite es $f(\phi^m/e)/e$. Asimismo, nos informa de que el mismo problema, propuesto por los mismos autores, había aparecido en el año 2015 en la revista *Fibonacci Quarterly* como problema H-771. Debemos insistir en que los proponentes de problemas para LA GACETA se abstengan de enviar propuestas que hayan sido enviadas o publicadas en otras revistas.