Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Jean-Pierre Serre, medalla Fields

por

Pilar Bayer

Cuando Jean-Pierre Serre fue galardonado con la medalla Fields en el *International Congress of Mathematicians*, celebrado en Amsterdam en 1954, sus primeras contribuciones en topología algebraica y en geometría algebraica reflejaban sólo el inicio de una carrera matemática extraordinaria. Muchos de sus trabajos en topología algebraica, geometría algebraica, álgebra, grupos y álgebras de Lie, y teoría de números son hoy referencia habitual en la producción científica. Día a día, y a lo largo de 50 años, Jean-Pierre Serre se ha acreditado como un maestro.

Entre las características de la producción matemática de Serre destacamos la profundidad de su pensamiento, la elegancia de sus razonamientos, así como su bella manera de escribir. Estudiar una memoria o un libro de Serre es siempre un placer; releerlos, una necesidad. La amplia visión que Serre posee de la matemática, sus resultados, sus conjeturas, sus preguntas, así como la inestimable ayuda brindada a los matemáticos en tantas ocasiones, han cristalizado en algunos de los logros más espectaculares de la matemática de los últimos años.

Jean-Pierre Serre

Sintetizar el quehacer de Serre en pocas páginas es prácticamente imposible. No todos sus resultados van a ser mencionados en este escrito, por lo que pido disculpas de antemano. Dicho esto, no quisiera concluir la introducción sin expresar mi agradecimiento al consejo de redacción de *La Gaceta* por haberme confiado tan estimulante encargo.

Perfil Biográfico

Jean-Pierre Serre nació el 15 de septiembre de 1926, en Bages (Pirineos Orientales), un pueblecito del Rosellón en el que su padre, Jean, y su madre, Adèle, regentaban una farmacia. Cuenta el propio Serre que su temprana afición por las matemáticas se vio favorecida por el estudio de un libro de cálculo guardado celosamente por su madre desde sus años universitarios, en Montpellier.

De 1945 a 1948, Serre estudia en la *École Normale Supérieure* de París. Concluida su graduación en matemáticas, conoce a Henri Cartan y participa en su recién creado seminario; la colaboración de Serre en el *Séminaire Cartan* se extendería a lo largo de quince años. En 1951 Serre defiende su tesis doctoral en la *Sorbonne*. La tesis se vería publicada en *Annals of Mathematics*, aquel mismo año.

En 1954, Jean-Pierre Serre y Kunihiko Kodaira recibían la medalla Fields de manos de Hermann Weyl. Era la tercera ocasión en que se concedían tales condecoraciones. Serre contaba 27 años. En su *laudatio* a los recipiendarios, Weyl dijo que ≪Kodaira es un matemático joven, según la definición por la cual un matemático joven es aquel que no ha cumplido los 40 años≫, mientras que ≪Serre es un matemático joven, ¡con independencia de la definición adoptada!≫.

Cuando en 1955 Serre presentó su candidatura a la plaza de *Professeur* del *Collège de France* (cátedra de *Algèbre et Géométrie*), tenía en su haber 30 artículos de investigación publicados, había realizado seis exposiciones en el *Séminaire Bourbaki* y estaba en posesión de la medalla Fields.

Hasta el momento presente, la editorial Springer ha publicado cuatro volúmenes de la obra de Serre [Œ*uvres* I-II-III (1986); IV (2000)], que comprenden 173 de sus artículos, anotados por el propio Serre. Además, Serre es autor de una docena de libros, la mayoría de los cuales han conocido numerosas ediciones y/o traducciones.

En las secciones siguientes, una acotación de la forma [Œ 131(1984)] hará referencia al artículo 131 de las Œ*uvres*, publicado en 1984. Cuando mencionemos un curso de Serre, se tratará de un curso impartido en el *Collège de France*, salvo indicación expresa de lo contrario. El nombre de un autor seguido de una fecha denotará una publicación.

Primera Etapa: La Tesis

El notable desarrollo experimentado por el cálculo tensorial, la geometría riemanniana y la teoría de los grupos continuos de transformaciones favoreció en las primeras décadas del siglo XX la aparición de relevantes interacciones entre geometría, análisis y topología. Los libros de H. Seifert y W. Threlfall (1934, 1939) eran referencia obligada, tanto en el estudio de la topología como en el del cálculo de variaciones; los libros de A. Weil (1946, 1948) proponían una base para la geometría algebraica a partir de la noción de variedad e iniciaban un estudio sistemático de las variedades abelianas; W. V. D. Hodge y H. Weyl probaban que toda forma diferencial cerrada es homóloga a una forma armónica; y la tesis de G. de Rham preparaba el camino para la teoría de haces, que nacería con J. Leray (1950). En 1950, L. Schwartz recibía la medalla Fields por su teoría de distribuciones.

En la década de los cincuenta, Serre escribe sus primeros artículos, colabora en publicaciones con H. Cartan, A. Borel y G. P. Hochschild, y prepara su tesis doctoral como alumno de Henri Cartan. En una publicación inicial, Serre y Borel [Œ 2(1950)] demostraron la imposibilidad de fibrar un espacio euclidiano mediante fibras compactas.

La tesis de Serre, titulada *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications* [Œ 9(1951), 4(1950), 5(1951), 6(1951)], tenía por objetivo inicial la obtención de los grupos de cohomología singular de los complejos de Eilenberg-MacLane por medio de técnicas de espacios fibrados. La propiedad de elevación de homotopías que Serre impone a los espacios fibrados conduce a la existencia de una sucesión espectral de homología singular, análoga a la obtenida por J. Leray (1950) en el ámbito de la teoría de Čech; una sucesión espectral dual existe asimismo en cohomología. El concepto de espacio fibrado que Serre utiliza es más general que el habitual en la época, permitiéndole el tratamiento de los espacios de lazos. Dados un espacio topológico arco conexo X y un punto $x \in X$, el espacio de lazos en x, Ω, se interpreta como la fibra de un espacio fibrado, E, de base X. Los elementos de E son los caminos de X de origen en x. La idea realmente nueva consiste en interpretar la aplicación de evaluación, que a un camino le asigna su extremo, como una aplicación fibra $f : E \to X$. El espacio E es contráctil y, por ello, resulta de gran utilidad para relacionar la homología de Ω con la de X, una vez adaptada convenientemente la teoría de Leray.

La tesis de Serre contiene aplicaciones diversas. Por ejemplo, a partir de un teorema de M. Morse (1938) y de sus propios resultados, Serre demuestra que para todo espacio de Riemann compacto y conexo existen infinitas geodésicas que unen dos cualesquiera de sus puntos. Pero, sin duda, la aplicación más notable contenida en la tesis de Serre es la que hace referencia al cálculo de grupos de homotopía de esferas $\pi_i(S_n)$. Con anterioridad, H. Freudenthal (1938) había determinado los grupos $\pi_{n+1}(S_n)$; L. Pontrjagin y G. W. Whitehead (1950) habían calculado los grupos $\pi_{n+2}(S_n)$; y H. Hopf había demostrado que el grupo $\pi_{2n-1}(S_n)$, n par, es isomorfo a la suma directa de $\mathbb{Z}$ y de un grupo finito. Gracias también a Freudenthal, se sabía que los grupos $\pi_{n+k}(S_n)$ dependen únicamente de k. Serre obtiene que todos los grupos $\pi_i(S_n)$, $i > n$, son finitos, salvo $\pi_{2n-1}(S_n)$, n par, que es la excepción descubierta por Hopf. Dado un primo p, demuestra que la componente p-primaria de $\pi_i(S_n)$, $n \geq 3$, es nula si $i < n + 2p - 3$; y la componente p-primaria de $\pi_{n+2p-3}(S_n)$ es un p-grupo cíclico.

El estudio de los grupos de homotopía de esferas fue proseguido por Serre en los dos años posteriores a la lectura de su tesis [Œ 8(1951), 10(1952), 11 (1952), 12(1952), 13(1952), 18(1953), 19(1953), 22(1953)]. Los artículos [Œ 10

(1952), 11(1952)] están escritos en colaboración con H. Cartan y el artículo [Œ 8(1951)], en colaboración con A. Borel.

Durante una estancia en Princeton, acaecida en 1952, Serre se da cuenta que es posible una «localización» en el cálculo de los grupos de homotopía. Para ello introduce un lenguaje «mod $\mathcal{C}$» consistente en ignorar una clase $\mathcal{C}$ de objetos, como en aritmética. Serre [Œ 18(1953)] prueba que el grupo $\pi_i(S_n)$ es $\mathcal{C}$-isomorfo a la suma directa de $\pi_{i-1}(S_{n-1})$ y $\pi_i(S_{2n-1})$, siendo $\mathcal{C}$ la clase de los 2-grupos.

En [Œ 18(1953)] demuestra que todo grupo de Lie es homotópicamente equivalente a un producto de esferas, módulo ciertos números primos, que determina en el caso de los grupos clásicos. En [Œ 19(1953)] determina el comportamiento asintótico de la serie de Poincaré de las álgebras de cohomología módulo 2 de los complejos de Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\Pi; q)$, cuando el grupo Π (abeliano si $q \geq 2$) es finitamente generado; para ello combina resultados de la tesis de A. Borel, resultados de H. Cartan y de su propia tesis. En el mismo trabajo calcula los grupos $\pi_{n+3}(S_n)$ y $\pi_{n+4}(S_n)$. Basándose en [Œ 13(1952)] y en el conocimiento de los grupos $\pi_i(\mathbf{SO}(n))$, $i \leq 8$, calcula en [Œ 22(1953)] todos los grupos $\pi_i(S_3)$, $i \leq 11$, y $\pi_{n+i}(S_n)$, $i \leq 8$.

La determinación de los grupos de homotopía de las esferas sigue siendo todavía objeto de investigación, pero la intervención de Serre en este problema fue decisiva, tanto por los métodos empleados como por los resultados obtenidos.

La Medalla Fields

El tratamiento cohomológico de las extensiones de grupos se inicia en la tesis de R. Lyndon (1948). G. Hochschild y Serre [Œ 15(1953)] prosiguen su estudio, guiados por la analogía existente con la cohomología de los espacios fibrados. Dados un grupo discreto G, un subgrupo invariante K y un grupo de coeficientes A, obtienen una sucesión espectral $H(G/K, H(K, A)) \Rightarrow H(G, A)$. Si $H^r(K, A) = 0$, $0 < r < q$, la sucesión espectral proporciona la sucesión exacta $0 \to H^q(G/K, A^K) \to H^q(G, A) \to H^q(K, A)^{G/K} \to H^q(G/K, A^K) \to H^{q+1}(G, A)$. La denominada sucesión exacta de Hochschild-Serre se convertiría en la pieza clave de muchas demostraciones. En [Œ 16(1953)] Hochschild y Serre transferían su método al estudio de la cohomología de las álgebras de Lie.

La teoría inicial de los espacios fibrados algebraicos, debida A. Weil, fue expuesta por Serre en el *Séminaire Bourbaki* [Œ 21(1952/53)]. Vale decir que en Weil tales espacios son siempre localmente triviales. En su exposición, Serre formula diversas preguntas sobre la clasificación de espacios fibrados algebraicos de fibra vectorial, que serían contestadas por A. Grothendieck (cuando la base es de género cero) y por M. Atiyah (cuando la base es de género uno). Ciertas reflexiones hechas por Serre en aquella ocasión se verían posteriormente reflejadas en sus memorias [FAC] y [GAGA], de las cuales hablaremos en la sección siguiente.

Cartan y Serre [Œ 24(1953)] prueban que los grupos de cohomología $H^q(X, \mathcal{F})$, asociados a una variedad analítica compleja y compacta X y con valores en un haz analítico coherente $\mathcal{F}$, son espacios vectoriales de dimensión finita.

En un artículo que dedica a H. Hopf, Serre [Œ 28(1955)] daba a conocer un teorema de dualidad, en el ámbito de las variedades analíticas complejas. Serre aplica el teorema de dualidad a la obtención de una demostración sencilla del teorema de Riemann-Roch para curvas y a la determinación de la cohomología de las variedades de Stein. En su demostración, Serre utiliza resultados transcendentes de P. Dolbeault, de G. de Rham y de la teoría de distribuciones de L. Schwartz. Previamente, en una carta a Borel [Œ 20(1953)], Serre había propuesto la generalización del teorema de Riemann-Roch para variedades de dimensión superior. Los resultados obtenidos por F. Hirzebruch al respecto fueron expuestos por Serre en el *Séminarie Bourbaki* [Œ 25(1953/54)]. El teorema de Riemann-Roch según Grothendieck sería expuesto por A. Borel y por Serre en un seminario en Princeton; el texto de esta exposición se encuentra en las Œ*uvres* de A. Borel (Springer, 1983, n. 44(1958)).

En su ponencia [Œ 27(1954)], presentada al *International Congress of Mathematicians* de Amsterdam, Serre propone la extensión de la teoría de haces al estudio de las variedades algebraicas definidas sobre un cuerpo de característica arbitraria, consciente de que numerosos problemas de la geometría algebraica clásica podían ser estudiados por medio de la teoría de haces. Si X es una variedad proyectiva y no singular definida sobre un cuerpo finito, los espacios vectoriales $H^q(X, \Omega^p)$ son de dimensión $h^{p,q}$, finita. Serre se pregunta si los valores $\sum_{p+q=n} h^{p,q}$ proporcionan los números de Betti que las conjeturas de Weil predicen. La pregunta sería contestada negativamente por J. Igusa (1955).

En el congreso de Amsterdam, cuando H. Weyl entregó a Serre la medalla Fields, quizá algo preocupado por la extrema juventud de éste, concluyó su presentación recomendándole ≪*carry on as you began!*≫. En los párrafos siguientes desearía ilustrar el cumplimiento de aquel encargo.

Haces Coherentes

En la memoria fundamental *Faisceaux algébriques cohérents* [FAC] [Œ 29(1955)], Serre desarrolla una teoría de haces algebraicos coherentes en el ámbito de las variedades algebraicas sobre un cuerpo k de característica arbitraria. En la época, las variedades algebraicas se consideraban provistas de la topología de Zariski; con lo cual, al tratarse de espacios no separados, los métodos de la topología algebraica no eran directamente aplicables. Así, la exactitud de la sucesión exacta de cohomología asociada a una sucesión exacta de haces no es válida en general, pero se satisface al tomar haces coherentes. El [FAC] consta de tres capítulos. El capítulo I se dedica a la teoría general de haces; el capítulo II contiene una definición alternativa del concepto de variedad abstracta según A. Weil, y en él se estudia la teoría de haces coherentes sobre las variedades afines; el capítulo III se dedica al estudio de la teoría de haces coherentes sobre las variedades proyectivas. A todo fibrado vectorial algebraico E definido sobre una variedad algebraica V, Serre asocia un haz algebraico coherente, $\mathcal{S}(E)$, formado por los gérmenes de las secciones de E. Sea $\mathcal{O}$ el haz de anillos locales de V y $A = \Gamma(V, \mathcal{O})$, su anillo de coordenadas. Si V es una variedad afín, la aplicación $E \mapsto \Gamma(\mathcal{S}(E))$ establece una biyección entre las clases de fibrados vectoriales sobre V y las clases de A-módulos proyectivos finitamente generados. En ella, los fibrados triviales se corresponden con los A-módulos libres. Si $V = k^n$, en cuyo caso A es el anillo de polinomios $k[X_1, \ldots, X_n]$, Serre hace notar que él «no conoce ningún $k[X_1, \ldots, X_n]$-módulo proyectivo finitamente generado que no sea libre». Esta observación daría lugar a la denominada *conjetura de Serre*, aunque, de hecho, Serre nunca la consideró como tal.

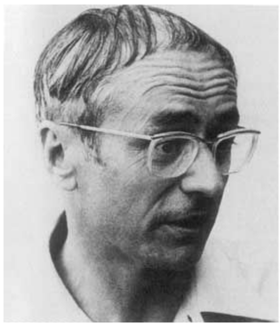
El [FAC] de Serre, el *Tôhoku* (1957) de A. Grothendieck, y el libro de R. Godement (1964) sobre teoría de haces serían los textos precursores de una nueva metodología en geometría algebraica abstracta. Les seguiría la monumental obra de A. Grothendieck [EGA (1960-1964); SGA (1968; 1971-1977)].

La conjetura de Serre en dimensión 2 fue demostrada por C. S. Seshadri (1959). Su trabajo fue expuesto por Serre en el *Séminaire Dubreil-Pisot* [Œ 48 (1960/61)]. En esta exposición, Serre puso de manifiesto la relación de su conjetura con el problema de la caracterización de las variedades algebraicas de intersección completa.

Al cabo de 20 años de la publicación de [FAC], y tras la obtención de resultados parciales por diversos autores (por ejemplo, en dimensión 3), D. Quillen (1976) y A. Suslin (1976), independientemente el uno del otro, demostraban la conjetura de Serre en cualquier dimensión. Su teorema afirma que todo $K[X_1, \ldots, X_n]$-módulo finitamente generado y proyectivo es libre, si K es un cuerpo o, más generalmente, un dominio principal.

El mismo año en que Serre era nombrado *Professeur* del *Collège de France*, publicaba la célebre memoria *Géométrie algébrique et géométrie analytique* [GAGA] [Œ 32(1956)]. En [GAGA] se comparan el tratamiento algebraico y el tratamiento analítico (o por vía transcendente) que admite toda variedad algebraica compleja. Se demuestra que existe una correspondencia biyectiva entre los haces algebraicos coherentes definidos sobre una variedad proyectiva X y los haces analíticos coherentes definidos sobre el espacio analítico X^h asociado a X; la correspondencia deja invariantes los grupos de cohomología. Como aplicaciones de este resultado mencionaremos la invariancia de los números de Betti por automorfismos del cuerpo complejo $\mathbb{C}$ cuando X es no singular, así como la comparación de espacios fibrados algebraicos y analíticos de bases X, X^h asociados a un mismo grupo estructural G. Tales clases de fibrados se identifican con los elementos de los conjuntos de cohomología $H^1(X, \mathcal{G})$, $H^1(X^h, \mathcal{G}^h)$, en donde $\mathcal{G}$ (respectivamente $\mathcal{G}^h$) designan el haz de gérmenes de aplicaciones regulares (respectivamente holomorfas) de X (respectivamente X^h) en G. De todos los grupos algebraicos semisimples, la memoria trata únicamente los grupos especiales lineales $\mathbf{SL}_n$ y los grupos simplécticos $\mathbf{Sp}_n$. El [GAGA] contiene un anexo dedicado al estudio de los módulos planos y de los pares planos de anillos locales, los cuales surgen de manera natural al comparar los anillos locales en un mismo punto x de X, X^h.

Álgebra Local



Jean-Pierre Serre

Los logros de Serre en el [FAC] y en el [GAGA] derivaron hacia un interés por el álgebra local. En una ponencia en el simposio de Tokyo-Nikko [Œ 33(1956)], Serre demuestra que la validez del teorema de *syzygias* caracteriza los anillos locales regulares, completando un teorema de A. Auslander y D. Buchsbaum (1956) por el cual todo anillo local regular es de dimensión homológica global finita. La caracterización homológica de los anillos locales regulares permite a Serre probar fácilmente que todo anillo de fracciones de un anillo local regular es regular. La teoría básica de los anillos locales, preferentemente de igual característica, fue el tema del curso [Œ 42(1957/58)]. Su contenido quedaría reflejado en el libro *Algèbre Locale. Multiplicités* [ALM (1965)], que ha guiado a toda una generación de algebristas. El libro incluye la teoría general de módulos noetherianos y sus descomposiciones primarias, polinomios de Hilbert, extensiones enteras, teoremas de Krull sobre la caracterización de la normalidad de dominios noetherianos, aplicaciones del complejo de Koszul, módulos de Cohen-Macaulay, la caracterización homológica de los anillos locales regulares, así como el teorema de estructura de los anillos locales completos, en el caso de igual característica. El libro contiene asimismo la célebre fórmula del Tor, que expresa las multiplicidades de intersección de la geometría algebraica como características de Euler-Poincaré formadas a partir de los functores Tor de Cartan-Eilenberg.

Cohomología de Variedades

En [Œ 35(1957)] Serre obtiene una caracterización homológica de las variedades afines, análoga a la de las variedades de Stein, y extiende parte de los resultados del [FAC] a variedades algebraicas arbitrarias.

En la ponencia [Œ 38(1958)], presentada al simposio de topología algebraica celebrado en Méjico, Serre asocia a una variedad algebraica X, proyectiva, no singular y definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica $p > 0$, unos grupos de cohomología, $H^i(X, \mathcal{W})$, valorados en un haz $\mathcal{W}$ de vectores de Witt. Aunque esta definición tampoco proporcionó los números de Betti adecuados, el artículo en cuestión contiene ideas que favorecerían el nacimiento de las cohomologías ℓ-ádica y cristalina. Es de destacar el tratamiento dado en este trabajo al Frobenius F como endomorfismo semilineal de $H^1(X, \mathcal{O})$, cuando X es una curva proyectiva y no singular. Una vez se ha identificado el espacio $H^1(X, \mathcal{O})$ con el espacio formado por las clases de reparticiones sobre la curva (en el sentido de Chevalley), la operación anterior conduce a la matriz de Hasse-Witt de X. Mediante el uso del operador de Cartier sobre las diferenciales de la curva, Serre demuestra que $H^1(X, \mathcal{W})$ es un módulo libre sobre el anillo de Witt, $W(k)$, de rango $2g - s$, siendo g el género de la curva y p^s el número de clases de divisores de X anuladas por p.

Los resultados anteriores se completan en el trabajo [Œ 40(1958)], dedicado a E. Artin. Dada una variedad abeliana A definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica positiva, el *cup* producto dota a $H^*(A, \mathcal{O})$ de una estructura de álgebra de Hopf. Serre demuestra que el álgebra de cohomología $H^*(A, \mathcal{O})$ se identifica con el álgebra exterior del espacio vectorial $H^1(A, \mathcal{O})$, como en el caso clásico. Prueba asimismo que en una tal variedad las operaciones de Bockstein son nulas; es decir, A carece de torsión homológica. Serre construye un ejemplo de una variedad abeliana para la cual $H^2(A, \mathcal{W})$ no es un módulo de tipo finito. Esta situación tampoco era satisfactoria.

En los trabajos mencionados, es patente la influencia de A. Weil. La búsqueda de una buena cohomología para las variedades definidas sobre cuerpos finitos estaba motivada por el deseo de demostrar las conjeturas de Weil, formuladas en 1940. Como es bien sabido, la buena cohomología para las variedades abstractas sería hallada por A. Grothendieck tras el desarrollo de la teoría de esquemas y de la topología *étale*.

En [Œ 45(1960)] Serre pone de manifiesto que ciertas ideas de A. Weil se trasladan con relativa facilidad al ámbito de las variedades complejas kählerianas. Para ello hace uso de la descomposición de Hodge y del teorema de dualidad. Serre pone de manifiesto que si la teoría de Kähler pudiera transponerse en característica $p > 0$, entonces se deducirían las conjeturas de Weil. Fue éste el punto de inspiración de A. Grothendieck para la formulación de las conjeturas estándar sobre motivos (conjeturas que siguen todavía abiertas).

En [Œ 50(1961)] Serre construye un esquema proyectivo y no singular en característica $p > 0$ que no posee ninguna elevación en característica cero, ni siquiera como esquema formal.

En su ponencia [Œ 56(1962)], presentada en el *International Congress of Mathematicians* de Estocolmo, Serre ofrece una síntesis de la teoría de esquemas. Después de revisar los esquemas de Grassmann, de Hilbert, de Picard, y los esquemas de módulos de curvas de género dado, se centra en las propiedades principales de los esquemas sobre un anillo local, noetheriano y completo. A partir de este momento, el lenguaje de los esquemas se haría presente en sus textos (aunque jamás ha abusado de la dureza de esta terminología).

Cuerpos de Clases

La teoría de cuerpos de clases, un tema clásico en teoría de números, describe las extensiones abelianas de ciertos cuerpos por medio del denominado isomorfismo de reciprocidad. En ocasiones, el isomorfismo de reciprocidad puede hacerse explícito mediante un cálculo de símbolos (de los cuales, la ley de reciprocidad cuadrática de Gauss proporciona el primer ejemplo). El tratamiento cohomológico de la teoría de cuerpos de clases se inicia con G. Hochschild, E. Artin, J. Tate, A. Weil y T. Nakayama.

El primer libro que Serre publica es *Groupes algébriques et corps de classes* [GACC (1959)]. El libro se basa en el primer curso impartido por Serre [Œ 37(1956/57)] y en ideas de S. Lang, relativas a un desarrollo de la teoría de cuerpos de clases sobre cuerpos de funciones basado en el uso de recubrimientos y de técnicas propias de la geometría algebraica. En [GACC] Serre desarrolla la teoría de cuerpos de clases para cuerpos de funciones de una variable sobre un cuerpo de constantes finito. Los orígenes de la teoría se remontan a E. Artin, F. K. Schmidt y E. Witt. El lenguaje geométrico empleado es el del [FAC] y, ocasionalmente, el de A. Weil. En el capítulo I se resumen los resultados principales. El capítulo II se dedica a la teoría general de curvas algebraicas definidas sobre un cuerpo base algebraicamente cerrado. En los capítulos III-V se demuestra un teorema de M. Rosenlicht (1957) por el cual toda aplicación racional, $f : X \to G$, de una curva proyectiva, irreducible y no singular en un grupo algebraico conmutativo factoriza a través de una jacobiana generalizada, $J_{\mathfrak{m}}$. Las jacobianas generalizadas son grupos algebraicos conmutativos que poseen la interesante propiedad de proporcionar extensiones no triviales de variedades abelianas (la jacobiana usual J) por grupos algebraicos lineales, $L_{\mathfrak{m}}$. Los grupos $L_{\mathfrak{m}}$ proporcionan los símbolos locales de la teoría de cuerpos de clases. Se consideran asimismo cuestiones de racionalidad por descenso del cuerpo base, siguiendo el método de Weil. En el capítulo VI se demuestra que todo recubrimiento abeliano de una curva algebraica irreducible es imagen recíproca de una isogenia separable en una jacobiana generalizada, unívocamente determinada. La propiedad permite asociar a todo recubrimiento abeliano de una curva un conductor. Al tomar en consideración los distintos módulos $\mathfrak{m}$ de la curva, las jacobianas generalizadas forman un sistema proyectivo de espacios principales homogéneos. Cuando el cuerpo base es $\mathbb{C}$, la estructura algebraica de $J_{\mathfrak{m}}$ determina una estructura analítica, por la cual $J_{\mathfrak{m}}$ es un grupo de Lie complejo. La teoría de cuerpos de clases para los cuerpos de funciones de una variable sobre un cuerpo finito es abordada en el capítulo VI; en él se demuestra el isomorfismo de reciprocidad y se procede al cálculo explícito de los símbolos de restos de normas. El capítulo VII contiene un tratamiento cohomológico general de las extensiones de grupos algebraicos conmutativos.

El estudio de la cohomología de grupos, y en especial de la cohomología de Galois, sería el tema del curso [Œ 44(1958/59)]. El material correspondiente se integraría en el libro *Corps locaux* [CL (1962)].

El [CL] tiene por objetivo el proporcionar una exposición por vía cohomológica de la teoría local de cuerpos de clases en el caso aritmético; es decir relativa a cuerpos valorados y completos con respecto de una valoración discreta de cuerpo residual finito. En la primera parte del libro se encuentra el teorema de estructura de los anillos de valoración discreta completos. En la segunda parte se expone la teoría de la ramificación de D. Hilbert, con inclusión de la numeración superior debida a J. Herbrand, y contiene un capítulo sobre la representación de Artin asociada a una extensión de Galois finita de un cuerpo valorado, completo y de cuerpo residual perfecto. La *representación de Artin*, popularizada por Serre, había sido sugerida por A. Weil en una frase de su artículo *L'avenir des mathématiques* (1947). La tercera parte del [CL] se dedica a la cohomología de grupos; incluye la interpretación cohomológica del grupo de Brauer de un cuerpo, $\mathrm{Br}(k)$, y en ella se trabajan los axiomas de formación de clases, en el sentido de Artin-Tate. La teoría local de cuerpos de clases ocupa la cuarta parte del libro. El isomorfismo de reciprocidad se obtiene a través de una formación de clases asociada al cuerpo local de partida, y se precisa por medio de un cálculo explícito de símbolos de restos de normas que incorpora resultados de B. Dwork (1958). El conductor de Artin de un carácter se interpreta en términos de la teoría. Destaquemos asimismo que el libro propone numerosos ejercicios, difíciles en su mayoría. El artículo [Œ 75(1967)] contiene un resumen de la teoría local de cuerpos de clases.

En un anexo del [CL], Serre incluye una introducción al estudio de la cohomología de Galois no abeliana. Dada una extensión de Galois K/k y dado un grupo algebraico G definido sobre k, los elementos del conjunto $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), G(K))$ describen las clases de espacios principales homogéneos por G definidos sobre k que poseen un punto racional en K. Serre demuestra que $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), G(K)) = \{1\}$ cuando G es uno de los grupos algebraicos siguientes: aditivo $\mathbf{G}_a$, multiplicativo $\mathbf{G}_m$, lineal $\mathbf{GL}_n$, especial lineal $\mathbf{SL}_n$, simpléctico $\mathbf{Sp}_{2n}$. El resultado puede entenderse como una generalización del teorema 90 de Hilbert.

La teoría de los grupos pro-algebraicos conmutativos es desarrollada por Serre en [Œ 49(1960)], después del curso [Œ 47(59/60)] impartido sobre el tema. Su aplicación a la elaboración de una teoría de cuerpos de clases geométrica se encuentra en [Œ 51(1961)].

Fijemos un cuerpo base k algebraicamente cerrado. Un grupo casi-algebraico conmutativo se define como una clase de isogenia puramente inseparable de grupos algebraicos conmutativos, definidos sobre k. De los teoremas de estructura de los grupos algebraicos conmutativos, se deduce que todo grupo casi-algebraico conmutativo y conexo G posee un subgrupo lineal L tal que el grupo cociente G/L es una variedad abeliana; L es producto de un toro T por un grupo unipotente U; T es producto de grupos isomorfos a $\mathbf{G}_m$; y U posee una serie de composición cuyos cocientes son isomorfos a $\mathbf{G}_a$. Las clases de los grupos $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_m$, grupos cíclicos de orden primo y variedades abelianas simples se denominan grupos casi-algebraicos conmutativos elementales. Los grupos casi-algebraicos conmutativos forman una categoría abeliana, que se denota por $\mathcal{Q}$; los grupos casi-algebraicos conmutativos y finitos forman una subcategoría, que se denota por $\mathcal{Q}_0$. Si G es un grupo casi-algebraico conmutativo y G^0 la componente conexa de su elemento neutro, el cociente $\pi_0(G) := G/G^0$ es un grupo abeliano finito. La categoría de los grupos pro-algebraicos conmutativos se define como $\mathcal{P} = \mathrm{Pro}(\mathcal{Q})$. Sea $\mathcal{P}_0 = \mathrm{Pro}(\mathcal{Q}_0)$ la subcategoría de los grupos pro-finitos abelianos. La categoría $\mathcal{P}$ posee límites proyectivos y suficientes objetos proyectivos. Todo proyectivo de $\mathcal{P}$ es suma de proyectivos indescomponibles y los grupos proyectivos indescomponibles coinciden con las envolventes proyectivas de los grupos casi-algebraicos conmutativos elementales. El functor π_0 es exacto por la derecha; sus functores derivados por la izquierda permiten definir los grupos de homotopía $\pi_i(G)$, para todo grupo pro-algebraico y conmutativo. El grupo $\pi_1(G)$ se denomina, como de costumbre, el grupo fundamental de G. Los grupos pro-algebraicos conmutativos, conexos y simplemente conexos forman una subcategoría $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$. Para todo objeto G de $\mathcal{P}$, existen un grupo $\widetilde{G}$ en $\mathcal{S}$ y un morfismo $u : \widetilde{G} \to G$, únicos, cuyo núcleo y conúcleo pertenecen a $\mathcal{P}_0$. Más concretamente, se dispone de una sucesión exacta $1 \to \pi_1(G) \to \widetilde{G} \to G \to \pi_0(G) \to 1$. Mediante el functor recubrimiento universal, las categorías $\mathcal{P}/\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{S}$ son equivalentes. Sea ahora $\Lambda = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m) \simeq \mathbb{Z}[p^{-1}]$, en donde p denota el exponente característico de k. Si $\mathcal{M}$ es la subcategoría de los grupos pro-algebraicos de tipo multiplicativo, el functor X definido por $X(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_m)$ establece una equivalencia entre la categoría dual de $\mathcal{M}$ y la categoría $\mathcal{C}_\Lambda$ de los Λ-módulos. Después de calcular los grupos de homotopía de los grupos pro-algebraicos conmutativos elementales, Serre concluye en [Œ 49(1960)] que todo grupo pro-algebraico conmutativo es de dimensión cohomológica ≤ 2, si k es de característica positiva; y de dimensión cohomológica ≤ 1, si k es de característica cero.

Serre [Œ 51(1961)] contiene el tratamiento de la teoría local de cuerpos de clases en el caso geométrico; es decir, sobre un cuerpo K valorado y completo respecto de una valoración discreta de cuerpo residual k algebraicamente cerrado. Mediante la utilización de resultados generales debidos a M. Greenberg, Serre dota al grupo de las unidades U_K de K de una estructura de grupo pro-algebraico conmutativo sobre k, con lo cual dispone del grupo fundamental $\pi_1(U_K)$. El isomorfismo de reciprocidad se expresa en la elegante forma $\pi_1(U_K) \xrightarrow{\sim} G_K^{\mathrm{ab}}$, en donde G_K^{ab} designa el grupo de Galois de la extensión abeliana maximal de K. El isomorfismo de reciprocidad es compatible con la filtración natural de $\pi_1(U_K)$ y la filtración de G_K^{ab} aportada por los grupos de ramificación dotados de la numeración superior. Al igual que en el caso aritmético, el isomorfismo de reciprocidad se logra por vía cohomológica. En el caso geométrico existe asimismo una teoría del conductor, basada en las representaciones de Artin.

Cuestiones de racionalidad sobre las representaciones de Artin fueron planteadas por Serre en [Œ 46(1960)]. En este artículo, Serre pone de manifiesto la necesidad de disponer de una teoría del conductor en dimensión superior, análoga a la que proporciona en dimensión 1 la teoría de cuerpos de clases. Material básico para entender estos conceptos, en relación con la teoría de representaciones, se encuentra en el popular libro de Serre *Représentations linéaires des groupes finis* [RLGF (1968)], bien conocido por químicos y por físicos.

ANÁLISIS NO ARQUIMEDIANO

En lo que sigue, p denotará un número primo. La demostración de B. Dwork (1960) de la racionalidad de la función zeta de una variedad algebraica definida sobre un cuerpo finito (primera conjetura de Weil) favoreció el desarrollo experimentado por el análisis p-ádico en la década de los sesenta. Sea $Z(t) = \sum a_n t^n$ la función zeta de una hipersuperficie de un espacio afín sobre un cuerpo finito. Dwork probó que la serie $Z(t)$ es expresable como cociente de determinantes de Fredholm asociados a ciertos operadores de espacios de Banach p-ádicos, como paso previo para establecer su carácter racional. De la descomposición mencionada se deduce que la función $Z(t)$ es estrictamente meromorfa en todo el plano p-ádico.

Serre [Œ 55(1962)] pone de manifiesto que, en el ámbito del análisis p-ádico, las teorías de F. Riesz y de I. Fredholm son válidas para una misma familia de aplicaciones, formada por las aplicaciones nucleares (con traza) o las completamente continuas (límite de aplicaciones de rango finito). La memoria en cuestión, que es auto-contenida, proporciona una excelente introducción al estudio de estos temas. Serre traslada al contexto del análisis p-ádico parte de los resultados de la tesis de A. Grothendieck (1955) sobre productos tensoriales topológicos y aplicaciones nucleares. Dado un endomorfismo u completamente continuo de un espacio de Banach $E = c(I)$ sobre un cuerpo local K, Serre considera su determinante de Fredholm $\det(1 - tu)$; la serie $\det(1-tu) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m$ tiene radio de convergencia infinito y define una función entera de t. La resolvente de Fredholm de u, $P(t, u) = \det(1-tu)/(1-tu)$, es una función entera de t valorada en $\mathcal{L}(E, E)$. Dado un elemento $a \in K$, la teoría de Riesz, convenientemente adaptada, permite afirmar que el endomorfismo $1 - au$ es invertible si, y sólo si, $\det(1 - au) \neq 0$. Si éste es el caso, se satisface la relación $\det(1 - au) = (1 - au)P(a, u) = P(a, u)(1 - au)$. Si $a \in K$ es un cero de orden h de la función $\det(1 - tu)$, entonces el espacio E descompone unívocamente en suma directa de dos subespacios cerrados N, F invariantes por u. El endomorfismo $1 - au$ es nilpotente en N y es invertible en F; la dimensión de N es h. Serre demuestra que, dada una sucesión exacta de espacios de Banach E_i y aplicaciones d lineales y continuas, $0 \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_n \to 0$, y, dados endomorfismos u_i de E_i completamente continuos tales que $d_i \circ u_i = u_{i+1} \circ d$, $0 \leq i < n$, entonces $\prod_{i=1}^{n} \det(1 - tu_i)^{(-1)^i} = 1$. La fórmula es esencial para poder simplificar ciertos cálculos que intervienen en el teorema de Dwork.

La publicación de Serre [Œ 57(1961/62)] resume un curso sobre análisis p-ádico. Los mismos métodos p-ádicos permitieron a B. Dwork (1964) probar la ecuación funcional, conjeturada por Weil, de la función zeta de las variedades definidas sobre cuerpos finitos, pero, como es bien conocido, fueron insuficientes para demostrar la «hipótesis de Riemann» sobre la localización de sus ceros. La demostración de la «última conjetura» de Weil requeriría la teoría de esquemas de A. Grothendieck y el fino trabajo de P. Deligne (1974; 1977) sobre cohomología ℓ-ádica ($\ell \neq p$). Una exposición realizada por Serre sobre trabajos de Deligne se encuentra en [Œ 117(1978)].

Una variedad analítica G sobre un cuerpo local k que sea un grupo en esta categoría se denomina un grupo de Lie (o analítico) sobre k; su álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, se define como de costumbre. Cuando $k = \mathbb{Q}_p$ es el cuerpo de los números p-ádicos, se dice sencillamente que G es un grupo de Lie p-ádico. El estudio de los grupos de Lie p-ádicos y de las álgebras de Lie p-ádicas se remonta a R. Hooke (1942). Todo grupo de Lie p-ádico es un grupo topológico localmente compacto, totalmente discontinuo y sus subgrupos cerrados suficientemente pequeños son grupos pro-p (es decir, límite proyectivo de p-grupos finitos). Todo homomorfismo continuo entre grupos de Lie p-ádicos es analítico; todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie p-ádico es analítico. Si G es un grupo de Lie p-ádico y compacto, entonces G es finitamente generado topológicamente.

En 1962, Serre se da cuenta que los misteriosos grupos de Galois asociados a los módulos de Tate, de los cuales hablaremos más adelante, son grupos de Lie p-ádicos; por tanto, poseen una álgebra de Lie, abordable por los métodos propios de la teoría. La constancia de este hecho abría un campo de enormes posibilidades.

El libro de Serre *Lie Algebras and Lie Groups* [LALG (1965)] está basado en un curso impartido en la Universidad de Harvard. El libro consta de dos partes; en la primera, Serre expone la teoría general de álgebras de Lie y la teoría clásica de las representaciones del álgebra $\mathfrak{sl}_n$, sobre un cuerpo base algebraicamente cerrado de característica cero. En la segunda parte del libro, Serre expone una teoría de variedades analíticas sobre un cuerpo completo k, ya sea real, complejo o ultramétrico. Presenta en este contexto la teoría de los grupos de Lie, supuesto el cuerpo base de característica cero. Hace especial hincapié en aquellos aspectos de la teoría relacionados con grupos formales, estudiando su biálgebra asociada. En el caso ultramétrico, y k localmente compacto, demuestra que los subgrupos compactos maximales de $\mathbf{GL}(n,k)$ coinciden con los grupos de estabilizadores de las $\mathcal{O}$-redes de k^n y son, por tanto, conjugados de $\mathbf{GL}(n,\mathcal{O})$, en donde $\mathcal{O}$ denota el anillo de la valoración de k.

En [Œ 65(1965)] Serre clasifica las variedades analíticas p-ádicas compactas. Dado un cuerpo k, localmente compacto por la topología definida por una valoración discreta de anillo de valoración A, toda variedad analítica compacta X sobre k, de dimensión n en cada uno de sus puntos, es isomorfa a una suma disjunta finita de copias de la bola A^n. Dos sumas rA^n y $r'A^n$ son isomorfas si, y sólo si, $r \equiv r' \pmod{q-1}$, en donde q denota el número de elementos del cuerpo residual de k. El número $i(X) = r \pmod{q-1}$ es un invariante de la variedad, que Serre interpreta analíticamente.

Cohomología de Grupos Pro-finitos y de Grupos de Lie p-ádicos

Por definición, un grupo pro-finito es un límite proyectivo de grupos finitos; un caso particular son los grupos pro-p, ya mencionados. Los grupos de Galois de las extensiones no finitas y los grupos de Lie p-ádicos compactos proporcionan los ejemplos más interesantes de grupos pro-finitos. Así, el grupo aditivo de los enteros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, y los grupos $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}_p), \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ son grupos pro-finitos; el primero de ellos es, además, un grupo pro-p.

Las principales propiedades de la cohomología de los grupos pro-finitos fueron el tema del curso [Œ 59(1962/63)]. Constituyen el capítulo I de los tres que contiene el libro *Cohomologie Galoisienne* [CG (1964)]. Los capítulos II y III de [CG] se dedican al estudio de la cohomología de Galois, en el caso conmutativo y en el caso no conmutativo, respectivamente. A todo grupo pro-finito $G = \varprojlim G_i$ que opera de manera continua en un grupo abeliano discreto A, se le asocian grupos de cohomología $H^q(G, A)$, mediante el uso de cocadenas continuas. Si $A = \varinjlim A_i$ es un límite inductivo de G_i-módulos discretos, se satisface que $H^q(G, A) = \varinjlim H^q(G_i, A_i)$. En el capítulo I, dados un primo p y un grupo pro-finito G, se definen los conceptos de p-dimensión cohomológica, $\mathrm{cd}_p(G)$, y de dimensión cohomológica, $\mathrm{cd}(G)$. Se caracterizan ciertos grupos pro-p, denominados de Poincaré, que admiten una teoría de dualidad y son de dimensión cohomológica finita.

El trabajo [Œ 60(1963/64)] expone la teoría de M. Lazard relativa a grupos de Lie p-ádicos, presentada por Serre en el *Séminaire Bourbaki.* Si k es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ y G es un grupo algebraico definido sobre k, el grupo $G(k)$ formado por los puntos k-racionales de G posee una estructura canónica de grupo de Lie sobre k la cual, por restricción de escalares, proporciona un grupo de Lie p-ádico. Se ve que todo grupo topológico p-valorado y completo G de rango finito es un grupo de Lie p-ádico; si el rango de G es n, la dimensión cohomológica de G es igual a n. Un grupo topológico es un grupo analítico p-ádico si, y sólo si, posee un subgrupo abierto H que es un grupo pro-p y tal que $(H, H) \subset H^p$, si $p \neq 2$; o bien $(H, H) \subset H^4$, si $p = 2$. Si G es un grupo de Lie p-ádico y compacto tal que $\mathrm{cd}(G) = n < \infty$, entonces G es un grupo pro-p de Poincaré de dimensión n y el carácter $\aleph(x) = \det \mathrm{Ad}(x)$ proporciona la dualidad de G, en donde $\mathrm{Ad}(x)$ es el automorfismo del álgebra de $\mathfrak{g}$ definido por x. Condición necesaria para que un grupo analítico p-ádico compacto sea de dimensión cohomológica finita es que sea libre de torsión. Serre plantea si la condición es asimismo suficiente. En la exposición se comparan la cohomología de un grupo de Lie p-ádico G y la de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

El trabajo [Œ 66(1965)] se dedica al estudio de la dimensión cohomológica de los grupos pro-finitos. Serre demuestra que si G es un grupo pro-finito, libre de p-torsión, para todo subgrupo U de G abierto se satisface que $\mathrm{cd}_p(U) = \mathrm{cd}_p(G)$; la prueba de este resultado es complicada y en ella Serre utiliza potencias de Steenrod, una herramienta adquirida en sus días de topólogo. El teorema anterior y resultados de M. Lazard (1965) permiten probar que todo grupo de Lie p-ádico compacto libre de p-torsión y de dimensión n satisface que $\mathrm{cd}_p(G) = n$. Como corolario, Serre obtiene que todo grupo pro-p sin torsión que contenga un subgrupo abierto libre es libre. Serre se pregunta si el análogo discreto de la afirmación anterior es cierto. J. Stallings (1968) y R. Swan (1969) probarían que ello es así: todo grupo G sin torsión que contenga un subgrupo de índice finito libre es libre.

Años después, Serre dedicaría a J. Tate el artículo [Œ 173(1998)] sobre cohomología de grupos pro-finitos. Dados un grupo pro-finito G de p-dimensión cohomológica finita y un G-módulo discreto A, que sea un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$, se considera la característica de Euler-Poincaré $e(G, A) := \sum(-1)^i \dim H^i(G, A)$, en el supuesto que $\dim H^i(G, A) < \infty$, para todo i. Serre demuestra que existe una distribución μ_G sobre G_{reg} con valores en $\mathbb{Q}_p$ tal que $e(G, A) = \langle \varphi_A, \mu_G \rangle$, en donde $\varphi_A : G_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{Z}_p$ denota el carácter de Brauer sobre el subgrupo de G formado por los elementos regulares.

Cohomología de Galois

Parte del curso [Œ 59(1962/63)] y la segunda parte del libro [CG] se dedican al estudio de la cohomología de Galois en el caso conmutativo, con especial énfasis en los resultados de J. Tate. Al cabo de treinta años, el estudio de la cohomología de Galois sería reemprendido por Serre en los tres cursos [Œ 153(1990/91), 156(1991/92), 165(1993/94)].

Sea $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ el grupo de Galois de una extensión de cuerpos y supongamos dado un G-módulo discreto A. Los grupos de cohomología de Galois $H^q(\mathrm{Gal}(K/k), A)$ suelen denotarse también por $H^q(K/k, A)$, o bien, simplemente, por $H^q(k, A)$ cuando $K = k_s$ es una clausura separable de k. La cohomología de Galois permite definir el concepto de dimensión cohomológica de un cuerpo, $\mathrm{cd}(k)$. Los grupos de Demuškin son grupos de Poincaré que intervienen en el estudio del grupo de Galois de la extensión pro-p maximal de un cuerpo local, extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Sus propiedades fueron expuestas por Serre en el *Séminaire Bourbaki* [Œ 58(1962/63)], en el curso [Œ 59(1962/63)] y en [CG].

Sean k un cuerpo de números, $k(p)/k$ la extensión pro-p no ramificada maximal de k y $G = \mathrm{Gal}(k(p)/k)$ y denotemos por C_p el grupo de p elementos. El estudio de los enteros $d = \dim H^1(G, C_p)$, $r = \dim H^2(G, C_p)$, que proporcionan el número mínimo de generadores de G, en sentido topológico, y el número mínimo de relaciones en un sistema de d generadores de G, permitió a E. S. Golod y I. Shafarevich (1964) probar la existencia de torres infinitas de cuerpos de clases edificadas sobre cuerpos de números. El teorema de Golod y Shafarevich fue expuesto por Serre en [CG] y en [Œ 69(1966)].

La obstrucción asociada a un problema de inmersión de Galois, definido por una extensión de Galois L/K y por una extensión central del grupo $\mathrm{Gal}(L/K)$, viene dada por una clase de cohomología, la anulación de la cual caracteriza la resolubilidad del problema. Cuando el núcleo de la extensión central es C_2, la clase en cuestión se identifica con un elemento de $H^2(K, C_2) = \mathrm{Br}_2(K)$. Serre [Œ 131(1984)], en un artículo dedicado a J. Moore, calcula la obstrucción para ciertos problemas de inmersión de Galois, denominados espinoriales, en función de la segunda clase de Stiefel-Whitney de una forma traza $\mathrm{Tr}(x^2)$. Mediante la utilización de la fórmula de Serre, N. Vila (1984, 1985) demostró que el doble recubrimiento no trivial del grupo alternado, $\widetilde{A}_n = 2A_n$, es grupo de Galois de una extensión regular de $\mathbb{Q}(T)$, para infinitos valores de $n \geq 4$. J-F. Mestre (1990) extendió el resultado anterior a todo valor de $n \geq 4$.

En [Œ 151(1990), 152(1990)] Serre interpreta ciertos cálculos, efectuados por J-F. Mestre (1990) en la realización de $\widetilde{A}_n$, en términos de invariantes cohomológicos asociados a recubrimientos de curvas $\pi : Y \to X$ (proyectivas, no singulares y definidas sobre $\mathbb{C}$) de los que supone que todos sus índices de ramificación son impares. Mediante una fórmula, Serre relaciona los invariantes cohomológicos, valorados en $H^i(X, C_2)$, con las clases de Stiefel-Whitney del fibrado ortogonal $E_{Y/X}$ asociado al divisor diferente $D(Y/X)$. La fórmula es demostrada mediante el estudio del comportamiento de características theta de X bajo la acción de π^*. En [Œ 152(1990)] Serre se pregunta si existe una fórmula que abarque como casos particulares las fórmulas demostradas en [Œ 131(1984)] y en [Œ 152(1990)]. La unificación de ambas fórmulas sería efectuada por H. Esnault, B. Kahn y E. Vieweg (1993). El tratamiento de estos problemas de inmersión de Galois se contempla en el libro *Topics in Galois Theory* [TGT (1992)]. Uno de los principales objetivos de este libro es el estudio del problema inverso de la teoría de Galois; está basado en un curso impartido por Serre en la Universidad de Harvard.

El curso impartido por Serre [Œ 156(1991/92)] versó sobre la cohomología de Galois de las extensiones transcendentes puras. Supongamos que K es un cuerpo dotado de una valoración discreta, v, de cuerpo residual k. Sea C un $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-módulo discreto no ramificado en v y tal que $nC = 0$, para cierto entero $n > 0$, primo con la característica de K. Dada una clase de cohomología $\alpha \in H^i(K, C)$, Serre considera las nociones de residuo de α en v, polo de α en v y valor $\alpha(v)$. Cuando $K = k(X)$ es el cuerpo de funciones de una curva proyectiva, lisa y conexa definida sobre k, Serre demuestra que tales clases de cohomología satisfacen una fórmula de residuos y un análogo del teorema de Abel. La teoría se aplica a la resolución de problemas de especialización del grupo de Brauer de K en el grupo de Brauer de k. Si X es una recta, $x \in X(K)$, y $\alpha \in \mathrm{Br}_n(K)$, entonces $\alpha(x) \in \mathrm{Br}_n(k)$, siempre que x no sea un polo de α. Serre se ocupa de la función $\alpha(x)$ y, en particular, del lugar $V(\alpha)$ de sus ceros. En [Œ 150(1990)] trata el caso $K = \mathbb{Q}(T_1, \ldots T_r)$, $n = 2$; los resultados se completan con estimaciones asintóticas sobre el número de ceros de α obtenidas mediante argumentos de criba y que dependen del número de componentes $\mathbb{Q}$-irreducibles del divisor polar de α. Resultados de anulación de clases de cohomología por cambio de base racional fueron utilizados por J-F. Mestre (1994, 1998) en la resolución de problemas de inmersión de Galois sobre $\mathbb{Q}(T)$ relativos a $6A_6$ y $6A_7$.

Cohomología de Galois de Grupos Algebraicos Lineales

En la ponencia [Œ 53(1962)] presentada al coloquio de Bruselas sobre grupos algebraicos, Serre formuló las denominadas conjetura I y conjetura II relativas a la cohomología de los grupos algebraicos lineales.

Dado un grupo algebraico G definido sobre un cuerpo k, se dispone del grupo de cohomología $H^0(k, G) = G(k)$ y del conjunto de cohomología $H^1(k, G)$. La cohomología de Galois no abeliana interviene especialmente en la resolución de problemas de descenso del cuerpo base. Como ya hemos comentado, la teoría básica se encuentra en [CL] y en [CG]. En lo que sigue supondremos el cuerpo base k perfecto.

La conjetura I afirma que $H^1(k, G) = 0$, si $\mathrm{cd}(k) \leq 1$ y G es un grupo lineal conexo.

La conjetura II afirma que $H^1(k, G) = 0$, si $\mathrm{cd}(k) \leq 2$ y G es un grupo lineal semisimple y simplemente conexo.

Por aquel entonces, se conocía la validez de la conjetura I en los casos siguientes: k cuerpo finito (S. Lang); k de característica cero y casi algebraicamente cerrado (T. Springer); G lineal conexo y resoluble o bien G grupo semisimple clásico (Serre). La conjetura I sería probada por R. Steinberg (1965). El espléndido trabajo de Steinberg es explicado en la versión inglesa de [CG].

Si k es de característica cero, la conjetura II implica la conjetura I. M. Kneser (1965) probó la conjetura II cuando k es un cuerpo p-ádico, y G. Harder (1965) hizo lo propio cuando k es un cuerpo de números algebraicos totalmente imaginario y G carece de factores de tipo E_8. La última parte de la prueba (el caso de tipo E_8) es debida a V. I. Chernusov (1989). Más generalmente, para todo cuerpo de números algebraicos k y para todo grupo algebraico lineal G semisimple y simplemente conexo, la aplicación $H^1(k, G) \to \prod_{v \,\mathrm{real}} H^1(k_v, G)$ es biyectiva (≪principio de Hasse≫), de acuerdo asimismo con una conjetura de Serre. Una exposición detallada se encuentra en V. Platonov y A. Rapinchuk (1991).

El estudio de la cohomología de Galois de los grupos lineales semisimples es reemprendido por Serre en el curso [Œ 153(1990/91)]. Uno de sus objetivos es hacer explícitas relaciones existentes entre el conjunto de cohomología no abeliana $H^1(k, G)$ y ciertos grupos de cohomología de Galois $H^i(k, C)$. Consideremos dados: un grupo algebraico liso y lineal G, definido sobre un cuerpo k_0; un entero $i \geq 0$; y un módulo de Galois C sobre k_0, de orden primo con la característica de k_0. Un invariante cohomológico de tipo $H^i(-, C)$ es, por definición, un morfismo del functor $H^1(k, G)$ en el functor $H^i(k, C)$, definido sobre la categoría de las extensiones k de k_0. Supongamos que la característica de k es distinta de 2. Las clases de Stiefel-Whitney $w_i : H^1(k, \mathbf{O}(q)) \to H^i(k, C_2)$; el invariante de Arason $a : H^1(k, \mathbf{Spin}(q)) \to H^3(k, C_2)$; el invariante de Merkurjev-Suslin $ms : H^1(k, \mathbf{SL}_D) \to H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$, así como los invariantes de Rost, que se definen para los distintos grupos lineales simplemente conexos, proporcionan ejemplos de la situación anterior. Serre estudia el comportamiento de estos invariantes por torsión y, con ayuda de los mismos, proporciona descripciones *ad hoc* de los conjuntos $H^1(k, G)$.

E. Bayer y H. W. Lenstra (1990) habían obtenido un criterio cohomológico necesario para la existencia de bases normales autoduales en álgebras de Galois. Criterios suficientes para la existencia de tales bases fueron obtenidos por E. Bayer y Serre [Œ 163(1994)]. Dados un grupo finito G y un G-módulo M, una clase x de $H^q(G, M)$ se denomina negligible si, para todo cuerpo k y todo homomorfismo continuo $\varphi : \mathrm{Gal}(k_s/k) \to G$, se tiene que $\varphi^*(x) = 0$ en $H^q(k, M)$. En la obtención de los criterios mencionados, el concepto de clase de cohomología negligible juega un papel destacado.

En el curso [Œ 165(1993/94)], Serre prosigue el estudio de las clases de cohomología negligibles y asocia invariantes cohomológicos a álgebras étales. Por ejemplo, si E es una álgebra étale de rango n sobre un cuerpo k de característica $\neq 2$, la forma traza $q_E = \mathrm{Tr}(x^2)$ es una forma cuadrática no degenerada; las clases de Stiefel-Whitney $w_i(q_E) \in H^i(k, C_2)$ proporcionan invariantes cohomológicos. Serre demuestra que son, esencialmente, los únicos. Mediante el uso de estos invariantes obtiene una caracterización de la forma traza en rango ≤ 7. Concluye con la siguiente aplicación al problema de E. Noether: dada la extensión central no trivial del grupo alternado $\widetilde{A}_7 = 2A_7$, y dado un subgrupo G de $\widetilde{A}_7$ incluido en un grupo simétrico S_N, entonces el subcuerpo de G-invariantes de $\mathbb{Q}(T_1, \ldots, T_N)$ no es una extensión transcendente pura de $\mathbb{Q}$.

La presentación de progresos recientes sobre cohomología de Galois, así como la formulación de algunos de sus problemas abiertos, fueron el objeto de la exposición de Serre [Œ 166(1995)], en el *Séminaire Bourbaki*. En ella Serre considera grupos algebraicos, lisos y lineales, definidos sobre un cuerpo k. A todo grupo G semisimple y conexo cuyo sistema de raíces sobre k_s sea irreducible, Serre asocia un conjunto de números primos, $S(G)$, que desempeñan un papel especial en el estudio del conjunto de cohomología $H^1(k, G)$ y en el de sus invariantes cohomológicos. Por ejemplo, todos los divisores del orden del centro del recubrimiento universal $\widetilde{G}$ de G están incluidos en $S(G)$. Un teorema de J. Tits (1992) asegura que, para toda clase $x \in H^1(k, G)$, existe una extensión k_x/k de grado $S(G)$-primario que anula x (es decir, tal que x es cero en $H^1(k_x, G)$). Serre se pregunta si, dadas extensiones finitas k_i/k cuyos grados sean primos con $S(G)$, es cierto que la aplicación $H^1(k, G) \to \prod H^1(k_i, G)$ es inyectiva. Serre presenta la resolución de R. Steinberg de la conjetura I, para cuerpos perfectos de dimensión cohomológica ≤ 1 y G conexo, así como extensiones y variantes de la misma que hacen referencia a un cuerpo base imperfecto o bien que exigen, únicamente, $\mathrm{cd}_p(G) \leq 1$ para todo $p \in S(G)$. Serre menciona los casos en que la conjetura II ha sido probada: grupos de tipo $\mathbf{SL}_D$ asociados a los elementos de norma 1 de una k-álgebra central y simple D, de rango n^2 (llamados también de tipo A_n interior), por A. S. Merkurjev y A. Suslin (1983, 1985); grupos de espinores (en particular, todos los de tipo B_n), por A. S. Merkurjev; los grupos clásicos (salvo un caso D_4), por E. Bayer y R. Parimala (1995); y grupos de tipo G_2 y F_4, por el propio Serre. En conclusión, la conjetura II queda pendiente para los tipos E_6, E_7, E_8 y en un caso de tipo D_4.

Grupos Aritméticos. Subgrupos de Congruencia

El estudio de los subgrupos de congruencia de un grupo aritmético se remonta a F. Klein. De hecho, Klein sabía que el grupo modular $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ posee *muchos* subgrupos de índice finito que no son subgrupos de congruencia.

Consideremos un cuerpo global k y un conjunto finito S de plazas de k; supondremos que S contiene el conjunto S_∞ de todas las plazas arquimedianas de k. Sea $\mathcal{O}$ el anillo de S-enteros de k y denotemos por $\mathbb{A}_k$ y $\mathbb{A}_k^S$ los anillos de adeles y de S-adeles de k, respectivamente. Escribiremos $\mathbb{A}_k^f$ para denotar el anillo de las adeles finitas de k, obtenido al tomar $S = S_\infty$. Dado un grupo algebraico lineal G definido sobre k, consideraremos fijada una representación fiel $G \to \mathbf{GL}_n$. Sea $\Gamma := G(k) \cap \mathbf{GL}_n(\mathcal{O})$.

En $G(k)$ se distinguen dos tipos de subgrupos: los subgrupos S-aritméticos y los subgrupos de S-congruencia. Un subgrupo $\Gamma' \subseteq G(k)$ se denomina S-aritmético si $\Gamma \cap \Gamma'$ es de índice finito en Γ y en Γ'.

Sean $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{O}$ un ideal y $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}, \mathfrak{q}) := \ker(\mathbf{GL}_n(\mathcal{O}) \to \mathbf{GL}_n(\mathcal{O}/\mathfrak{q}))$. Definamos $\Gamma_\mathfrak{q} := \Gamma \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}, \mathfrak{q})$. Un subgrupo $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ se denomina de S-congruencia si contiene un subgrupo $\Gamma_\mathfrak{q}$, para algún ideal $\mathfrak{q} \neq 0$.

Puesto que todo subgrupo de S-congruencia es S-aritmético, se tiene un homomorfismo de grupos topológicos $\pi : \widehat{G(k)} \to \overline{G(k)}$, en donde $\widehat{G(k)}$ denota el completado de $G(k)$ por la topología definida por los subgrupos de S-congruencia y $\overline{G(k)}$, por los subgrupos S-aritméticos. El grupo $\overline{G(k)}$ se identifica con la adherencia de $G(k)$ en $G(\mathbb{A}_k^f)$. Sea $C^S(G)$ el núcleo de π. El grupo $C^S(G)$, que coincide con $\ker(\pi)|(\widehat{\Gamma})$, es pro-finito y π es un epimorfismo.

El problema de los subgrupos de S-congruencia plantea la caracterización de los grupos G para los cuales π es un isomorfismo. Cuando G es un toro o un grupo algebraico lineal unipotente, el problema tiene respuesta afirmativa. Cuando G es un grupo algebraico lineal no simplemente conexo, el problema tiene respuesta negativa. Los grupos de Chevalley proporcionan un marco adecuado para el estudio del problema de los subgrupos de congruencia. (Recordemos que un grupo algebraico lineal se denomina de Chevalley si posee un toro que descompone sobre k cuya dimensión es igual al rango de G.)

H. Bass, J. Milnor y Serre [Œ 74(1967), 103(1975)] precisaron la conjetura de los subgrupos de S-congruencia en la forma siguiente: Para todo grupo G de Chevalley de rango ≥ 2, simplemente conexo y simple, la extensión de grupos $1 \to C^S(G(k)) \to \widehat{G(k)} \to \overline{G(k)} \to 1$ es central y, además, $C^S(G) = \mu(k)$, si k es totalmente imaginario, y $C^S(G) = \{1\}$, en caso contrario. Aquí $\mu(k)$ denota el subgrupo de k^* formado por las raíces de la unidad. Si $S = S_\infty$, se habla, simplemente, de la conjetura de los subgrupos de congruencia.

Previamente, H. Bass, M. Lazard y Serre [Œ 61(1964)] habían probado que todo subgrupo de índice finito de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, o de $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$, es un subgrupo de congruencia. El mismo resultado fue obtenido, de manera independiente, por J. Mennicke. La demostración de Bass, Lazard y Serre, por inducción sobre $n \geq 3$, utiliza métodos de teoría K algebraica y se basa en el cálculo previo de la cohomología de los grupos pro-finitos $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ con coeficientes en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Los resultados de M. Lazard relativos a la cohomología de grupos de Lie p-ádicos son asimismo necesarios.

En [Œ 74(1967)] H. Bass, J. Milnor y Serre prueban la conjetura de los subgrupos de congruencia cuando k es un cuerpo de números algebraicos, $G = \mathbf{SL}_n$, $n \geq 3$, y $G = \mathbf{Sp}_{2n}$, $n \geq 2$. Para ello determinan los correspondientes símbolos de Mennicke universales asociados a estos grupos y al anillo de enteros de un cuerpo k totalmente imaginario. El cálculo de los símbolos de Mennicke puede ser efectuado gracias al conocimiento explícito de leyes de reciprocidad y símbolos de restos de normas, propios de la teoría de cuerpos de clases, así como de otros teoremas fundamentales en teoría de números.

Como generalización de una construcción de grupos metaplécticos, debida a A. Weil (1964), C. Moore (1964) había sugerido la existencia de una posible sucesión exacta $1 \to \mu(k) \to \widetilde{G} \to G(\mathbb{A}_k) \to 1$, que descompone sobre $G(k) \subseteq G(\mathbb{A}_k)$, de núcleo pro-finito contenido en el centro de $\widetilde{G}$, y universal con respecto de estas propiedades. Al considerar la clase de cohomología en $H^2(G(\mathbb{A}_k), \mu(k))$ que corresponde a la sucesión exacta anterior, la conjetura metapléctica puede formularse cohomológicamente. En [Œ 74(1976)] se demuestra la equivalencia de la conjetura de los S-subgrupos de congruencia, cuando k es un cuerpo de números algebraicos totalmente imaginario, con la conjunción de dos conjeturas: la conjetura metapléctica y la conjetura que afirma que el subgrupo $C^S(G)$ está contenido en el centro de $\widehat{G(k)}$.

La solución del problema de los subgrupos de congruencia para el caso en que G es un grupo de Chevalley que descompone fue obtenida por H. Matsumoto (1966, 1969), utilizando los resultados conocidos para $\mathbf{SL}_3, \mathbf{Sp}_4$. El problema de los subgrupos de congruencia, así como su conexión con la teoría de Moore de los recubrimientos universales de $G(\mathbb{A}_k^f)$, fueron presentados por Serre en el *Séminaire Bourbaki* [Œ 77(1966/67)].

Serre [Œ 86(1970)] trata el problema de los subgrupos de S-congruencia para $\mathbf{SL}_2$ y k un cuerpo global. Si $\#S \geq 2$, demuestra que la respuesta es casi afirmativa, por cuanto que $C^S(\mathbf{SL}_2)$ es un grupo finito cíclico. Si $\#S = 1$, demuestra que el problema tiene respuesta esencialmente negativa, por cuanto que $C^S(\mathbf{SL}_2)$ es un grupo infinito; la infinitud resulta de que Γ^{ab} es infinito. La demostración es muy interesante; en el caso $\#S = 1$ utiliza métodos de aritmética sofisticados (que incluyen la teoría de cuerpos de clases); en el caso $\#S > 1$ utiliza herramientas topológicas. Daremos a continuación algunos detalles de la misma.

En el caso $\#S \geq 2$, Serre demuestra que $C^S(G)$ está contenido en el centro de $\widehat{G(k)}$ y utiliza la teoría de C. Moore. La finitud de $C^S(\mathbf{SL}_2)$ implica consecuencias importantes. Así, dados un subgrupo S-aritmético $N \subseteq \mathbf{SL}_2(\mathcal{O})$, un cuerpo K de característica cero y una representación $\rho : N \to G(K)$, existe un subgrupo $N_1 \subseteq N$ tal que la restricción de ρ a N_1 es algebraica. La representación ρ es semisimple. Para todo $k[N]$-módulo V de rango finito sobre K, se satisface que $H^1(N, V) = 0$; en particular, al tomar por V la representación adjunta de N, se obtiene que N es rígido.

Si $\#S = 1$, la demostración distingue tres casos: $\operatorname{caract}(k) = p > 0$, $k = \mathbb{Q}$, k cuerpo cuadrático imaginario. En el caso de característica p, Serre utiliza el espacio simétrico asociado al grupo $\mathbf{SL}_2(k_v)$, en donde k_v denota el completado de k en la única plaza perteneciente a S. El grupo $\mathbf{PGL}_2(k_v)$ opera de manera natural en un árbol X cuyos vértices se corresponden con las clases de homotecia de $\mathcal{O}_v$-redes de k^2. El árbol X desempeña entonces el mismo papel que el semiplano de Poincaré para el grupo $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{R})$. El grupo Γ opera en X y los estabilizadores de los vértices de X proporcionan los subgrupos compactos maximales de $\mathbf{PGL}_2(k_v)$. Al ser X contráctil, la homología de Γ se relaciona con la homología del grafo cociente X/Γ. En el caso cuadrático imaginario y $G = \mathbf{SL}_2$, X es el espacio hiperbólico de dimensión 3 y X/Γ resulta ser una variedad de dimensión 3, orientable y no compacta. Serre utiliza y describe una compactificación canónica, debida a A. Borel, del espacio de Riemann simétrico X asociado a $G(\mathbb{C})$, válida para todo grupo algebraico lineal G simple sobre $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}$-rango igual a 1. El borde de X es una suma disjunta de toros E_i (curvas elípticas) que admiten el cuerpo k como cuerpo de multiplicación compleja. Puesto que X es contráctil, la homología de Γ y la de X/Γ se identifican. La información obtenida permite el estudio de $\mathbf{SL}_2(\mathcal{O})^{\mathrm{ab}}$.

En los artículos [Œ 62(1964), 89(1971)], Serre trata el problema de los grupos de congruencia para las variedades abelianas. Demuestra que si A es una variedad abeliana definida sobre un cuerpo de números algebraicos k, todo subgrupo de congruencia de $A(k)$ es de índice finito. Para alcanzar el resultado, demuestra la anulación de los grupos de cohomología de ciertas álgebras de Lie p-ádicas asociadas a A. Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

Cohomología de Grupos Aritméticos

El curso [Œ 84(1968/69)] versó sobre grupos discretos. Una parte de su contenido aparecería publicado en el libro *Arbres, amalgames,* $\mathbf{SL}_2$ [AA (1977)]; otra, en los trabajos [Œ 83(1969), 88(1971)]. Las notas del curso fueron tomadas por H. Bass, que colaboró en la edición del libro. Serre muestra cómo se puede reconstruir un grupo G que opera en un árbol X a partir del cociente X/G y de los estabilizadores de los vértices y de las aristas. En particular, si estos estabilizadores son triviales, G es libre. Los resultados se aplican al estudio de los grupos $\mathbf{SL}_2(k)$, en donde k es un cuerpo local. El grupo $\mathbf{SL}_2(k)$ opera sobre el árbol asociado al espacio k^2. De esta forma, Serre obtiene un teorema de Y. Ihara por el cual todo subgrupo discreto y sin torsión de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ es libre.

Sean k un cuerpo global y S un conjunto finito de plazas de k. Sea L un grupo algebraico, lineal y reductivo, definido sobre k. Serre [Œ 83(1969), 88(1971)] aborda el estudio de la cohomología de los subgrupos S-aritméticos Γ contenidos en $L(k)$. Para ello, el grupo Γ se interpreta como un subgrupo discreto de un producto finito $G = \prod G_\alpha$ de grupos de Lie (reales o ultramétricos). La principal herramienta viene dada por los inmuebles de Bruhat-Tits asociados a los grupos de Lie v-ádicos $L(k_v)$, $v \in S\backslash S_\infty$. Los resultados más importantes hacen referencia a acotaciones de la dimensión cohomológica $\mathrm{cd}(\Gamma)$, a propiedades de finitud, y a la característica de Euler-Poincaré $\aleph(\Gamma)$.

A. Borel y Serre [Œ 90(1970)] prueban que si G es un grupo algebraico, lineal, reductivo y conexo, definido sobre $\mathbb{Q}$, carente de caracteres no triviales, se puede asociar a G una variedad compacta, $\overline{X}$, cuyo interior, X, es un espacio homogéneo por la derecha de $G(\mathbb{R})$ isomorfo a un cociente $K\backslash G(\mathbb{R})$, en donde K denota un subgrupo compacto maximal de $G(\mathbb{R})$. El borde $\partial\overline{X}$ es del mismo tipo de homotopía que el inmueble de Tits $T(\mathcal{P})$ definido por el conjunto $\mathcal{P}$ de los subgrupos parabólicos de G. $T(\mathcal{P})$ es un complejo simplicial cuyas caras se corresponden con los elementos $P \in \mathcal{P}$. Todo subgrupo aritmético $\Gamma \subseteq G(\mathbb{Q})$ opera propiamente sobre $\overline{X}$ y el cociente $\overline{X}/\Gamma$ es compacto. Si Γ es sin torsión, la cohomología de Γ se identifica con la de $\overline{X}/\Gamma$ y verifica una cierta forma de dualidad; en particular, la dimensión cohomológica de Γ viene dada por $\mathrm{cd}(\Gamma) = \dim(X) - \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(G)$. Si $G = \mathbf{SL}_n$, el espacio $\overline{X}$ es, esencialmente, un espacio definido por C. L. Siegel, que resulta de adjuntar a X puntos frontera y puntos ideales por medio de la teoría de la reducción de formas cuadráticas.

A. Borel y Serre [Œ 91(1971)] estudian el caso S-aritmético. Demuestran un teorema de dualidad para la cohomología de los grupos S-aritméticos y determinan la dimensión cohomológica de estos grupos. Borel y Serre parten de un grupo algebraico lineal G semisimple, definido sobre un cuerpo local K. El grupo $G(K)$ se dota de una estructura de sistema de Tits $(G(K), B, N, S)$. El grupo de Weyl $W = N/(B \cap N)$ es un grupo de Coxeter finito de rango igual al rango de G sobre K. El grupo $G(K)$ opera en el inmueble de Tits Y asociado al sistema de Tits. Si X denota el inmueble de Bruhat-Tits de G, el espacio $X \cup Y^{\mathrm{top}}$ compactifica X y es contráctil. La cohomología con soporte compacto de X viene entonces dada por $H_c^i(X, \mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}^i(Y^{\mathrm{top}}, \mathbb{Z})$. Sean ahora G un grupo algebraico semisimple sobre un cuerpo de números algebraicos k y $\Gamma \subseteq G(k)$ un subgrupo S-aritmético. Γ es un subgrupo discreto de $\prod_{v\in S} G(k_v)$ y las construcciones anteriores permiten asociar a G un espacio $X_S = \overline{X}_\infty \times \prod_{v\in S\backslash S_\infty} X_v$, en el que $G(k)$ y, a fortiori, Γ operan. X_v es el inmueble de Bruhat-Tits de G sobre k_v; $\overline{X}_\infty$ es la variedad compacta asociada al grupo algebraico $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G)$, obtenido por restricción de escalares. Sean $d = \dim(X_\infty)$, $m = \dim(X_S) - \ell = d - \ell + \sum_{v\in S\backslash S_\infty} \ell_v$, en donde ℓ, ℓ_v denotan el rango de G sobre k, k_v, respectivamente. Si Γ es sin torsión, Borel y Serre obtienen que $H^q(\Gamma, M) \simeq H_{m-q}(\Gamma, I_S \otimes M)$, para todo Γ-módulo M y todo entero q, siendo el módulo dualizador $I_S = H_c^m(X_S, \mathbb{Z})$ libre sobre $\mathbb{Z}$. Además, $\mathrm{cd}(\Gamma) = m$ y el grupo $H^q(\Gamma, \mathbb{Z}(\Gamma))$ es igual a 0, si $q \neq m$; e igual a I_S, si $q = m$. Las demostraciones se encuentran en dos trabajos de A. Borel y J-P. Serre reproducidos en las Œ*uvres* de A. Borel (n. 98 (1973) y n. 105 (1976)).

En Serre [Œ 120(1979)] se encuentra una relación de resultados sobre grupos aritméticos.

Módulos de Hodge–Tate

El trabajo [Œ 72(1966)] corresponde a la ponencia presentada por Serre en la conferencia sobre cuerpos locales de Driebergen (Bruselas). Tomemos como cuerpo base un cuerpo local K de característica 0 cuyo cuerpo residual sea de característica $p > 0$, y sea $\mathbb{C}_p$ la completación de una clausura algebraica de K. La teoría de los grupos p-divisibles generaliza la de los grupos formales. Si T es el módulo de Tate asociado a un grupo p-divisible F definido sobre el anillo de los enteros de K, un bello (y útil) resultado de J. Tate afirma que $\mathbb{C}_p \otimes T$ posee una descomposición análoga a la de Hodge para la cohomología compleja. Propiedades de T como módulo de Galois resultan estar implícitas en ella. Bajo hipótesis de semisimplicidad convenientes, Serre demuestra que, si G es el grupo de Galois que opera en T, la envolvente algebraica de G contiene un grupo de Mumford-Tate p-ádico. Si se supone que $\mathrm{End}(F) = \mathbb{Z}_p$, y bajo hipótesis suplementarias, Serre demuestra que el grupo G es abierto en $\mathrm{Aut}(T)$. El teorema es aplicable si F es un grupo formal uniparamétrico que no admite multiplicación compleja formal.

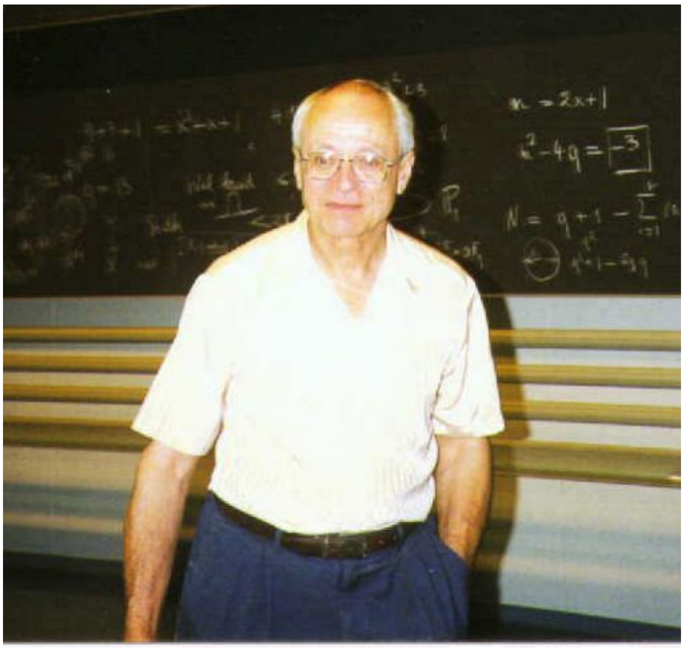
Las descomposiciones de Hodge-Tate serían utilizadas asimismo en el libro [McGill (1968)], del que hablaremos en la sección siguiente.

En [Œ 119(1979)] Serre destaca que el subgrupo de inercia del grupo de Galois que opera en un módulo de Hodge-Tate sobre un cuerpo local es casi-algebraico, en el sentido que es abierto en un cierto subgrupo algebraico H_V del grupo lineal $\mathbf{GL}_V$. En dos casos importantes, Serre determina la estructura de la componente neutra H_V^0 de H_V. En el caso conmutativo, H_V^0 es un toro. Si los únicos pesos de V son 0 y 1, los factores simples de H_V^0 son de tipo clásico: A_n, B_n, C_n, D_n.

Curvas Elípticas y Representaciones ℓ–ádicas

Serre impartió varios cursos sobre curvas elípticas. Tres de ellos lo fueron en el *Collège de France* [Œ 67(1964/65), 71(1965/66), 93(1970/71)]; y uno, en la Universidad de McGill (Montreal), en 1967. En ellos presentó abundante material inédito, que se integraría en los trabajos [Œ 70(1966), 94(1972)] y el libro *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves* [McGill (1968)].

El curso [Œ 67(1964/65)] tuvo un carácter básico. En él, Serre estudió propiedades generales de las curvas elípticas: estructura del anillo de endomorfismos, reducción, módulos de Tate, curvas elípticas de multiplicación compleja, etc. Sean E curva elíptica definida sobre un cuerpo k y sea ℓ un entero primo con la característica de k. El módulo de Tate de E se define como $T_\ell(E) := \varprojlim E[\ell^n](k_s)$. El grupo de Galois $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ opera en $T_\ell(E)$ y en el $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial $V_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell \otimes T_\ell(E)$. Consideremos la representación ℓ-ádica asociada $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(k_s/k) \to \mathrm{Aut}(T_\ell) \simeq \mathbf{GL_2}(\mathbb{Z}_\ell)$. La imagen G_ℓ de ρ_ℓ es un subgrupo de Lie ℓ-ádico de $\mathrm{Aut}(T_\ell)$. Sea $\mathfrak{g}_\ell$ el álgebra de Lie de G_ℓ. La extensión de Galois asociada a G_ℓ se obtiene adjuntando al cuerpo k las



Conferencia de J.-P. Serre en el congreso
"Finite Fields and Applications", University of Augsburg, 1999.
Fotografía cortesía de A. Travesa

coordenadas de todos los puntos de $E(\overline{k})$ de orden una potencia de ℓ. Los módulos de Tate T_ℓ no son más que casos particulares de grupos de homología ℓ-ádica asociados a toda variedad algebraica.

Supongamos que k es un cuerpo de números algebraicos. Si la curva E es de multiplicación compleja; es decir si existen un cuerpo cuadrático imaginario F y un homomorfismo de anillos $F \to \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_k(E)$, entonces el grupo G_ℓ es abeliano siempre que $F \subseteq k$ (y no abeliano en el caso contrario). Si $F \subseteq k$, la acción de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sobre $T_\ell(E)$ se efectúa por medio de un *Grössencharakter* cuyo conductor tiene por soporte el conjunto de plazas de mala reducción de E (resultado debido a M. Deuring). Las curvas elípticas de multiplicación compleja permiten hacer efectiva la teoría global de cuerpos de clases sobre cuerpos cuadráticos imaginarios. Un resumen de la teoría de la multiplicación compleja clásica se encuentra en el artículo [Œ 76(1967)].

Por medio de espacios fibrados cuyas fibras son curvas elípticas de multiplicación compleja, Serre [Œ 63(1964)] construye ejemplos de variedades proyectivas, no singulares y conjugadas en el sentido de la teoría Galois, pero con grupos fundamentales no isomorfos.

Serre [Œ 70(1966)] estudia los grupos de Lie ℓ-ádicos y las álgebras de Lie ℓ-ádicas asociadas a curvas elípticas definidas sobre un cuerpo k de números algebraicos y sin multiplicación compleja. El teorema central del artículo afirma que $\mathfrak{g}_\ell = \mathrm{End}(V_\ell)$, cuando el cuerpo base es el cuerpo racional $\mathbb{Q}$. En su demostración, Serre utiliza hábilmente resultados sobre álgebras de Lie y grupos de Lie ℓ-ádicos; sobre el invariante de Hasse-Witt de las curvas elípticas; propiedades de grupos pro-algebraicos; existencia de elevaciones canónicas de curvas ordinarias en característica p; control de las subálgebras de Lie de los grupos de ramificación; el teorema de densidad de Chebotarev; teoría de cuerpos de clases; teoría de Hodge-Tate, etc. Serre observa que, de ser cierta una conjetura de J. Tate, podría llevarse a cabo la determinación de $\mathfrak{g}_\ell$ cuando el cuerpo base es un cuerpo de números algebraicos arbitrario. La conjetura de Tate en cuestión sería probada por G. Faltings (1983), en el célebre trabajo en que probó la conjetura de Mordell y que le valió, en 1986, la medalla Fields.

En el mismo trabajo, [Œ 70(1966)], Serre demuestra que el conjunto de plazas de k en las que una curva E sin multiplicación compleja tiene reducción supersingular es de densidad igual a cero en el conjunto de todas las plazas de k; lo cual no es obstáculo para que este conjunto de plazas sea infinito; Serre opina que éste podría ser muy bien el caso. S. Lang y H. Trotter (1976) conjeturaron una fórmula (no demostrada todavía) para la frecuencia de los primos supersingulares. N. D. Elkies (1987) probaría que para toda curva elíptica definida sobre $\mathbb{Q}$, existen infinitos primos de reducción supersingular, de acuerdo con la opinión de Serre.

Los resultados y las demostraciones de [Œ 70(1966)] serían mejorados en [McGill] y en el curso [Œ 71(1965/66)]. En el capítulo I de [McGill], Serre considera representaciones ℓ-ádicas del grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ de un cuerpo k y, cuando k es un cuerpo de números, define los conceptos de representación ℓ-ádica racional, y de sistema compatible de representaciones ℓ-ádicas racionales. Estas nociones se remontan a Y. Taniyama (1957). Serre establece conexiones entre problemas de equidistribución de clases de conjugación de elementos de Frobenius y propiedades analíticas de funciones L asociadas a sistemas compatibles de representaciones ℓ-ádicas racionales.

En [McGill] la teoría de la multiplicación compleja es presentada desde un punto de vista cercano a la teoría de motivos. En el capítulo II, haciendo abstracción de situaciones provenientes de la teoría global de cuerpos de clases, Serre logra asociar a todo cuerpo de números algebraicos k una familia proyectiva $(S_\mathfrak{m})$ de grupos algebraicos conmutativos definidos sobre $\mathbb{Q}$. Para cada módulo $\mathfrak{m}$ de k, existe una sucesión exacta de grupos algebraicos conmutativos $1 \to T_\mathfrak{m} \to S_\mathfrak{m} \to C_\mathfrak{m} \to 1$, en la cual $C_\mathfrak{m}$ es un grupo finito y $T_\mathfrak{m}$ es un toro. Los caracteres de $S_\mathfrak{m}$ son, esencialmente, los *Grössencharakteren* de tipo A_0, en el sentido de A. Weil, que intervienen en la teoría de la multiplicación compleja, y de conductor $\leq \mathfrak{m}$. Serre describe el grupo de caracteres $X(T_\mathfrak{m})$.

En el capítulo III de [McGill] se considera el concepto de representación ℓ-ádica abeliana localmente algebraica. Serre demuestra que las representaciones lineales en el sentido algebraico de la familia $(S_\mathfrak{m})$ proporcionan la fuente de todos los sistemas compatibles de representaciones ℓ-ádicas racionales y abelianas de k que son localmente algebraicas. Cuando el cuerpo de números algebraicos k se obtiene por composición de cuerpos cuadráticos, Serre demuestra que toda representación ℓ-ádica, racional, semisimple y abeliana asociada a k es localmente algebraica. Serre basa la demostración de este último resultado en teoremas de transcendencia de C. L. Siegel y de S. Lang. Observa que la conclusión anterior es probablemente válida para cualquier cuerpo de números algebraicos. Teoremas de transcendencia probados por M. Waldschmidt (1986) permitirían extender el teorema de Serre a todo cuerpo de números algebraicos.

En el capítulo IV de [McGill] se estudian las representaciones ℓ-ádicas asociadas a curvas elípticas. Serre demuestra que, para toda curva elíptica E sin multiplicación compleja definida sobre un cuerpo de números algebraicos k, es $\mathfrak{g}_\ell = \mathrm{End}(V_\ell)$. En última instancia, la demostración resulta de una hábil combinación de un teorema de finitud de I. Shafarevich con las propiedades antes mencionadas de las representaciones ℓ-ádicas de k, abelianas y localmente algebraicas.

Serre demuestra asimismo que, si E es una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números algebraicos k tal que su invariante j no es un entero de k, entonces el grupo $G := \mathrm{Im}\rho$, $\rho = \prod \rho_\ell$, es abierto en $\prod \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$. Equivalentemente, se satisface que $G_\ell = \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$, para casi todo ℓ. Posteriormente, Serre eliminaría la condición sobre el invariante modular j.

Asimismo, se demuestra en [McGill] que, si E, E' son curvas elípticas definidas sobre un cuerpo de números k, cuyos invariantes $j(E)$, $j(E')$ no son enteros algebraicos y cuyos $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-módulos $V_\ell(E)$, $V_\ell(E')$ son isomorfos, entonces E y E' son isógenas sobre k. Este resultado probaba, en un caso particular, una conjetura de J. Tate. El caso general sería probado por G. Faltings (1983).

Los resultados anteriores serían mejorados en el artículo *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques* [Œ 94(1972)], que Serre publica en honor de A. Weil. Los resultados del mismo habían sido expuestos en el curso [Œ 93(1970/71)]. El artículo [Œ 94(1972)] aporta, respecto de [McGill], una notable mejora en el estudio de la variación con ℓ de los grupos G_ℓ. Serre demuestra que, para toda curva elíptica E definida sobre un cuerpo de números algebraicos k, y sin multiplicación compleja, se satisface que $G_\ell = \mathrm{Aut}(T_\ell(E))$, para casi todo ℓ. Equivalentemente, se satisface que $\mathrm{Gal}(k[E_\ell]/k) \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$, para casi todo ℓ. Es decir, elimina, respecto de [McGill], la condición sobre el invariante j. La demostración de este teorema se basa en resultados de naturaleza local, relativos a la acción de la inercia moderada sobre los puntos de orden finito de las curvas elípticas. Esta acción se hace a través de productos de caracteres fundamentales afectados por exponentes que permanecen acotados por el índice de ramificación del cuerpo local que se considera. La existencia de estas cotas juega un papel similar a la hipótesis de algebraicidad local que había considerado en [McGill]. La demostración del teorema requiere, asimismo, información acerca de los subgrupos de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$.

En el artículo anterior, Serre plantea ciertas cuestiones de efectividad, que podrían resolverse caso de poseer formas efectivas del teorema de densidad de Chebotarev. Incluye ejemplos numéricos en que se calculan todos los números primos para los cuales $\mathrm{Gal}(k[E_\ell]/k) \not\simeq \mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$.

El estudio de los sistemas de representaciones ℓ-ádicas, en especial de los provenientes de la cohomología ℓ-ádica, fue el tema del curso [Œ 109(1975/76)]. Sea K un cuerpo de característica cero, completo por una valoración discreta de cuerpo residual algebraicamente cerrado de característica $p > 0$ y sea X una variedad proyectiva y no singular definida sobre K. Serre hace notar que no se sabe si los módulos de Galois $H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)$ son de Hodge-Tate, para todo m. Es cierto si $m \leq 2$, gracias a teoremas de J. Tate y M. Raynaud; y de M. Artin y B. Mazur. Es de destacar que, en el resumen del curso, Serre menciona que si A es una superficie abeliana tal que $\mathrm{End}(A)$ es un orden de un cuerpo de cuaterniones D definido sobre $\mathbb{Q}$, entonces el grupo $\rho(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$, $\rho = \prod \rho_\ell$, es abierto en $D^*(\mathbb{A}^f)$. Cuando el orden $\mathcal{O}$ es maximal, este resultado había sido obtenido también por M. Ohta (1974), siguiendo las pautas de Serre.

Formas Modulares y Representaciones ℓ–ádicas

El estudio de las representacions de Galois ℓ-ádicas aparece en la obra de Serre bajo prismas diversos. En la sección anterior hemos visto que tales representaciones surgen de manera natural en el estudio de los módulos de Tate asociados a las curvas elípticas. En esta sección veremos que lo propio ocurre en el estudio aritmético de las formas modulares. En la sección siguiente trataremos el caso de las variedades abelianas.

En el *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* [Œ 80(1967/68)], Serre había hecho la notable observación que ciertas congruencias satisfechas por la función τ de Ramanujan hallarían una explicación natural caso de existir, para todo primo ℓ, un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial V_ℓ de dimensión 2 y una representación lineal y continua $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(V_\ell)$, no ramificada fuera de ℓ, que satisficiera las condiciones $\mathrm{Tr}(\rho_\ell(F_p)) = \tau(p)$, $\det(\rho_\ell(F_p)) = p^{11}$, para todo elemento de Frobenius F_p, en un primo $p \neq \ell$. La supuesta representación ℓ-ádica, caso de existir, dejaría estable una red de V_ℓ, por lo que se podría considerar valorada en $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$. Al variar los distintos primos ℓ, las representaciones ρ_ℓ anteriores constituirían un sistema compatible de representaciones ℓ-ádicas racionales de $\mathbb{Q}$, en el sentido de [McGill]. Las imágenes de ρ_ℓ, al variar los distintos ℓ, serían, casi siempre, lo más grande posible. Los primos en los cuales ello no ocurriera, en número finito, constituirían los llamados primos excepcionales. Las congruencias se obtendrían por reducción (mod ℓ) de las representaciones ℓ-ádicas en los primos excepcionales. Concretamente, en el caso de la función τ, los primos excepcionales serían: $2, 3, 5, 7, 23, 691$. Existen fórmulas bien conocidas que proporcionan el valor de $\tau(n) \pmod{\ell}$ cuando ℓ es uno de los primos anteriores. Por ejemplo: $\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}$, congruencia descubierta por el propio S. Ramanujan. De ser cierta la conjetura Serre, para todo primo ℓ no excepcional, y para todo primo $p \neq \ell$, el valor $\tau(p) \pmod{\ell}$ no se podría deducir de una congruencia sobre $p \pmod{\ell}$.

Funciones aritméticas diversas se recuperan a través de los coeficientes de Fourier de funciones modulares o de formas modulares. Una introducción al estudio de las formas modulares, con respecto del grupo modular $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, se encuentra en el libro *Cours d'Arithmétique* [CA (1970)]. El libro (que en su primera edición tenía un formato 11 cm x 17.6 cm y valía sólo 12 francos) es producto de dos cursos impartidos por Serre, en 1962 y 1964, en la

École Normale Supérieure. Incluye, asimismo, capítulos de introducción a los números p-ádicos, formas cuadráticas (racionales, y enteras de discriminante ± 1), métodos analíticos, etc. En el año 1995, Serre recibía el premio Leroy P. Steele de exposición matemática por la redacción de este delicioso texto.

Las observaciones de Serre sobre la función τ de Ramanujan impulsarían los trabajos de P. Deligne (1971) sobre representaciones asociadas a formas modulares, el estudio de las formas modulares módulo p, de las formas modulares p-ádicas, así como el trabajo de H. P. F. Swinnerton-Dyer (1973) sobre el tema. Los resultados de H. P. F. Swinnerton-Dyer fueron expuestos por Serre en el *Séminaire Bourbaki* [Œ 95(1971/72)]. El estudio de las formas modulares p-ádicas fue emprendido por Serre en el artículo [Œ 97(1973)], dedicado a C. L. Siegel. En él se relacionan las formas modulares p-ádicas con funciones zeta p-ádicas de la teoría de Iwasawa (cf. [Œ 41(1958/59)]). Uno de los resultados más novedosos del artículo es que si K es un cuerpo de números totalmente real, los valores en los enteros negativos de su función zeta de Dedekind, $\zeta_K(s)$, (que son racionales, por un teorema debido a Siegel) pueden interpolarse p-ádicamente, de la misma manera que en la teoría de Kubota-Leopoldt, válida únicamente para extensiones abelianas de $\mathbb{Q}$. Los cursos [Œ 96(1971/72), 98(1972/73)] versaron sobre este tema.

Basándose en la existencia de representaciones ℓ-ádicas asociadas a formas modulares, Serre [Œ 100(1974), 108(1976)] demuestra que, dada una forma modular $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z/M}$ respecto de un subgrupo de congruencia del grupo modular $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, y de peso entero $k \geq 1$, entonces, para todo entero $m \geq 1$, el conjunto de los enteros n que satisfacen la congruencia $c_n \equiv 0 \pmod{m}$ es de densidad 1. La demostración utiliza un argumento analítico debido a E. Landau. Dada una forma modular parabólica $f = \sum a_n q^n$, $q = e^{2\pi i z}$, sin multiplicación compleja, de peso $k \geq 2$, valor propio normalizado de todos los operadores de Hecke y de coeficientes en $\mathbb{Z}$, Serre pregunta en [Œ 108(1976)] si es cierto que el conjunto de los enteros n tales que $a_n \neq 0$ posee una densidad > 0.

Serre y P. Deligne [Œ 101(1974)], en un artículo que dedican a H. Cartan, demuestran que, mediante la transformada de Mellin, toda forma modular nueva de peso 1 proporciona la función L de Artin de una representación lineal compleja $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$. Para la demostración de este teorema, Serre y Deligne empiezan por construir, para todo primo ℓ, representaciones de Galois (mod ℓ), de imagen suficientemente pequeña, lo cual les permite elevarlas a característica cero y obtener la representación compleja buscada. En el trabajo se utiliza la existencia de representaciones ℓ-ádicas asociadas a formas modulares de peso $k \geq 2$ para deducir un teorema de existencia de representaciones (mod ℓ) asociadas a formas modulares de peso $k \geq 1$; la pequeñez de las representaciones (mod ℓ) se establece gracias a una mayoración en media de valores propios de operadores de Hecke. El conductor de Artin de la representación compleja asociada coincide con el nivel de la forma modular. El artículo [Œ 101(1974)] se convirtió en una referencia básica en el tema, por cuanto que sus resultados permitieron verificar que ciertas funciones L de Artin son enteras. Por otra parte, en él se pone de manifiesto la validez de la conjetura de Ramanujan-Petersson en el caso de peso $k = 1$. Para peso $k \geq 2$, Ramanujan-Petersson resulta de la validez de las conjeturas de Weil y de la existencia de representaciones ℓ-ádicas asociadas a formas modulares. (Ramanujan -Petersson controla el crecimiento en módulo de los coeficientes de Fourier de las formas modulares parabólicas.) El estudio de las formas modulares de peso $k = 1$ fue ilustrado por Serre en [Œ 110(1977)] con múltiples ejemplos numéricos, facilitados por Tate.

En las *Journées Arithmétiques* de Burdeos del año 1974, Serre fue el primer conferenciante. Su ponencia [Œ 104(1975)] versó sobre los operadores de Hecke (mod ℓ). (Yo formaba parte de una desconcertada audiencia; era la primera vez que asistía a un congreso internacional; todavía conservo los apuntes.) Consideremos el álgebra $\widetilde{M}$ de las formas modulares (mod ℓ) relativas al grupo $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Serre demostró que los sistemas de valores propios (a_p) de los operadores de Hecke T_p, $p \neq \ell$, actuando en $\overline{\mathbb{F}}_\ell \otimes \widetilde{M}$ son en número finito; es decir, existe un peso $k(\ell)$ tal que todo sistema de valores propios es realizable por una forma de peso $\leq k(\ell)$. La demostración se basa en la existencia de una representación modular del grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ asociada a un tal sistema. Serre calcula todos los sistemas (a_p) que ocurren para los primos $\ell \leq 23$. En Burdeos, Serre planteó una serie de problemas y de conjeturas que anticipaban el que sería, al cabo de doce años, su gran trabajo [Œ 143(1987)] sobre las representaciones de Galois modulares, pieza que resultó ser clave para la demostración del teorema de Fermat.

En [Œ 113(1977)] Serre y H. Stark demuestran que toda forma modular de peso 1/2 es combinación lineal de series theta en una variable, respondiendo así a una pregunta formulada por G. Shimura (1973).

En la memoria titulada *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev* [Œ 125(1981)], Serre obtiene resultados de carácter efectivo, tanto en el ámbito de las curvas elípticas como en el de las formas modulares. Sus resultados son de dos tipos: incondicionales o bien subordinados a la validez de la hipótesis de Riemann generalizada (HRG). El trabajo en cuestión, esencialmente analítico, combina teoremas de efectividad debidos a J. C. Lagarias, H. L. Montgomery y A. M. Odlyzko, y teoremas del propio Serre sobre representaciones ℓ-ádicas. Previamente, Serre necesita probar que el número de puntos (mod ℓ^n) de una variedad analítica ℓ-ádica de dimensión d es $\mathrm{O}(\ell^{nd})$, para $n \to \infty$; asimismo, necesita ampliar el teorema de Chebotarev a extensiones de Galois infinitas cuyo grupo de Galois sea un grupo de Lie ℓ-ádico. A modo de ejemplo, citaremos dos de las aplicaciones contenidas en el trabajo. Dada una forma modular no nula $f = \sum a_n q^n$, valor propio de todos los operadores de Hecke y sin multiplicación compleja, Serre demuestra que la serie f no es lagunar; es decir, si $M_f(x)$ designa el número de enteros $n \leq x$ tales que $a_n \neq 0$, entonces existe una constante $\alpha > 0$ tal que $M_f(x) \sim \alpha x$ para $x \to \infty$. Por el contrario, si $f \neq 0$ posee multiplicación compleja, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $M_f(x) \sim \alpha x/(\log x)^{1/2}$, para $x \to \infty$. En ejemplos concretos, Serre proporciona cotas de α. Por otra parte, si $E/\mathbb{Q}$ es una curva elíptica sin multiplicación compleja y suponemos válida (HRG), entonces existe una constante absoluta c tal que el grupo de Galois G_ℓ de los puntos de ℓ-división de E es isomorfo a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ para todo primo $\ell \geq c(\log N_E)(\log\log 2N_E)^3$, en donde N_E designa el producto de todos los primos de mala reducción de E. En la memoria, Serre pone de manifiesto un total de 279 fórmulas que dependen de (HRG), que no vamos a detallar.

La función η de Dedekind es una forma modular parabólica de peso $1/2$. En el artículo [Œ 139(1985)], que Serre dedica a R. Rankin, trata la lagunaridad de las potencias η^r. Si r es impar, se sabía que η^r es lagunar si $r = 1, 3$. Si r es par, se sabía que η^r es lagunar si $2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$. Serre demuestra que, en el caso r par, la lista anterior es completa. La demostración utiliza la existencia de representaciones ℓ-ádicas asociadas a formas modulares de peso entero.

El trabajo [Œ 143(1987)], dedicado a Y. I. Manin y titulado *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, contiene una de las contribuciones más relevantes realizadas por Serre. En él Serre precisa las conjeturas de [Œ 104(1975)], formuladas en Burdeos. Nos limitaremos a mencionar las conjeturas ($3.2.3_?$) y ($3.2.4_?$) de [Œ 143(1987)]. Dada una representación $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, continua, irreducible y de determinante impar, la conjetura ($3.2.3_?$) afirma la existencia de una forma modular parabólica f, de coeficientes en $\overline{\mathbb{F}}_p$ y función propia de los operadores de Hecke, cuya representación ρ_f asociada es isomorfa a la representación ρ de partida. La conjetura ($3.2.4_?$) precisa el tipo $(N(\rho), k(\rho), \varepsilon(\rho))$ de la forma f de ($3.2.3_?$): el nivel $N(\rho)$ debe ser igual al conductor de Artin de ρ (da cuenta de la ramificación en los primos $\ell \neq p$); el carácter $\varepsilon(\rho)$ debe coincidir con el determinante de ρ; el peso conjetural $k(\rho)$ da cuenta de la ramificación de ρ en p, mediante los exponentes de los caracteres de la inercia moderada y la acción de la inercia salvaje. El trabajo contiene ejemplos numéricos para $p = 2, 3, 7$ en favor de la conjetura, programados por J-F. Mestre. Algunos meses después de la aparición del trabajo, Serre modificó ligeramente las conjeturas para $p = 2, 3$ y, únicamente, en el caso de representaciones de Galois de tipo diedral. Las conjeturas de Serre han generado una abundante literatura; resultando ($3.2.4_?$) mucho más asequible que ($3.2.3_?$). Estas conjeturas implican, por si solas, el teorema de Fermat (y variantes del mismo), así como la conjetura de Taniyama-Weil (TW) (y generalizaciones de la misma). Como es bien conocido, gracias a una idea de G. Frey (1986), la demostración de una forma débil de la conjetura ($3.2.4_?$), conocida como conjetura *epsilon*, es suficiente para probar la implicación {TW en el caso semiestable $\Rightarrow$ Fermat}. La conjetura *epsilon* fue probada por K. Ribet (1990) en un brillante trabajo. Tras el teorema de Ribet, para probar el teorema de Fermat «bastaba» pues probar (TW) en el caso semiestable, circunstancia que llevó a A. Wiles a encerrarse en el desván.

La nota [Œ 145(1987/88)] contiene un resumen del curso impartido por Serre sobre representaciones de Galois (mod p) y formas modulares (mod p). En ella Serre relaciona las formas modulares módulo p con cuaterniones. Dos cartas de Serre sobre este tema, dirigidas a a J. Tate y a D. Kazhdan, se recogen en [Œ 169(1996)].

La estrategia general del trabajo de A. Wiles (1995), completado por R. Taylor y A. Wiles (1995), sobre curvas elípticas modulares y el teorema de Fermat, fue expuesta por Serre en el *Séminaire Bourbaki* [Œ 168(1996)]. En aquella ocasión, Serre dijo no pretender haber verificado todos los detalles técnicos, ≪*qui sont essentiels, bien entendu*≫.

Variedades Abelianas y Representaciones ℓ–Ádicas

Denotemos por A una variedad abeliana de dimensión d, definida sobre un cuerpo k. Dado un primo ℓ distinto de la característica de k, el módulo de Tate, $T_\ell(A) = \varprojlim A[\ell^n](k_s)$, es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo libre de rango $2d$, al que se asocia el $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. La acción del grupo de Galois absoluto de k en el módulo de Tate de A produce una representación ℓ-ádica $\rho_\ell : \mathrm{Gal(k_s/k)} \to \mathbf{GL}(T_\ell(A)) = \mathbf{GL}_{2d}(\mathbb{Z}_\ell)$, la imagen de la cual, G_ℓ, es un subgrupo compacto de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ y, por lo tanto, es un subgrupo de Lie del grupo de Lie ℓ-ádico $\mathbf{GL}(T_\ell)$; su álgebra de Lie, $\mathfrak{g}_\ell$, es invariante por extensiones finitas del cuerpo base. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\ell$ se identifica con una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V_\ell)$, por lo que opera en V_ℓ. Se sabe que el rango de $\mathfrak{g}_\ell$ es independiente de ℓ, pero se desconoce si ocurre lo mismo con la dimensión de $\mathfrak{g}_\ell$.

Cuando k es un cuerpo de números algebraicos, un teorema de A. Weil garantiza que el grupo $A(k)$ de sus puntos k-racionales es un grupo abeliano finitamente generado. Como ya hemos mencionado, en [Œ 62 (1964)] Serre pregunta si es cierto que todo subgrupo de índice finito de $A(k)$ contiene un subgrupo de congruencia y transforma el problema de los subgrupos de congruencia para las variedades abelianas en un problema sobre la cohomología de grupos de Lie ℓ-ádicos. Serre demuestra que el problema tiene respuesta afirmativa cuando A es, o bien una curva elíptica, o bien una variedad abeliana con suficientes multiplicaciones complejas. Daremos algunos indicios sobre la prueba.

Sea $\mathrm{End}(A)$ el anillo de endomorfismos de A, del que supondremos que todos sus elementos están definidos sobre k. En tal caso, sus elementos conmutan con los elementos de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$; por tanto, el álgebra de Lie ℓ-ádica $\mathfrak{g}_\ell$ está contenida en el conmutador de $\mathrm{End}(A)$ en $\mathrm{End}(V_\ell)$. Si A posee suficientes multiplicaciones complejas, es decir, si $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}(A)$ es una álgebra conmutativa semisimple de rango $2d$, entonces el conmutador de $\mathrm{End}(A)$ en $\mathrm{End}(V_\ell)$ es $\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathrm{End}(A)$. Por tanto, $\mathfrak{g}_\ell$ está incluida en $\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathrm{End}(A)$, y $\mathfrak{g}_\ell$ es una álgebra abeliana.

En el caso general, toda polarización de A da lugar a una forma bilineal alternada y no degenerada $B : V_p(A) \times V_p(A) \to V_p(\mathbf{G}_m)$, que es invariante por $\mathrm{Gal}(k_s/k)$. Con ello, el grupo de Lie ℓ-ádico G_ℓ es un subgrupo del grupo de semejanzas simplécticas de B. Si $\mathfrak{sp}$ denota el álgebra de Lie del grupo simpléctico de B y $\mathfrak{c}$, el álgebra de Lie de las homotecias, se tiene que $\mathfrak{g}_\ell \subseteq \mathfrak{c} \times \mathfrak{sp}$.

En [Œ 62(1964)] Serre demuestra que si A posee suficientes multiplicaciones complejas, entonces $H^n(\mathfrak{g}_\ell, V_\ell) = 0$, para todo $n \geq 0$. Para ello estudia previamente la cohomología de la subálgebra de Lie $\mathfrak{c}$ tangente al subgrupo de G_ℓ generado topológicamente por el elemento de Frobenius. Al ser $\mathfrak{g}_\ell$ un álgebra conmutativa, $\mathfrak{c}$ es un ideal. Serre deduce la anulación de los grupos de cohomología a partir de la sucesión espectral de Hochschild-Serre $H(\mathfrak{g}_\ell/\mathfrak{c}_\ell, H(\mathfrak{c}_\ell, V_\ell)) \Rightarrow H(\mathfrak{g}_\ell, V_\ell)$. Serre se plantea la extensión del resultado anterior a todas las variedades abelianas. Para ello necesita saber si se satisface una de las condiciones siguientes: 1?) V_ℓ es un $\mathfrak{g}_\ell$-módulo semisimple; 2?) $\mathfrak{g}_\ell$ contiene las homotecias. La primera de las preguntas anteriores sería contestada afirmativamente por G. Faltings (1983); la segunda, por F. Bogomolov (1980).

Mediante la obtención, y posterior verificación, de un criterio de anulación de grupos de cohomología de álgebras de Lie, Serre puede probar en [Œ 89(1971)] que, si A es una variedad abeliana definida sobre un cuerpo de números algebraicos, entonces $H^n(\mathfrak{g}_\ell, V_\ell) = 0$, para todo $n \geq 0$. Con ello cierra afirmativamente el problema de los subgrupos de S-congruencia para cualquier variedad abeliana definida sobre un cuerpo de números algebraicos. Al mismo tiempo, obtiene para tales variedades que $H^n(G_\ell, V_\ell) = 0$ y $H^n(G_\ell, T_\ell)$ es un ℓ-grupo finito, para todo $n \geq 0$.

El artículo de Serre y J. Tate [Œ 79(1968)], relativo a la buena reducción de variedades abelianas, es fundamental. Sean K un cuerpo, v una valoración discreta, $\mathcal{O}_v$ el anillo de valoración de v y k_v su cuerpo residual (que se supone perfecto). Dada una variedad abeliana A definida sobre K, los autores parten de la existencia del modelo de Néron A_v de A relativo a v. A_v es un esquema en grupos de tipo finito sobre $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$. Serre y Tate definen el concepto de buena reducción potencial de A, que generaliza el de buena reducción, debido a D. Mumford (1965). Demuestran que A posee buena reducción en v si, y sólo si, el módulo de Tate $T_\ell(A)$ es no ramificado en v, en donde ℓ denota un primo distinto de la característica de k_v. El criterio es debido parcialmente A. P. Ogg (en el caso de las curvas elípticas) y parcialmente a I. Shafarevich. En su demostración interviene la estructura de la componente conexa $\widetilde{A}_v^0$ de la fibra especial $\widetilde{A}_v$ de A_v. La componente $\widetilde{A}_v^0$ es extensión de una variedad abeliana B por un grupo lineal L y el grupo L es producto de un toro S por un grupo unipotente U. Notemos que, sobre K, A posee buena reducción si, y sólo si, $\widetilde{A}_v^0 = B$; A posee buena reducción potencial si, y sólo si, $L = U$; y A posee reducción semiestable si, y sólo si, $L = S$. Un segundo teorema establece que A posee buena reducción potencial si, y sólo si, la imagen del grupo de inercia $I(\overline{v})$ por la representación ℓ-ádica $\rho_\ell : \operatorname{Gal}(K_s/K) \to \operatorname{Aut}(T_\ell)$ es finita. Un uso conveniente de los caracteres de Artin y de Swan permite entonces asignar a A un conductor. Posteriormente, el teorema de la reducción semiestable, conjeturado por Serre en 1964 y demostrado por A. Grothendieck [SGA 7], permitiría asignar un conductor a toda variedad abeliana. El teorema de la reducción semiestable fue probado también por D. Mumford, si bien su demostración, basada en el uso de funciones theta, no incluía el caso de característica residual 2.

Supongamos que A es de multiplicación compleja por F sobre el cuerpo K; es decir, que existe un homomorfismo de anillos $F \to \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_K(A)$, en donde F denota un cuerpo de números algebraicos de grado $2d$, siendo $d = \dim(A)$. En el mismo trabajo, Serre y Tate demuestran que toda variedad abeliana definida sobre un cuerpo de números algebraicos K y de multiplicación compleja sobre este cuerpo, posee buena reducción potencial en todas las plazas de K, y buena reducción en las plazas de K fuera del soporte de su *Grössencharakter*, ofreciendo una versión generalizada y revisada de resultados de M. Deuring (1955) en el caso de las curvas elípticas. El exponente del conductor en v viene dado por $2dn_v$, en donde n_v es el entero más pequeño tal que el *Grössencharakter* se anula en el grupo de ramificación $I(\overline{v})^{n_v}$, provisto de la numeración superior. En un apéndice, Serre y Tate formulan diversos problemas sobre representaciones de Galois asociadas a la cohomología ℓ-ádica de variedades.

En el curso [Œ 135(84/85)], Serre explica cómo los teoremas obtenidos por G. Faltings (1983), a raíz de su demostración del teorema de Mordell, permiten una comprensión mejor de las propiedades de las representaciones ℓ-ádicas, especialmente en el caso de las variedades abelianas. En una primera parte del curso, Serre establece un criterio efectivo para el reconocimiento de representaciones ℓ-ádicas isomorfas. El criterio es aplicado a probar que dos curvas elípticas, estudiadas por J-F. Mestre, de conductor 5077 son isógenas.

Sean K un cuerpo de números algebraicos y A una variedad abeliana definida sobre K de dimensión d. Sea $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbf{GL}(T_\ell(A))$ la representación ℓ-ádica asociada al módulo de Tate de A. Sea G_ℓ^{alg} la adherencia de G_ℓ por la topología de Zariski, que es un $\mathbb{Q}_\ell$-subgrupo algebraico del grupo lineal $\mathbf{GL}_{2d}$. Los teoremas de F. Bogomolov (1980) y de G. Faltings (1983) permiten afirmar que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\ell$ es una subálgebra algebraica de $\mathrm{End}(V_\ell)$ y que G_ℓ^{alg} es un grupo lineal reductivo cuyo conmutador en $\mathrm{End}(V_\ell)$ es $\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathrm{End}_K(A)$. En particular, $\mathfrak{g}_\ell$ es un álgebra de Lie reductiva de conmutador igual a $\mathbb{Q}_\ell \otimes \mathrm{End}_K(A)$. D. Mumford y J. Tate conjeturaron que, dados A y K, el grupo G_ℓ^{alg} es independiente de ℓ y, más precisamente, la componente conexa del elemento neutro $(G_\ell^{\mathrm{alg}})^0$ se deduce del grupo de Mumford-Tate por extensión de escalares de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}_\ell$. En la segunda parte del curso [Œ 135(84/85)], Serre establece una serie de resultados en favor de estas conjeturas. Establece que el rango de G_ℓ^{alg} es independiente de ℓ. Escribiendo el grupo reductivo conexo en forma estándar, $(G_\ell^{\mathrm{alg}})^0 = C_\ell \cdot D_\ell$, en donde C_ℓ es un toro central y D_ℓ es un grupo semisimple, el teorema de Bogomolov nos dice que C_ℓ contiene el grupo $\mathbf{G}_m$ de las homotecias. El teorema de Faltings permite afirmar que, si $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$, entonces $C_\ell = \mathbf{G}_m$; si A es de multiplicación compleja, entonces $D_\ell = \{1\}$.

En el curso [Œ 136(1985/86)], Serre se dedicó a estudiar la variación con ℓ de los grupos de Lie ℓ-ádicos asociados a variedades abelianas. Mantengamos las notaciones anteriores. Dado el homomorfismo $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \prod_\ell G_\ell \subseteq \prod_\ell \mathrm{Aut}(T_\ell)$, Serre demuestra que, si K es suficientemente grande, la imagen de ρ es abierta en el producto $\prod_\ell G_\ell$. Si n es impar, o bien igual a 2 o bien a 6 y si $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$, Serre puede probar que la imagen de ρ es abierta en el producto de los grupos de semejanzas simplécticas $\prod \mathbf{GSp}(T_\ell, e_\ell)$, en donde e_ℓ es la forma alternada sobre el módulo de Tate $T_\ell(A)$ deducida a partir de una polarización e de A escogida previamente. Ingredientes de la demostración son, además de los teoremas de Bogomolov y de Faltings ya mencionados, toros de Frobenius, teoría abeliana, propiedades de los grupos de inercia en las plazas que dividen a ℓ, así como informaciones precisas sobre subgrupos de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{F}_\ell)$, proporcionadas por teoremas de F. Frobenius (1911) y de V. Nori.

Las demostraciones de los resultados mencionados en estos dos últimos cursos no han sido publicadas de una manera formal. Información al respecto se encuentra en las cartas de Serre a K. Ribet [Œ 133(1981), 138(1986)], en la carta de Serre a D. Bertrand [Œ [134](1984)], y en la carta de Serre a M-F. Vignéras [Œ 137(1986)].

MOTIVOS

La exposición en el *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* [Œ 87(1969/70)], en que Serre formuló conjeturas diversas sobre factores locales de funciones zeta de variedades algebraicas, puede entenderse como un avance de posteriores conjeturas en el ámbito de la teoría de motivos de Grothendieck. Como dice Serre, «los motivos de Grothendieck pueden entenderse *grosso modo* como factores directos de la cohomología de variedades proyectivas, obtenidos mediante proyectores algebraicos». En su exposición de 1969, Serre recordó las conjeturas estándar (un total de nueve) relativas a la cohomología ℓ-ádica de las variedades proyectivas y no singulares. Las conjeturas C_1, C_2 son las clásicas conjeturas de Weil sobre las variedades proyectivas y no singulares definidas sobre un cuerpo finito que, probadas por P. Deligne (1974), permiten definir, sin problemas, los buenos factores de las funciones zeta asociadas a la cohomología de las variedades definidas sobre un cuerpo global K. Denotemos por v una plaza de K y sea k_v su cuerpo residual, de característica p_v. Sean $G_v = \mathrm{Gal}(K_{v,s}/K_v)$ y $I_v = \mathrm{Gal}(K_{v,s}/K_{v,\mathrm{nr}})$, el grupo de descomposición y de inercia en v, respectivamente. Consideremos una variedad proyectiva y no singular X sobre K_v y sea $V_\ell = H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. Ahora, el grupo G_v opera en V_ℓ dando lugar a una representación ℓ-ádica ρ_ℓ. Las conjeturas C_5, C_6, C_7 hacen referencia a la acción de G_v en $V_\ell^{I_v}$ para $\ell \neq p_v$. Sea $\varepsilon = \mathrm{codim} V_\ell^{I_v}$. Bajo la hipótesis suplementaria de que la acción de la inercia es localmente unipotente, se puede definir un carácter Tr_{ρ_ℓ} sobre I_v. Con este carácter y el carácter de Swan se define un entero, δ_v, denominado la componente salvaje del conductor de la representación ℓ-ádica. El entero $f_v = \varepsilon_v + \delta_v$ constituye el exponente del conductor de ρ_ℓ en v. La conjetura C_3 afirma que los enteros $\varepsilon_v, \delta_v, f_v$ son independientes de ℓ. C_4 afirma que la restricción a I_v de la función Tr_{ρ_ℓ} toma valores en $\mathbb{Z}$ y es independiente de ℓ. Si el cuerpo k_v es finito, el grupo G_v/I_v está provisto de un generador canónico, el Frobenius F_v, que define un automorfismo de $V_\ell^{I_v}$. Escribamos $P_{\rho_\ell}(T) = \det(1 - \pi_{\rho_\ell} T)$, en donde π_{ρ_ℓ} denota el inverso de $(F_v | V_\ell^{I_v})$. La conjetura C_5 afirma que los coeficientes de P_{ρ_ℓ} son independientes de ℓ. Escribamos $P_m(T) = \prod(1 - \lambda_\alpha T)$. La conjetura C_6 afirma que $|\lambda_\alpha| = Nv^{m(\alpha)/2}$, siendo $m(\alpha)$ un entero, $0 \leq m(\alpha) \leq m$. La conjetura C_7 afirma que que si $\varepsilon = 0$, entonces $m(\alpha) = m$, para todo α. (Omitimos la conjetura C_8, por ser muy técnica.) Los ingredientes anteriores, unidos a la teoría de Hodge para fijar los factores arquimedianos, permiten definir la m-ésima función zeta, $\xi_m(X, s)$, de una variedad X, proyectiva y no singular, definida sobre un cuerpo global K. La conjetura C_9 hace referencia a la existencia de una prolongación meromorfa y una ecuación funcional del tipo $s \leftrightarrow m + 1 - s$ para $\xi_m(X, s)$. Las conjeturas $C_3, \cdots, C_8$ son ciertas para las variedades abelianas, gracias al teorema de la reducción semiestable. En el caso de las curvas elípticas y $K = \mathbb{Q}$ la conjetura C_9 es consecuencia de la conjetura de Taniyama-Weil (TW). Las conjeturas $C_3, \ldots, C_9$ siguen abiertas en general, debido, entre otros factores, a la falta de un teorema de reducción semiestable, análogo al de las variedades abelianas.

El tema de las representaciones ℓ-ádicas ya aparece tratado por Serre en [Œ 112(1977)], en el simposio sobre teoría algebraica de números de Kyoto. El trabajo, que es rico en problemas y conjeturas propias de la teoría de motivos, contiene el enunciado de la conjetura de Taniyama (1955)-Weil (1955). Una introducción a la teoría de motivos se encuentra asimismo en [Œ 154(1991)]. En esta línea, es también de destacar el artículo [Œ 160(1993)], que corresponde a un texto de Serre escrito para *Bourbaki* en 1968. Su contenido hace referencia a envolventes algebraicas de grupos lineales y su relación con distintos tipos de álgebras, cogebras y bigebras.

Para acabar haremos un breve resumen del artículo *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques* [Œ 161 (1994)]. En él Serre formula una serie de conjeturas sobre representaciones ℓ-ádicas, que generalizan muchos de sus resultados previos.

Designemos por M la categoría de motivos puros sobre un subcuerpo k de $\mathbb{C}$, que supondremos de tipo finito sobre $\mathbb{Q}$. El grupo de Galois motívico G_M se relaciona con el grupo de Galois absoluto de k por medio de una sucesión exacta $1 \to G_M^0 \to G_M \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$. Dado un motivo E sobre k, sea $M(E)$ la subcategoría tannakiana de M más pequeña que contiene a E. Supongamos que las conjeturas estándar y que la conjetura de Hodge son ciertas. En esta situación, Serre formula en tono optimista una serie de conjeturas y preguntas encaminadas a la descripción del «paraíso motívico» de A. Grothendieck. De ellas extraemos las siguientes: $1_?$) El grupo de Galois motívico G_M es pro-reductivo. $2_?$) El grupo de Galois motívico $G_{M(E)}$ queda caracterizado por sus invariantes tensoriales. $3_?$) El grupo $G_{M(E)/\mathbb{Q}_\ell}$ es la adherencia por la topología de Zariski de la imagen de la representación ℓ-ádica $\rho_{\ell,E} : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to G_{M(E)}(\mathbb{Q}_\ell)$, asociada a E. $4_?$) El grupo pro-reductivo y conexo G_M^0 descompone como $G_M^0 = C \cdot D$, en donde C es un pro-toro, igual a la componente neutra del centro de G_M^0, y D es un grupo pro-semisimple, igual al grupo derivado de G_M^0. $5_?$) Si $S = (G_M^0)^{\mathrm{ab}}$, entonces S es límite proyectivo de pro-toros $T_{\mathfrak{m}}$. $6_?$) Todo homomorfismo $G_M^0 \to \mathbf{PGL}_2$ posee una elevación a $G_M^0 \to \mathbf{GL}_2$. $7_?$) ¿Qué grupos reductivos y conexos se realizan como $G_{M(E)}$? 8?) El grupo $G_{\ell,E} = \mathrm{Im}(\rho_{\ell,E})$ es abierto en $G_{M(E)}(\mathbb{Q}_\ell)$. Sea $\rho_E = (\rho_{\ell,E}) : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \prod_\ell G_{\ell,E} \subseteq G_{M(E)}(\mathbb{A}^f)$. Supongamos que $G_{M(E)}$ es conexo. 9?) E es un motivo maximal si, y sólo si, $\mathrm{Im}(\rho_E)$ es abierta en el grupo $G_{M(E)}(\mathbb{A}^f)$, en donde $\mathbb{A}^f$ es el anillo de las adeles finitas de $\mathbb{Q}$.

BIBLIOGRAFÍA

[Œ] SERRE, J-P.: *Œuvres. Collected Papers, vol. I (1949-1959), II (1960-1971), III (1972-1984); IV (1985-1998).* Springer, 1986; 2000.

[GACC] SERRE, J-P.: *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann, 1959; 2a. ed.
1975 [traducido al inglés y al ruso].

[CL] SERRE, J-P.: *Corps Locaux.* Hermann, 1962; 3a. ed. 1980 [traducido al inglés].

[CG] SERRE, J-P.: *Cohomologie galoisienne.* Springer LNM, n. 5, 1964; 5a. ed. revisada y completada 1994 [traducido al inglés y al ruso].

[LALG] SERRE, J-P.: *Lie Algebras and Lie Groups.* Benjamin, 1965; 2a. ed., Springer LNM, n. 1500, 1992 [traducido al ruso].

[ALM] SERRE, J-P.: *Algèbre Locale. Multiplicités.* Springer LNM, n. 11, 1965, editado con la colaboración de P. Gabriel; 3a. ed. 1975 [traducido al inglés y al ruso].

[ALSC] SERRE, J-P.: *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* Benjamin, 1966 [traducido al inglés y al ruso].

[RLGF] SERRE, J-P.: *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, 1968; 3a. ed. 1978 [traducido al alemán, español, inglés, japonés y ruso].

[McGill] SERRE, J-P.: *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* Benjamin, 1968, editado con la colaboración de W. Kuyk y J. Labute; 2a. ed. AK Peters, 1998 [traducido al japonés y al ruso].

[CA] SERRE, J-P.: *Cours d'Arithmétique.* Presses Univ. de France, 1970; 4a. ed. 1995 [traducido al chino, inglés, japonés y ruso].

[AA] SERRE, J-P.: *Arbres, amalgames,* $\mathbf{SL}_2$. Astérisque, n. 46, Soc. Math. de France, 1977, editado con la colaboración de H. Bass; 3a. ed. 1983 [traducido al inglés y al ruso].

[MW] SERRE, J-P.: *Lectures on the Mordell-Weil Theorem,* Vieweg, 1989; 3a. ed. 1997, traducción y edición por Martin Brown a partir de unas notas de M. Waldschmidt.

[TGT] Serre, J-P.: *Topics in Galois Theory,* Jones and Bartlett Publ. 1992, notas escritas por H. Darmon.

Pilar Bayer
Departament d'Àlgebra i Geometria
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes 585
08007 Barcelona
correo electrónico: bayer@mat.ub.es