El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Disquisitio Numerorum

por

Antonio Córdoba

Temptatio

Cuando el diablo de los números se dignó a tentarme para que escribiese en su sección, me encontró ocupado en la redacción de un artículo sobre las transiciones de fase en el modelo de Ginzburg-Landau. Pero me inspiró una idea que paso a detallar. Se trata de una nueva forma de calcular la suma de Euler:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

La separación de los términos del sumatorio en pares e impares,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

nos permite escribir

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^1 x^{2k} dx\right] \left[\int_0^1 y^{2k} dy\right]$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2y^2)^k dxdy = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1 - x^2y^2} = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dxdy}{1 - x^2y^2},$$

donde queda como ejercicio para el lector, la sencilla justificación del intercambio del orden entre la suma y la integral.

El cambio de variable

$$x = \mathrm{th}(u) = \frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \qquad y = \mathrm{th}(v) = \frac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$$

nos da la igualdad:

$$\zeta(2) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dudv}{(\mathrm{ch}(u)\mathrm{ch}(v) - \mathrm{sh}(u)\mathrm{sh}(v))\,(\mathrm{ch}(u)\mathrm{ch}(v) + \mathrm{sh}(u)\mathrm{sh}(v))}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dudv}{\mathrm{ch}(u-v)\mathrm{ch}(u+v)}.$$

El nuevo cambio $s = u - v$, $t = u + v$ produce:

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\mathrm{ch}(s)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{1}{6}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\mathrm{ch}(s)}\right]^2 = \frac{\pi^2}{6},$$

ya que haciendo $e^s = z$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\mathrm{ch}(s)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2ds}{e^s + e^{-s}} = \int_{0}^{\infty}\frac{2dz}{1+z^2} = \pi.$$

La función tangente hiperbólica me había aparecido también, curiosamente, en ese trabajo sobre las transiciones de fase que me tenía ocupado. Mientras he estado escribiendo este ensayo, Javier Cilleruelo e Ignasi Mundet me han mostrado las diversas variaciones de una idea de E. Calabi que circulan por internet: El cambio de variable $x = \mathrm{sen} u/\cos v$, $y = \mathrm{sen} v/\cos u$, reduce la evaluación de $\zeta(2)$ al cálculo del área de un recinto plano. En fin, como escribió Antonio Machado:

Que nadie sabe ya lo que se sabe.
Aunque sepamos todos,
que de todo hay quien sepa.
Lo que sabemos entre todos,
eso no lo sabe nadie.

De summis serierum reciprocarum

Parece ser que Jakob Bernoulli fue el primer matemático que expresó su interés por saber el valor exacto de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

sobre la que dejó escrito lo siguiente: "Sería muy grande nuestro agradecimiento si alguien nos comunicara este cálculo que, hasta ahora, ha eludido nuestros esfuerzos."

Sin embargo, es muy probable que el problema le viniese de su mentor Leibniz, a quien Huyghens había propuesto calcular la suma de los recíprocos de los números triangulares. Descubrir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\} = 1$$

satisfizo tanto al joven Leibniz que impulsó su afición por las matemáticas, que luego le llevaría co-descubrir el Cálculo. Naturalmente, el paso siguiente era sumar los recíprocos de los cuadrados.

En el año 1734 L. Euler resolvió el problema de Jakob obteniendo $\pi^2/6$ para el valor que toma en $x = 2$ la expresión $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$, que había sido introducida por él mismo para estudiar la distribución de los números primos. Sin embargo, ahora es conocida bajo el nombre de función zeta de Riemann, quien la extendió al campo complejo, mostrando, y previendo, muchas de sus interesantes propiedades.

La deducción de Euler es una joya de las Matemáticas, que expresa muy bien el estilo de esa época prodigiosa. Empieza observando que si $P(x)$ es un polinomio de grado n tal que $P(0) = 1$, y si $a_1, \ldots, a_n$ son sus raíces, entonces tenemos la identidad:

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right).$$

Euler afirma que la fórmula debe valer para "funciones analíticas más generales":

$$f(x) = \prod_n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right); \text{ cuando } f(0) = 1, \text{ y donde } \{a_j\} \text{ son los ceros,}$$

y la aplica al caso

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}, \qquad \text{cuyos ceros son } z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

para obtener la representación de la función por medio de un producto infinito:

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) z^2 + \cdots$$

Por otro lado, la fórmula de Taylor nos da el desarrollo:

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = 1 - \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 + \cdots,$$

por lo que identificando los coeficientes obtenemos la evaluación:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cuando Euler hizo este cálculo hacía veintinueve años que Jakob había fallecido. Johann Bernoulli, reconciliado ya con la figura de su hermano mayor, comentó a Euler: "De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido...¡Si estuviera aquí!".

Aunque precisa de un cierto trabajo para hacerlo riguroso, es un argumento fantástico y poderoso, que nos permite calcular todos los valores $\zeta(2n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Euler obtuvo también los desarrollos siguientes:

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

donde los números de Bernoulli B_k están definidos por la fórmula

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots$$

Observemos que

$$\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -\frac{2x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - x^2/n^2} = -\frac{2x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k,$$

por lo que identificando coeficientes, obtenemos la identidad

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}\,.$$

Otra manera de hallar los valores $\zeta(2k)$ la proporcionan las series de Fourier a través de la igualdad de Bessel,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2,$$

aplicada a las funciones $f(x) = x^k$, $0 \leq x < 1$.

Pero si nos preguntásemos por los valores de $\zeta(n)$ cuando n es impar, nos encontraríamos en *terra incognita.* No obstante, de esa pregunta nos ocuparemos más adelante.

$\alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma$, $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$

Una de las primeras revoluciones científicas de que se tiene noticia, fue el descubrimiento por los pitagóricos, no más tarde que en el siglo V de nuestra era, de que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con el lado. Según la leyenda, fue Hipaso quien hizo este hallazgo, pagando con su vida la osadía de haber perturbado el orden cosmológico que la escuela asociaba a los enteros. Para la matemática griega los únicos números eran los enteros y, tal vez, sus cocientes. Ante el descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no crearon una nueva clase de números, más bien eludieron el problema construyendo una teoría de magnitudes geométricas. Por lo menos hasta Arquímedes, quien, entre sus muchos descubrimientos, encontró un método notable para obtener las cifras decimales de π.

Hay que esperar al siglo XVII, con el advenimiento del Cálculo, para que vaya tomando cuerpo la noción del continuo de los números reales, dentro de los cuales podemos identificar a los enteros y a los racionales. Al principio se trataba de medidas de magnitudes. El punto de vista que podríamos denominar geométrico. Sin embargo, no es hasta el siglo XIX, con Dedekind y Weierstrass, cuando se obtiene una construcción aritmética de los números reales.

En 1744 Euler estableció la irracionalidad del número e. En 1761 Lambert demostró la de π. He aquí unos cuantos ejemplos cuya racionalidad o irracionalidad, es todavía desconocida:

$$e+\pi, \qquad \pi^e$$

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right\} = 0.577216\ldots$$

$$\zeta(5) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}. \qquad \text{(En general } \zeta(2k+1) \text{ para } k\geq 2\text{)}$$

¿De qué criterios disponemos para decidir el carácter irracional de un número? De muy pocos. Aparte de las pruebas basadas en la unicidad de la descomposición de un entero en factores primos, que valen para las raíces y cuyo arquetipo (el caso $\sqrt{2}$) se encuentra en los Elementos de Euclides, sólo hay una estrategia básica. Se trata de lo siguiente:

Dados dos racionales distintos p/q, P/Q, $(p,q)=(P,Q)=1$, tenemos que

$$0 \neq \left|\frac{p}{q}-\frac{P}{Q}\right| = \left|\frac{pQ-qP}{qQ}\right| \geq \frac{1}{qQ}.$$

Por lo tanto, si θ es un número real para el que podemos encontrar una sucesión de racionales $\{P_n/Q_n\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} Q_n\left|\theta-\frac{P_n}{Q_n}\right| = 0,$$

entonces θ tiene que ser irracional. Por ejemplo:

$$\left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| = \left| e - \frac{P_n}{n!} \right| \leq \frac{2}{(n+1)!},$$

que es la prueba de la irracionalidad de e obtenida por Euler. La del número π requiere algo más de trabajo.

Los desarrollos en fracción continua ayudaron a desvelar muchas de las propiedades acerca de la aproximación de los irracionales por los racionales. Tales como:

a) Para cualquier irracional α existe una sucesión infinita de racionales distintos $\{p_n/q_n\}$ que verifican

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

b) La fracción continua de un irracional cuadrático es periódica desde un término en adelante. Eso implica que existe una constante positiva C, dependiendo del irracional cuadrático α, de manera que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^2}.$$

En una famosa memoria del año 1844 J. Liouville generalizó el resultado anterior estableciendo un límite a la precisión con la que un número algebraico puede ser aproximado por racionales. Recordemos que un número algebraico α de grado n es una raíz de un polinomio irreducible, de grado n, con coeficientes enteros. Este se llama el polinomio mínimo de α.

Teorema (Liouville) *Dado un número algebraico α de grado $n > 1$, existe una constante positiva $C = C(\alpha) > 0$ tal que:*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}$$

para todo racional p/q, $(p, q) = 1$.

La demostración es un sencillo ejercicio con el teorema del valor medio:

Sea $P(x)$ el polinomio mínimo de α. Podemos suponer que $|\alpha - p/q| \leq 1$, tenemos:

$$0 \neq |P(p/q)| = |P(\alpha) - P(p/q)| \leq \left[\max_{x \in (\alpha-1, \alpha+1)} |P'(x)| \right] |\alpha - p/q| \,.$$

Luego basta con observar que por ser P de coeficientes enteros, ha de verificar la estimación: $|P(p/q)| \geq 1/q^n$.

Este resultado le permitió a Liouville describir una clase “très-étendue” de números transcendentes.

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^{j!}}, \qquad a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad a_j \neq 0 \text{ para infinitos } j\,,$$

son todos números trascendentes.

En 1873 Hermite logró demostrar la transcendencia del número e. Unos años más tarde Lindemann extendió los métodos de Hermite para probar que π también lo es, dando respuesta final al problema de la cuadratura del círculo (en la referencia [4] pueden encontrarse los detalles de estas demostraciones).

Axel Thue, en el año 1909, mejoró el teorema de Liouville demostrando que para cualquier número algebraico α, de grado $n > 1$, y para cualquier entero $k > \frac{n}{2} + 1$, existe $C = C(\alpha; k) > 0$ tal que:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^k},$$

para todos los racionales p/q.

El método de Thue marcó un camino que fue recorrido por Siegel, Dyson y Gelfond, entre otros, quienes produjeron sucesivas mejoras del resultado que culminaron en el teorema obtenido por Roth en el año 1955: La proposición anterior sigue siendo válida para todo $k > 2$. Y esto es lo mejor posible.

¡Fantástico! Los pitagóricos tuvieron la idea revolucionaria de que los números enteros contenían la explicación última del universo. Pero no supieron encajar bien que hubiese magnitudes irracionales. El gran Cantor, ya en el siglo XIX, nos enseñó que el cardinal de los números reales es estrictamente mayor que el de los racionales. Estos últimos son numerables, pueden ponerse en fila, mientras que los irracionales no lo son. De manera que, si escogemos al azar (con densidad uniforme) un número en el intervalo $[0, 1)$, entonces la probabilidad de que sea irracional es 1. Casi todos los números son irracionales. Ahora bien, si alguien nos señala uno en particular y nos pregunta sobre su carácter irracional, es muy probable que nos ponga en un aprieto y no sepamos contestarle. Decidir si un número es racional o irracional es una de las tareas más difíciles de la Teoría de los Números.

En época reciente ha aparecido el importante concepto de números computables: son aquellos que tienen un programa para describirlos. Es decir, para calcular cualquiera de sus cifras decimales.

Como los programas constan de un número finito de palabras, constituyen, según Cantor, un conjunto numerable. Por lo tanto también lo es el de los números computables, aunque estos no tienen que ser racionales, ya que, por ejemplo, $\sqrt{2}$, e y π son computables. Ahora bien, si un número no es computable, es que no podemos describirlo (nombrarlo con un número finito de palabras), ¡es innombrable!.

EL CASO $\zeta(2)$ Y $\zeta(3)$

En el año 1978 R. Apèry sorprendió a la comunidad matemática con una demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$: Generó una sucesión de aproximaciones racionales basadas en fórmulas tan extrañas como la siguiente:

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}.$$

El método de obtención de las aproximantes, aunque ingenioso y obscuro, no hacía, sin embargo, uso alguno de resultados que no hubieran sido conocidos por los matemáticos del siglo XVIII. ¡Una demostración que se le había escapado al gran Euler! Una excelente exposición puede encontrarse en Van der Poorten [2], quien dio una conferencia sobre la prueba de Apèry en el congreso internacional celebrado ese mismo año en Helsinki.

Enseguida se organizaron múltiples seminarios en los que se pretendía entender la demostración. En el que tuvo lugar en el Institute for Advanced Study, dirigido por E. Bombieri, tuve la oportunidad de familiarizarme con la teoría de Siegel. En sus "Lecture notes on transcendental numbers", Princeton, 1949, C. L. Siegel se plantea el problema siguiente: Determinar dos polinomios $A = A_n(x)$ y $B = B_n(x)$, de grado n, y tales que la suma

$$e^x + \frac{A}{B}$$

tenga un cero en el origen de orden $2n+1$. Esa condición implica

$$Be^x + A = R = cx^{2n+1} + \cdots$$

donde R es una serie de potencias que comienza con un término de orden $2n+1$. Si escribimos A y B con coeficientes indeterminados e igualamos los términos de órdenes $0, 1, \ldots, 2n$, obtenemos $2n+1$ ecuaciones lineales homogéneas para los $2n+2$ coeficientes de A y B. Esto prueba que el sistema tiene una solución no trivial A y B. Resulta también que el coeficiente c es distinto de cero.

Para obtener fórmulas explícitas Siegel deriva sucesivas veces:

$$D^{n+1}R = D^{n+1}(Be^x) = e^x(1+D)^{n+1}B = c_0x^n + \cdots,$$

donde $c_0 = (2n+1)(2n)\cdots(n+1)c$. Luego

$$(1+D)^{n+1}B = e^{-x}\{c_0x^n + \cdots\}.$$

Pero como B es un polinomio de grado n, ha de verificarse la igualdad:

$$(1+D)^{n+1}B = c_0x^n.$$

Análogamente $(-1+D)^{n+1}A = c_0x^n$. Tenemos libertad para escoger c de manera que $c_0 = 1$. Es decir:

$$B = (1+D)^{-n-1}x^n \qquad A = (-1+D)^{-n-1}x^n \qquad D^{n+1}R = x^ne^x$$

Consideremos:

$$
\begin{aligned}
J^{k+1}\phi(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}\phi(t)dt = \frac{x^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-t)^k\phi(xt)dt\,,\\
D^kJ^k\phi &= \phi\,,\\
J^kD^k\phi &= \phi, \text{ siempre que } \phi(0)=\phi'(0)=\cdots=D^{k-1}\phi(0)=0\,,\\
D^k(e^{\lambda x}\phi) &= e^{\lambda x}(\lambda+D)^k\phi\,.
\end{aligned}
$$

Las fórmulas anteriores nos permiten hallar los operadores $(\pm 1+D)^{-k}$ y comprobar que si Q es un polinomio con coeficientes enteros, entonces también lo son

$$(\pm 1+D)^{-k}Q.$$

En particular:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n x^n e^{xt}dt\\
&= \frac{x^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{xt}dt\\
&= x^{n+1}\int_0^1 P_n(t)e^{xt}dt
\end{aligned}
$$

donde

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{x^n(1-x)^n\}$$

es el enésimo polinomio de Legendre.

Siegel observa entonces que $0 < |R(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{n!}e^{|x|}$ lo que origina la estimación:

$$0 < |B_n(m)e^m - A_n(m)| \le \frac{m^{2n+1}e^m}{n!}$$

de donde se deduce la irracionalidad de todas las potencias enteras de e.

Resultó una experiencia muy estimulante aprender todas estas ideas y técnicas que están contenidas en las lecciones de Siegel. Para alguien formado en el Análisis Armónico no podían pasar desapercibidos los polinomios de Legendre, así como la conexión con los aproximantes de Padé. El fruto fue una demostración distinta a la obtenida por Apèry.

Teorema *Los números $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ son irracionales.*

Comencemos con las representaciones:

$$\zeta(2) = \int_0^1\int_0^1 \frac{dsdt}{1-st} \qquad \zeta(3) = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(st)}{1-st}dsdt\,.$$

La primera de las cuales ya fue justificada en el primer epígrafe de este ensayo. Para obtener la segunda consideremos las integrales:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^\alpha t^\beta}{1-st} dsdt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} \cdot \frac{1}{n+\beta}.$$

i) Si $\alpha > \beta$ son enteros positivos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^\alpha t^\beta}{1-st} dsdt = \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+\beta} - \frac{1}{n+\alpha} \right\} = \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{n=\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{n},$$

que es un número racional cuyo denominador es un divisor del número $d_\alpha^2 = [m.c.m(1,2,\dots,\alpha)]^2$.

ii) Si $\alpha = \beta$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^\alpha t^\alpha}{1-st} dsdt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \zeta(2) - \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{n^2}$$

$$= \zeta(2) - \text{ racional cuyo denominador divide a } d_\alpha^2.$$

Juntando ambos casos tenemos que si $P(s,t)$ es un polinomio con coeficientes enteros, de grado $\leq n$ en cada variable, entonces:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P(s,t)}{1-st} dsdt = A_n \zeta(2) + B_n,$$

donde A_n es entero y B_n es un racional cuyo denominador divide a $d_n^2 = [m.c.m(1,2,\dots,n)]^2$.

Consideremos ahora la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^{\alpha+\gamma} t^{\alpha+\gamma}}{1-st} dsdt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+\beta+n)^2}$$

donde α es un entero positivo y γ es un número real. Derivamos la igualdad anterior y evaluamos en $\gamma = 0$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^\alpha t^\alpha \log(st)}{1-(st)} dsdt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^3} = -2 \left\{ \zeta(3) - \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{n^3} \right\}.$$

Si $\alpha > \beta$, con un método análogo obtenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{s^\alpha t^\beta \log(st)}{1-st} dsdt = -\frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{n=\beta+1}^{\alpha} \frac{1}{n^2}.$$

Luego, si $Q(s,t)$ es un polinomio de coeficientes enteros, de grado $\leq n$ en cada variable, entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{Q(s,t)\log(st)}{1-st} dsdt = A_n\zeta(3) + B_n,$$

donde A_n es un entero y B_n es un racional cuyo denominador es un divisor de d_n^3.

Está claro que el objetivo siguiente consiste en encontrar una sucesión de polinomios $P_n(s,t)$, $Q_n(s,t)$ de grado n en cada variable, de manera que las integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(s,t)}{1-st} dsdt, \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{Q_n(s,t)\log(st)}{1-st} dsdt$$

sean no nulas y de valor absoluto lo menor posible.

Observemos que:

$$d_n = m.c.m[1,\ldots,n] = \prod_{p\leq n} p^{[\log n/\log p]} \leq \prod_{p\leq n} p^{\log n/\log p} = \prod_{p\leq n} e^{\log n}$$

$$= n^{\pi(n)} \leq n^{\frac{(1+\epsilon)n}{\log n}} = e^{n(1+\epsilon)}$$

para todo $\epsilon > 0$ y para todo n suficientemente grande. En esta deducción hemos utilizado el teorema de los números primos y la notación $[x]$ = parte entera del número x, $\pi(x)$ = números primos menores o iguales a x.

La demostración de la irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ se concluye observando que las elecciones

$$P_n(s,t) = (1-t)^n P_n(s) = (1-t)^n \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\{s^n(1-s)^n\}$$

$$Q_n(s,t) = P_n(s)P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\{s^n(1-s)^n\}\,\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\{t^n(1-t)^n\}$$

cumplen el cometido:

$$0 < \left|\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(s,t)}{1-st} dsdt\right| \leq C\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}$$

$$0 < \left|\int_0^1 \int_0^1 \frac{Q_n(s,t)\log(st)}{1-st} dsdt\right| \leq C\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}.$$

Habida cuenta de que la primera de las integrales es de la forma $A_n\zeta(2) + B_n$ y la segunda $A'_n\zeta(3) + B'_n$, donde A_n y A'_n son enteros y B_n, B'_n son racionales cuyos denominadores dividen ambos a d_n, las estimaciones

$$e^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 < 1, \qquad e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$$

permiten concluir la demostración.

Los detalles pueden encontrarse en [4]. Estos cálculos son del mes de Noviembre de 1978. Durante un tiempo me dediqué con intensidad a aplicarlos a los casos de $\zeta(5), \zeta(7), \ldots$. Al cabo de varios meses hube de conceder la derrota, pero disfruté contando la demostración en muchas universidades. Primero en Princeton, Maryland, Madison, Chicago y luego en tantas otras.

Independientemente, F. Beukers [3] se adelantó con un manuscrito que contenía una deducción muy similar. Quizás podría calificarse de un pequeño fiasco personal. Pero, después de todo, se trataba tan sólo de una versión más inteligible, para un analista armónico, de la prueba de Apèry. Así es que no publiqué mis cálculos de entonces y di carpetazo al asunto. El diablo de los números me ha hecho evocar estas historias que tenía medio olvidadas. Me ha distraído de mi tarea con las transiciones de fase y me ha hecho trabajar otra vez, durante varios días, en un tema que un día decidí abandonar. Pero nunca se cae en la tentación en vano y siempre nos queda la pregunta: ¿Dónde estarán los ceros de la función ζ? ¡Diablo de los Números!: Hagamos un pacto.

Bibliografía

[1] Apèry, R., *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Asterisque, 61

[2] Van der poorten, A., *A proof that Euler missed ... Apèry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1**, 1979, n 4.

[3] Beukers, F., *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. **11** 1979, n 3.

[4] Cilleruelo, J., Córdoba, A., *La teoría de los números*, Biblioteca Mondadori, Madrid, 1992

[5] Elkies, N.D., *On the sums* $\sum(4k+1)^{-n}$, prepublicación electrónica que puede obtenerse en `http://es.arXiv.org`

[6] Barceló, T., *Las matemáticas en su historia,* Notas de un curso de Historia de las Matemáticas.

Antonio Córdoba Barba
Departamento Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid
correo electrónico: `antonio.cordoba@uam.es`