

---

---

## PROGRAMAS INFORMÁTICOS EN MATEMÁTICAS

Sección a cargo de

**Emilio Bujalance**

---

---

### Cinderella

por

**Antonio F. Costa**

*Cinderella* es un programa diseñado para estudiar geometría sintética de un modo nuevo que se ha llamado dinámico, este término será explicado más adelante.

Tradicionalmente la geometría se ha beneficiado con la posibilidad de la experimentación. Todos recordamos con mayor o menor agrado más de una tarde pasada dibujando con ayuda de los instrumentos clásicos de dibujo: la regla y el compás. Por otro lado pocos dudan del valor formativo del estudio de la geometría sintética, pero en nuestro tiempo donde las nuevas tecnologías lo invaden todo, parecía que este tipo de enseñanza pasaría a un segundo plano. No sólo no ha sido así, sino que las nuevas tecnologías proporcionan herramientas que pueden ayudar, potenciar y hacer evolucionar de un modo revolucionario la enseñanza de la geometría.

Cinderella no ha sido el primer paso en esta dirección estamos obligados a mencionar los pioneros: *The Geometer's Sketchpad* y *Cabri-Géomètre*. A estos antecesores se les debe reconocer muchas de las posibilidades que ofrece ahora Cinderella e incluso alguna superioridad parcial. Por su parte Cinderella comenzó a ser distribuido en mayo de 1999 por Springer-Verlag y sus autores son J. Richter-Gerbert en la ETH de Zürich y U.H. Kortenkamp en la Universidad Libre de Berlín. En este momento se distribuye la versión 1.2.

Intentaremos describir que es lo que se puede hacer con Cinderella. Supongamos que queremos construir un triángulo y comprobar que sus tres medianas se cortan en un punto. Para ello basta pulsar los botones necesarios para definir los elementos geométricos que necesitamos, por ejemplo la recta que pasa por dos puntos, y situarlos por medio del ratón en la pantalla. La tarea para la realización del dibujo no es mucho más costosa que cuando se realiza con un lápiz sobre una hoja de papel, sin embargo vamos a ver que ventajas nos aporta el hacerlo con Cinderella.

Una vez acabada nuestra configuración geométrica en primer lugar la podemos "mover". Pulsando sobre el botón de la figura 2, cada elemento de la configuración, que no esté completamente determinado por otros elementos,

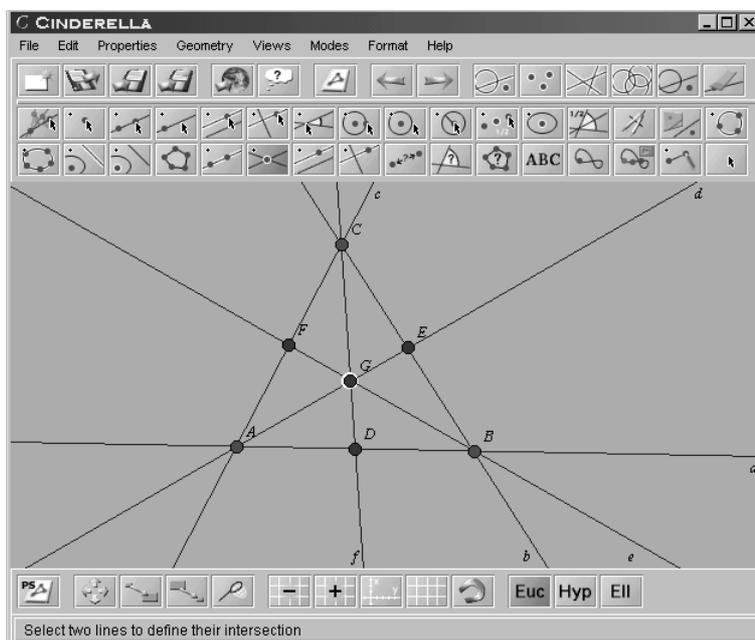


Figura 1

se puede mover dentro de los parámetros libres que le permita su definición. Si en nuestra construcción una recta estaba definida como aquella que pasa por un punto y es perpendicular a otra, al mover la configuración la propiedad de definición de tal recta se mantiene, sigue siendo perpendicular a la recta y pasando por el punto. De este modo se obtienen nuevas configuraciones de apariencia muy distinta pero que esencialmente son la misma. Esto hace que en las construcciones se tenga que cuidar como se crea cada elemento, no solo se dibujan sino que se definen objetos geométricos. De este modo el estudiante de geometría posee ahora un maravilloso medio para investigar en geometría, y esta posibilidad de movimiento y de tratamiento informático de objetos geométricos es lo que anunciábamos antes como *geometría dinámica*.



Figura 2

Por supuesto la geometría dinámica da lugar a problemas técnicos complejos que han sido bien resueltos en Cinderella. Piénsese por ejemplo que al realizar movimientos de configuraciones esto puede llevar consigo la resolución de ecuaciones y la elección de distintas ramas de funciones multivaluadas o bien el paso por un punto del infinito, esto puede causar que al mover haya saltos o desapariciones. Por ejemplo si se dibujan cinco puntos en la pantalla y se construye la cónica que pasa por ellos (basta pulsar también un botón en la barra de herramientas de Cinderella), al mover uno de los puntos es impresionante como las cónicas pasan de elipses a parábolas e hipérbolas pasando

por degeneradas de un modo continuo. Así Cinderella es el mejor programa para realizar simulaciones de sistemas articulados.

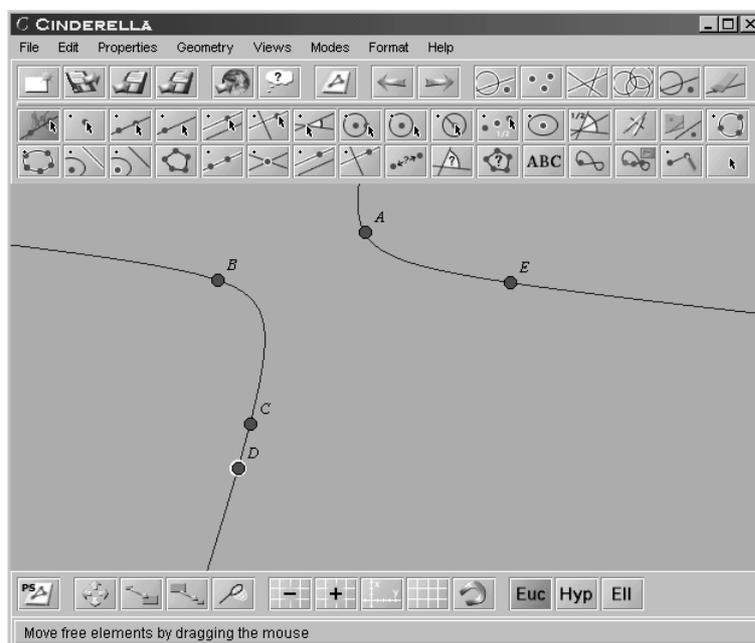


Figura 3

Casi sugerido por todo lo que hemos dicho sobre la posibilidad de mover configuraciones está la posibilidad de diseñar animaciones o de dibujar lugares geométricos. Para ello basta elegir un elemento móvil, por ejemplo un punto y determinar después la línea sobre la que se mueve el punto al hacer una animación. De este modo se produce una animación que muestra la evolución de una configuración geométrica. De un modo totalmente análogo se origina el lugar geométrico que describe un punto al hacer variar un elemento de una configuración. Algunos ejemplos de animaciones y lugares geométricos incluidos con el programa dan una idea de las posibilidades, como por ejemplo la cardioide de la figura siguiente.

Si, según estábamos dibujando el punto de corte de las medianas del triángulo, hubiéramos tenido abierta la ventana “Information Window” del menú Views, nos habríamos quedado sorprendidos de como el programa Cinderella adivina o “prueba” que las tres medianas se cortan. Cinderella incorpora un sistema de prueba automática que está basada en la técnica llamada por los autores “Randomized Theorem Checking”. Esta técnica consiste en mover la configuración geométrica en muchas posiciones diferentes y comprobar que en cada una de las nuevas situaciones el hecho a probar se verifica. Por supuesto es un modo de prueba un tanto discutible pero de lo que no cabe duda es que puede ser útil para después encontrar demostraciones más válidas.

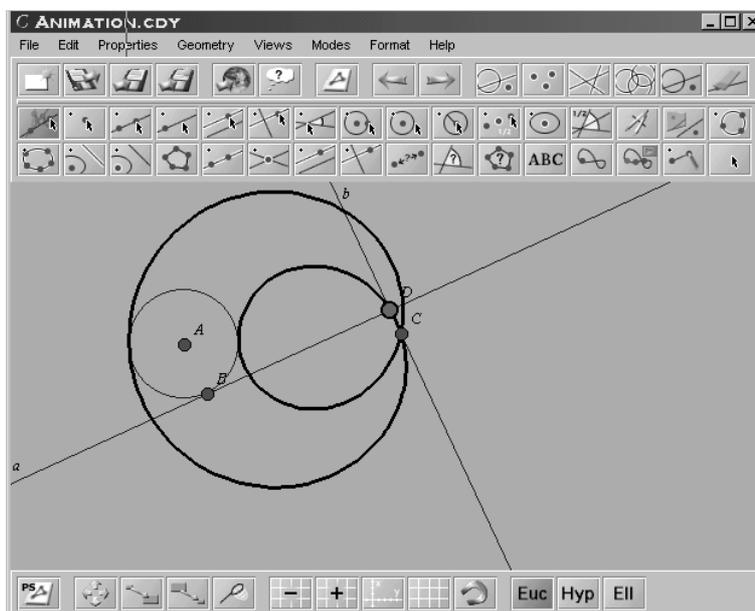


Figura 4

Una de las novedades de Cinderella con respecto de sus antecesores es construir, mover, visualizar y llevar a cabo todas las funciones, no solo en geometría euclídea, sino también en geometría esférica e hiperbólica (en el modelo del disco de Poincaré o en el modelo proyectivo de Beltrami). Basta seleccionar con los botones Euc, Hyp, Ell para trabajar en una u otra geometría. Además es posible pasar una misma configuración de una geometría a otra, aunque aquí se ha de tener cuidado pues ciertos elementos cambian cuando son definidos en una geometría u otra, por ejemplo el punto medio de otros dos en geometría esférica son dos puntos. En mi opinión Cinderella es un instrumento de gran valor para la enseñanza de las geometrías no euclídeas, dada la dificultad de la realización de figuras y experimentación en ellas.



Figura 5

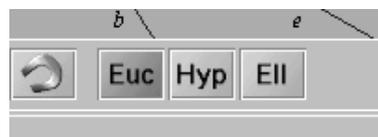


Figura 6

En la siguiente figura hemos puesto las representaciones, euclídea y esférica de la configuración formada por un triángulo y sus medianas, es interesante ver moverse una configuración simultáneamente en varias geometrías.

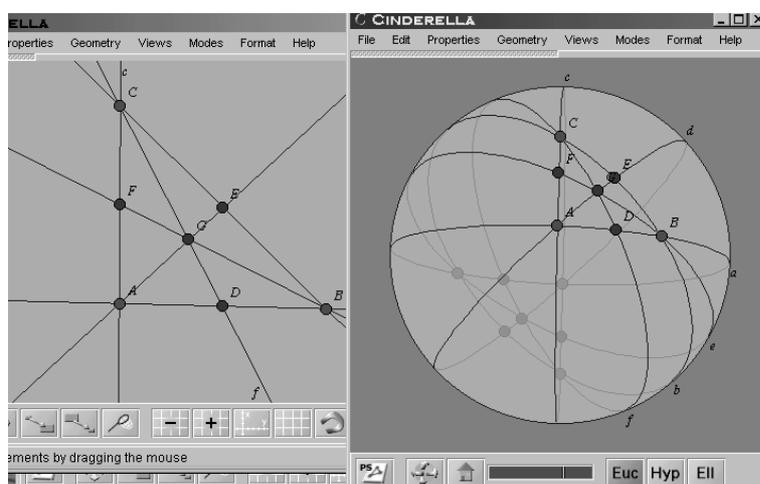


Figura 7

Otro de los puntos fuertes de Cinderella es que permite generar “Java scripts” para crear “plug-ins” interactivos que se pueden añadir a páginas web. Es decir, podemos crear una figura con Cinderella, ponerla en una página web y que tal figura tenga la posibilidad de moverse por aquel que visualiza la página por Internet. También es posible crear “applets” con animaciones y fruto del buen hacer de Cinderella en este campo son las construcciones que ya empiezan a aparecer en la red. Por ejemplo el vencedor de la última competición MATHPLET, lo consiguió con unas páginas sobre transformaciones geométricas realizadas con Cinderella. En cualquier caso en la página web de Cinderella: [www.cinderella.de](http://www.cinderella.de) se pueden observar varios ejemplos bonitos de “applets”.

Por último hemos de destacar el editor de ejercicios. Con él es posible diseñar ejercicios para que el alumno tenga que realizar una construcción y el propio programa chequea a cada paso la solución propuesta por el alumno ofreciendo indicaciones. Después el ejercicio se puede publicar en una página web y el alumno intentar la resolución recibiendo a cada paso indicaciones. Este tipo de ejercicios pueden ser de gran utilidad en la enseñanza a distancia y por supuesto queda un gran trabajo: la elaboración de materiales didácticos usando esta nueva y poderosa herramienta. En la página [www.mathsnet.net/dynamic/cindy](http://www.mathsnet.net/dynamic/cindy) aparecen varios ejercicios realizados con Cinderella que dan una idea de lo que se puede conseguir.

## BIBLIOGRAFÍA

Cabri-Geomètrè, Página web oficial: <http://www.cabri.net/index-e.html>

J.R. KING, D. SCHATTSCHNEIDER, EDITORS, *Geometry Turned on: Dinamic Software, Teaching, and Research*, Math. Assoc. of America Notes, 1997.

- J. RICHTER-GERBET, U. H. KORTENKAMP, The Interactive Geometry Software Cinderella, Springer-Verlag, Berlin 1999.
- J. RICHTER-GERBET, publicaciones en la página personal:  
<http://www.inf.ethz.ch/~richter/>.
- T. RECIO, Cálculo Simbólico y Geométrico, Editorial Síntesis, Madrid 1998.

Antonio F. Costa  
Dpto. Matemáticas Fundamentales  
Facultad de Ciencias, UNED  
C. Senda del Rey, 9  
28040 Madrid