Problemas matemáticos para el próximo siglo

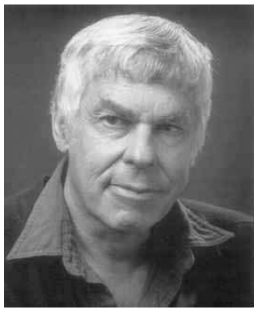
por

S. Smale[1]

Este artículo recoge la conferencia pronunciada por Steve Smale en el Instituto Fields de Toronto con ocasión del sexágesimo cumpleaños de V. I. Arnold.

El texto de esta conferencia apareció publicado por primera vez en el Mathematical Intelligencer, *Vol. 20, Primavera de 1998, p. 7-15. También ha aparecido (en versión ligeramente ampliada) como un capítulo del libro* Mathematics: Frontiers and perspectives, *publicado en el año 2000 por la International Mathematical Union y la American Mathematical Society y editado por V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax y B. Mazur.* **La Gaceta** *agradece a The Mathematical Intelligencer el permiso para la traducción y publicación de este artículo.*

Introducción



S. Smale

V. I. Arnold, en nombre de la Unión Matemática Internacional, se ha dirigido a varios matemáticos solicitándoles que describieran algunos grandes problemas matemáticos para el próximo siglo[2]. Este artículo es mi respuesta a su petición.

La invitación de Arnold está inspirada en parte por la lista de problemas de Hilbert de 1900 (véase, por ejemplo, [Browder, 1976]) y me he servido de esta lista como ayuda para escribir el presente ensayo.

Propongo 18 problemas, elegidos de acuerdo con los siguientes criterios:

[1]Steve Smale nació en 1930 en Michigan, Estados Unidos de América. Se doctoró en la Universidad de Michigan bajo la dirección de Raoul Bott. Ha sido profesor de la Universidad de Chicago, de la Universidad Columbia, de la Universidad de California en Berkeley (desde 1964 hasta 1995) y de la City University de Hong Kong, desde 1995 hasta el presente. En 1966 recibió la Medalla Fields, en el Congreso Internacional de Matemáticos que se celebró en Moscú. También ha sido galardonado con el premio Veblen de la American Mathematical Society y con la National Medal of Science de los Estados Unidos de América. Smale ha contribuido decisivamente al desarrollo, durante este último medio siglo, de la Topología, los Sistemas Dinámicos, la Economía Matemática o la Teoría de la Complejidad.

[2]Los textos a los que se hace alusión aparecen recogidos en el libro *Mathematicas: Frontiers and perspectives,* IMU-AMS. Editores: V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax y B. Mazur, 2000.

1. Enunciado sencillo. Con preferencia, además, por aquellos problemas con enunciado matemáticamente preciso.

2. Conocimiento personal del problema. Lo que ha hecho la labor más complicada.

3. Convicción personal de que el problema, su solución, los resultados parciales o incluso los intentos de resolución del mismo puedan resultar de importancia para las Matemáticas y su desarrollo durante el próximo siglo.

Algunos de estos problemas son bien conocidos. De hecho, entre ellos se encuentran los tres que yo creo que son los problemas abiertos más importantes de las Matemáticas, a saber, la hipótesis de Riemann, la conjetura de Poincaré y la cuestión "¿$P = NP$?". Además de la hipótesis de Riemann, hay otro de entre los problemas que enunciaré más adelante que también aparece en la lista de Hilbert (el decimosexto problema de Hilbert). Hay cierto solapamiento entre este artículo y un trabajo mío anterior: *"Dynamics retrospective, great problems, attemps that failed"* [Smale, 1991].

Comencemos.

PROBLEMA 1: LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

Consideremos la función Zeta de Riemann, definida como la prolongación analítica de

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1\,.$$

¿Es cierto que los ceros de la función ς que están dentro de la banda crítica $0 \leq \Re(s) \leq 1$ se hallan todos situados sobre la recta $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$?

Éste es el octavo problema en la lista de Hilbert. Hay muchos buenos libros, todos fáciles de encontrar, que tratan de la función Zeta y la hipótesis de Riemann. Por tanto, dejo su discusión en este punto.

PROBLEMA 2: LA CONJETURA DE POINCARÉ

Supongamos que una variedad tridimensional compacta y conexa tiene la propiedad de que cada círculo contenido en ella puede deformarse a un punto. ¿Ha de ser esta variedad homeomorfa a la 3-esfera?

La n-esfera es el espacio

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

Una variedad compacta n-dimensional puede pensarse como una superficie cerrada y acotada n-dimensional (diferenciable y no singular) en un espacio euclídeo.

La conjetura de Poincaré en dimensión n afirma que una variedad M compacta n-dimensional que goce de la propiedad de que toda inmersión

$$f : S^k \longrightarrow M,$$

con $k < n$ (o equivalentemente, $k \leq \frac{n}{2}$), puede deformarse a un punto, ha de ser homeomorfa a S^n.

Henri Poincaré estudió este problema en sus pioneros trabajos sobre topología. En 1900 Poincaré anunció una demostración del caso general n-dimensional (véase [Poincaré, 1953], p. 338-370), pero poco después (en 1904) encontró un contraejemplo a su primera versión del enunciado [Poincaré, 1953, p. 435-498]. En el segundo de estos artículos Poincaré se limita a $n = 3$ y enuncia (aunque no como "conjetura") el caso tridimensional tal y como aparece más arriba.

He descrito mi relación personal con este problema en [Smale, 1990], donde escribí:

> "La primera vez que oí hablar de la conjetura de Poincaré fue en Ann Arbor en 1955, cuando estaba escribiendo mi tesis sobre un cierto problema topológico. Poco tiempo después, creí haber encontrado una demostración (en 3 dimensiones). Hans Samuelson estaba en su despacho y yo, muy entusiamado, le expliqué esquemáticamente mi idea [. . .]. Poco después de abandonar su despacho me di cuenta de que en mi "demostración" no había utilizado ninguna hipótesis sobre la variedad tridimensional."

En 1960, "en las playas de Río", di una respuesta afirmativa a la conjetura de Poincaré para dimensión n, con $n > 4$. En 1983, Mike Freedman dio una respuesta afirmativa para el caso $n = 4$. (Nota: para $n > 4$, yo había demostrado un resultado aún más fuerte, a saber, que M ha de ser la unión diferenciable de dos bolas, $M = D^n \cup D^n$; para $n = 4$, este resultado sigue siendo, a fecha de hoy, un problema abierto.)

Para más información sobre estos temas, el lector puede consultar [Smale 1963], además de las referencias ya citadas.

Tras Poincaré, muchos otros matemáticos han afirmado tener una demostración para el caso tridimensional. Véase [Taubes, 1987] para más información sobre algunos de estos intentos.

Una razón por la que la conjetura de Poincaré es fundamental en la historia de las Matemáticas es que ha ayudado a percibir a las variedades como objetos dignos de estudio por sí mismos. De esta manera, Poincaré ha ejercido una enorme influencia sobre el desarrollo de las Matemáticas del siglo XX al fijar la atención sobre objetos geométricos tales como las variedades algebraicas, las variedades riemannianas, etc.

Estoy seguro de que hoy en día se está produciendo un fenómeno comparable con la noción de "algoritmo de tiempo polinomial". Los algoritmos están empezando a ser objetos de estudio por sí mismos, y no simplemente como una herramienta para resolver otros problemas. De manera que sugiero que el estudio del cálculo de soluciones (como, por ejemplo, un algoritmo) va a desempeñar en el desarrollo de las Matemáticas durante el próximo siglo un papel de igual importancia al que ha tenido durante el presente siglo el estudio del conjunto de soluciones de las ecuación (como, por ejemplo, una variedad).

PROBLEMA 3: ¿$P = NP$?

Considero este problema como un verdadero regalo de los informáticos a los matemáticos. Quizás resulte útil plantear esta cuestión en términos de matemáticas tradicionales.

Con este fin consideremos para empezar el Teorema de los Ceros de Hilbert sobre los números complejos. Sean $f_1, \dots, f_k$ polinomios complejos en n variables; se nos pide decidir si estos polinomios tienen un cero común $\varsigma \in \mathbb{C}^n$. El Teorema de los Ceros afirma que no hay tal cero común si y sólo si existen polinomios complejos $g_1, \dots, g_k$ en n variables que cumplan la identidad polinómica

$$\sum_{i=11}^{k} g_i f_i \equiv 1\,. \tag{1}$$

La versión efectiva del Teorema de los Ceros, establecida por Brownawell (1987) y otros, afirma que en (1) se puede exigir que los grados de los polinomios g_i cumplan que

$$\text{grado}(g_i) \leq \text{máx}(3, D)^n\,, \qquad D = \text{máx}\{\text{grado}(f_i)\}\,.$$

Con esta cota sobre los grados, el problema de la decidibilidad se transforma en un problema de Álgebra Lineal. Dados los coeficientes de los f_i se puede comprobar si (1) tiene una solución cuyas incógnitas son los coeficientes de los g_i. Así se tiene un algoritmo de decisión en el Teorema de los Ceros. El número de operaciones aritméticas que este algoritmo requiere crece exponencialmente con el número de coeficientes de los f_i (el tamaño de los datos de entrada).

Conjetura ($P \neq NP$ sobre $\mathbb{C}$). *No existe ningún algoritmo de tiempo polinomial para decidir el Teorema de los Ceros.*

Un algoritmo de tiempo polinomial es un algoritmo en el que el número de pasos de cálculo que requiere su ejecución está acotado por un polinomio en el número de coeficientes de f_i o, en otras palabras, está polinómicamente acotado.

Para darle sentido matemático a esta conjetura, se necesita una definición formal de algoritmo. En este contexto, la definición tradicional de una máquina de Turing carece de sentido. En [Blum-Shub-Smale, 1989] se propone una definición adecuada, y la teoría correspondiente se expone en [Blum-Cucker-Shub-Smale (o BCSS), 1997].

Muy brevemente, una máquina sobre $\mathbb{C}$ admite como datos de entrada una cadena finita de números complejos y lo mismo para estados y para datos de salida. El cálculo sobre los estados permite operaciones aritméticas y desplazamientos en la cadena. Finalmente, se define una operación de ramificación sobre la pregunta "¿$x_1 = 0$?".

El tamaño de un dato de entrada es el número de elementos de la cadena de entrada. El tiempo de cálculo es el número de operaciones de la máquina necesarias para transformar el dato de entrada en el dato de salida. De esta manera la noción de algoritmo en tiempo polinomial sobre $\mathbb{C}$ está bien definida.

Todo lo que se acaba de decir sobre máquinas y sobre la conjetura utiliza únicamente la estructura de $\mathbb{C}$ como cuerpo, y, por consiguiente, ambas, la máquina y la conjetura, tienen sentido sobre cualquier cuerpo. En particular, si el cuerpo es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, el cuerpo de dos elementos, lo que obtenemos son máquinas de Turing.

Considérese el siguiente problema de decisión: dados (como datos de entrada) k polinomios en n variables con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ¿tienen algún cero en común en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$?

> **Conjetura.** *En $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no hay algoritmo de tiempo polinomial para decidir este problema.*

Esta conjetura es una sencilla reformulación de la conjetura clásica $P \neq NP$.

En lo que acabamos de plantear he dejado de lado las ideas básicas y los teoremas relativos a la NP-completitud. Para el caso clásico de Cook y Karp, véase [Garey-Johnson, 1979] y para la teoría sobre un cuerpo arbitrario, véase [BCSS].

Problema 4: Ceros enteros de un polinomio

Comencemos por definir un invariante diofántico τ que tiene sus raíces en la Teoría de la Complejidad. Un *programa* para un polinomio $f \in \mathbb{Z}[t]$ en una variable t y con coeficientes enteros es el objeto $(1, t, u_1, \ldots, u_k)$ donde $u_k = f$ y para todo l, $u_l = u_i \star u_j$, $i, j < l$, donde la operación $\star$ es $+$, $-$ ó $\times$. Aquí, $u_0 = t$, y $u_{-1} = 1$. Se define $\tau(f)$ como el menor k de todos estos programas.

¿Está el número de ceros enteros distintos de f acotado polinomialmente por $\tau(f)$? En otros términos, ¿es cierto que

$$Z_\alpha(f) \leq \tau(f)^c \qquad \textit{para todo} \qquad f \in \mathbb{Z}[t]?$$

Aquí $Z_\alpha(f)$ es el número de ceros enteros distintos de f y c es una constante universal.

Mike Shub y yo descubrimos este problema en nuestros estudios sobre complejidad. Y demostramos que una respuesta positiva implicaría que el Teorema de los Ceros es intratable como problema de decisión sobre $\mathbb{C}$ y que, por consiguiente, $P \neq NP$ sobre $\mathbb{C}$. Véase [Shub-Smale, 1995] y también [BCSS].

Como el grado de f es menor o igual que $2^{\tau+1}$, con $\tau = \tau(f)$, en total no hay más de $2^{\tau+1}$ ceros.

Para los polinomios de Chebychev, el número de ceros reales distintos crece exponencialmente con τ.

Muchos problemas diofánticos clásicos son de dos o más variables. Aquí se pide una estimación en una única variable, y sin embargo, no parece demasiado fácil.

He aquí un problema relacionado. Un *programa* para un entero m es el objeto $(1, m_1, \ldots, m_l)$ donde $m_l = m$, $m_0 = 1$, $m_q = m_i \star m_j$ con $i, j < q$ y donde la operación $\star$ puede ser $+, -$ ó $\times$. Ahora, sea $\tau(m)$ el mínimo l de todos estos programas. De manera que $\tau(m)$ representa el procedimiento más rápido que permite construir el entero m partiendo de 1 y utilizando tan sólo las operaciones de adición, de sustracción y de multiplicación.

Problema: *¿Existe una constante c tal que $\tau(k!) \leq (\log k)^c$ para todo entero k?* Podría esperarse que éste no fuera el caso, y que, en consecuencia, $k!$ sea "difícil de calcular". Véase [Shub-Smale, 1995].

PROBLEMA 5: COTAS SOBRE LA ALTURA DE CURVAS DIOFÁNTICAS

¿Se puede decidir si una ecuación diofántica $f(x,y) = 0$ (con $f \in \mathbb{Z}[u,v]$ dado) es resoluble en tiempo 2^{s^c}, donde c es una constante universal?

Se designa por $s = s(f)$ al tamaño de f definido por

$$s(f) = \sum_{|\alpha| \leq d} \text{máx}(\log |a_\alpha|, 1)$$

cuando

$$f(x,y) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{y} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \alpha_i \geq 0\,.$$

Se dice que $f(x,y)$ es resoluble si existen enteros x, y con $f(x,y)=0$. Se utiliza el modelo computacional de Turing.

Este problema aparece propuesto en [Cucker-Koiran-Smale, 1999]. El tamaño $s(f)$ es una versión de la "altura" de f. Las conjeturas sobre cotas de alturas que aparecen en [Lang, 1991] pueden resultar muy útiles para abordar este problema. Véase también [Manders-Adelman, 1978].

Problema 6: Finitud del número de equilibrios relativos en Mecánica Celeste

> *Dados los números reales positivos $m_1, \ldots, m_n$ que representan las masas en el problema de los n cuerpos en mecánica celeste, ¿es finito el número de equilibrios relativos?*

Este problema aparece en el libro de Mecánica Celeste de Wintner (1941). Un equilibrio relativo es una solución de las ecuaciones de Newton que está inducida por una rotación plana.

En el problema de los tres cuerpos hay cinco equilibrios relativos: tres que fueron descubiertos por Lagrange, y dos por Euler. Pero para cuatro cuerpos el problema aguarda solución.

En [Smale, 1970], he interpretado los equilibrios relativos como puntos críticos de una función inducida por el potencial del problema plano de n cuerpos. De manera más precisa, los equilibrios relativos corresponden a los puntos críticos de

$$\widehat{V} : (S-\Delta)/SO(2) \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde

$$S = \left\{ x \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n : \sum_i m_i x_i = 0, \quad \frac{1}{2}\sum_i m_i \left\|x_i\right\|^2 = 1 \right\},$$

$$\Delta = \left\{ x \in S_k : \exists\,(i,j)\,,\ i \neq j, x_i = x_j \right\} ;$$

el grupo de las rotaciones $SO(2)$ actúa sobre $S-\Delta$ y $\widehat{V}$ está inducida sobre el cociente por el potencial

$$V(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}.$$

Obsérvese que $V : S \longrightarrow \mathbb{R}$ permanece invariante bajo la acción del grupo de rotaciones $SO(2)$ y que el espacio cociente $S/SO(2)$ es homeomorfo al espacio proyectivo complejo de dimensión $n-2$.

Mike Shub (1970) ha demostrado que el conjunto de puntos críticos es compacto y Palmore (1976) que, incluso para $n=4$, $\widehat{V}$ puede tener puntos críticos degenerados.

Los equilibrios relativos desempeñan un importante papel en Mecánica Celeste, por ejemplo, en la bifurcación del momento angular. Además, en el sistema solar, los planetas troyanos corresponden a los equilibrios relativos de Lagrange.

Kuz'mina (1977) ha encontrado acotaciones superiores explícitas en el caso genérico.

Se puede encontrar información adicional en [Abraham-Marsden, 1978].

PROBLEMA 7: DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS SOBRE LA ESFERA BIDIMENSIONAL

Sea

$$V_N(x) = \sum_{1\leq i<j\leq N} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}$$

donde $x = (x_1, \ldots x_N)$ y donde los x_i son puntos distintos de la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y $\|x_i - x_j\|$ es la distancia en $\mathbb{R}^3$. Escribiremos V_N para denotar $\text{mín}_x V_n(x)$.

Encontrar $(x_1, \ldots, x_N)$ *tales que*

$$V_N(x) - V_N \leq c \log N, \tag{2}$$

donde c es una constante universal.

"Encontrar" quiere decir dar un algoritmo que, con N como dato de entrada, da como dato de salida puntos distintos $x_1, \ldots x_N$ sobre la esfera que satisfacen (2). Para ser precisos conviene especificar que se buscan algoritmos sobre los números reales en el sentido de [BCSS] y con tiempo de ejecución polinomial en N.

Este problema tiene su origen en la Teoría de la Complejidad, en un artículo escrito con Mike Shub (ver [Shub-Smale, 1993]). El problema surgió por nuestro interés en encontrar un buen polinomio que pudiera servir de punto de partida de un algoritmo de homotopía para "llevar a cabo" el Teorema Fundamental del Álgebra.

Se dice que la N-upla $(x_1, \ldots, x_N) = x$ es un punto elíptico de Fekete si se tiene que $V_N(x) = V_N$ (véase [Tsuji, 1959]).

La función V_N, como función de N, verifica

$$V_N = -\frac{1}{4}\log\left(\frac{4}{e}\right)N^2 - \frac{1}{4}N\log N + O(N) .$$

Es natural considerar igualmente las funciones

$$V_N(x,s) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}, \qquad V_{N,s} = \min_x V_N(x,s) ,$$

con x como antes y $0 < s < 2$. Los valores particulares $V_N(x)$ y V_N corresponden de manera natural a $s = 0$ y, para $s = 1$, $V_{N,1}(x)$ es el potencial de Coulomb, y $V_N(1)$ corresponde a la posición de equilibrio de N electrones restringidos a permanecer sobre la 2-esfera.

Le pedí a Ed Saff que me ayudase a resolver el problema principal de más arriba. Posteriormente, él y sus colegas han escritos varios artículos muy buenos sobre este tema y sus ramificaciones. Véase [Kuijlaars-Saff, 1997] y [Saff-Kuijlaars, 1997] para una idea más clara del contexto y otras precisiones. En [Rakhmanov-Saff-Zhou, 1994] el lector puede encontrar cálculos numéricos (N=12000) sobre estos problemas.

Otro punto de vista sobre nuestro problema principal consiste en optimizar la función

$$W_N(x) = (\exp V_N(x))^{-1} = \prod_{i<j} \|x_i - x_j\| \ .$$

Sin embargo, como aparece escrito en [Shub-Smale, 1993], “puede que esto no sea tan sencillo, ya que hay puntos de silla de índice N (N puntos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ equidistribuidos sobre un círculo máximo de la esfera). Además, las distintas simetrías que posee W_N tenderán a confundir el planteamiento”.

Problema 8 : Introducción de la dinámica en la teoría económica

El siguiente problema no es de matemática pura, sino fronterizo entre Matemáticas y Economía. Sólo se ha resuelto en casos muy concretos.

> *Extender el modelo matemático de la teoría general del equilibrio para incluir los ajustes de los precios.*

Hay una teoría (estática) del equilibrio de los precios en Economía, que partiendo de Walras se asienta definitivamente en la obra de Arrow y Debreu (véase [Debreu, 1959]). En el caso más sencillo, el de un único mercado, se reduce a la ecuación “oferta igual a demanda” a la que sin dificultad se le pueder acoplar una dinámica natural [Samuelson, 1971]. Para varios mercados la situación es compleja.

Hay una función, el *exceso de demanda*, $Z(p) = D(p) - O(p)$, definida en el espacio de los precios y con valores en el espacio de los bienes. Ambas, la demanda D y la oferta O, se definen agregando las demandas y las ofertas individuales. La Teoría Económica permite justificar condiciones sobre comportamientos individuales que conducen a los axiomas sobre Z. Estos axiomas para la función de exceso sobre demanda, $Z : \mathbb{R}^l_+ \longrightarrow \mathbb{R}^l_+$, son los siguientes:

1. $Z(\lambda p) = Z(p)$, para todo $p = (p_1, \ldots, p_l)$, $p_i \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$,
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} p_i Z_i(p) = 0$, ley de Walras (el valor total es cero),
3. $Z_i(p) > 0$ si $p_i = 0$, (demanda positiva para bienes gratuitos).

En virtud de (1), (2) y (3), Z puede interpretarse como un campo vectorial sobre el conjunto de puntos de la $(l-1)$-esfera con coordenadas positivas, campo que sobre la frontera apunta hacia al interior. La existencia de un vector de precios de equilibrio p^* se obtiene del Teorema de Hopf, de manera que $Z(p^*) = 0$, y "oferta igual a demanda".

En el problema 8 se busca un modelo dinámico, en el que los estados son los vectores de precios (o quizás estados más amplios que incluyan otras variables económicas). Esta teoría debe de ser compatible con la actual teoría de equilibrio. Una característica deseable sería que la evolución de los precios en función del tiempo esté determinada por las acciones individuales de los agentes económicos.

He trabajado en este problema durante varios años, convencido de que es el principal problema de las Ciencias Económicas [Smale, 1976]. Los fundamentos básicos pueden consultarse en [Smale, 1981].

Problema 9: El problema de programación lineal

> *¿Existe un algoritmo de tiempo polinomial sobre los números reales para decidir si el sistema lineal de desigualdades $Ax \geq b$ tiene solución?*

El algoritmo que se busca en este problema debe funcionar sobre una máquina que trabaje con los números reales en el sentido de [BCSS] (véase el problema 3). El sistema $Ax \geq b$ viene descrito por una matriz real A con m filas y n columnas y un vector $b \in \mathbb{R}^m$ y la pregunta es: ¿existe $x \in \mathbb{R}^n$ con $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$? El tiempo se mide por el número de operaciones aritméticas. Este problema aparece en [BCSS].

Hay una versión como "problema de decisión" del problema de optimización de la programación lineal: dados A, b como arriba y $c \in \mathbb{R}^n$, decidir si

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c \cdot x\,, \quad \text{con la restricción} \quad Ax \geq b\,,$$

existe y, si es así, calcular tal x.

El célebre método del simplex de Dantzig da un algoritmo para estos dos problemas (sobre $\mathbb{R}$) pero Klee y Mint han demostrado que éste es exponencialmente lento en el caso peor. Por otro lado, Borgwardt y yo hemos demostrado, con ayuda posterior importante de Haimovich, que, en media, el tiempo es polinomial. Para todo esto véase [Schrijver,1986].

Hay un desarrollo paralelo, en términos del modelo de computación de Turing, que utiliza números racionales, $\mathbb{Q}$, y en el que el coste está medido en términos de "bits". A partir de las ideas de Yudin-Nemirovsky, Khachian ha encontrado un algoritmo de tiempo polinomial (el método del elipsoide) para el problema de programación lineal. Posteriormente, Karmarkar con su "método del punto interior" ha encontrado un algoritmo utilizable en la práctica para este problema y ha demostrado que funciona en tiempo polinomial en el modelo de Turing. Para todo esto se puede consultar [Grötschel-Lovász-Schrijver, 1993] y [Schrijver, 1986].

Más próximo al problema principal planteado más arriba sobre $\mathbb{R}$ es el problema similar que busca un "algoritmo fuertemente polinomial" sobre $\mathbb{Q}$ para resolver estos problemas de programación lineal. Esta noción de algoritmo requiere que el número de operaciones aritméticas, así como el número de operaciones sobre los *bits*, sea polinomial en relación al tamaño en bits de los datos de entrada ($m \times (n+1)$). Megiddo y, sobre todo, Tardos (véase [Grötschel-Lovász-Schrijver, 1993]) han obtenido algunos resultados parciales.

Para el problema sobre $\mathbb{R}$, véanse también las referencias [Barvinok-Vershik, 1993] y [Traub-Woźniakowski, 1982].

Problema 10: El "closing lemma"

> *Sea p un punto no-errante de un difeomorfismo $S : M \to M$ de una variedad compacta. ¿Puede aproximarse S arbitrariamente bien hasta las derivadas de orden r (aproximación de clase C^r) para todo r, por $T : M \to M$ de manera que p sea un punto periódico de T?*

Un punto no-errante $p \in M$ es un punto que tiene la propiedad de que para cada entorno U de p, hay un entero $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, tal que $S^k U \cap U \neq \emptyset$. En esta expresión, S^k es la iterada k-ésima de S. Además, se dice que p es un punto periódico de periodo m si $T^m(p) = p$.

Ésta es la forma discreta del famoso *"closing lemma"*, que en el caso de C^1 fue resuelto afirmativamente por Charles Pugh (1967).

Es fácil obtener una aproximación C^0 que tiene la propiedad deseada. Peixoto observó que el argumento no funciona para las aproximaciones C^1, corrigiendo así un error de René Thom (René me ha dicho que éste había sido su peor error).

Pugh y Robinson (1983) han demostrado el *"closing lemma"* con aproximaciones de clase C^1 para la versión hamiltoniana. Peixoto ha dado una respuesta afirmativa para las aproximaciones de clase C^r, para todo r, para el círculo, así como una versión en tiempo continuo para las variedades orientables de dimensión 2. Recientemente, el *"closing lemma"* ha adquirido todavía más importancia gracias al trabajo de Hayashi (1997); véase también [Wen-Xia, 1997].

Problema 11: ¿Son los sistemas dinámicos unidimensionales generalmente hiperbólicos?

> *¿Es posible aproximar un polinomio complejo T por un polinomio del mismo grado con la propiedad de que todo punto crítico tienda por iteración a un punto periódico atractor?*

Este problema ni siquiera está resuelto para polinomios de grado 2. Aquí nos interesa el sistema dinámico engendrado por la iteración de una aplicación polinómica $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos). Si $z \in \mathbb{C}$, su órbita en el tiempo, $z_0 = z, z_1, z_2, \dots$ está definida mediante $z_i = T(z_{i-1})$ e i puede ser interpretado como tiempo discreto. Un punto fijo w de T, $(T(w) = w)$, es un punto atractor si la derivada $T'(w)$ de T en w tiene un valor absoluto estrictamente inferior a 1. Un punto atractor periódico de T, de periodo p, es un punto fijo atractor para T^p. Un punto crítico de T es un punto en el que la derivada de T se anula.

Una vez que el problema ha sido enunciado de manera precisa, es conveniente analizarlo a la luz de la dinámica hiperbólica desarrollada desde los años sesenta.

Un punto fijo de un difeomorfismo $T : M \to M$ es hiperbólico si la derivada $DT(x)$ de T en x (como automorfismo lineal del espacio tangente) no tiene ningún valor propio de módulo igual a 1. Si x es un punto periódico de periodo p, entonces x es hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de T^p. La noción de hiperbolicidad se extiende de una manera natural a Ω, la clausura del conjunto de puntos no errantes (véase el problema 10).

Un sistema dinámico $T \in \mathrm{Dif}(M)$ se dice hiperbólico (o que satisface el axioma A) si los puntos periódicos son densos en Ω y si, además, Ω es hiperbólico (véase [Smale, 1967] o [Smale, 1980]). Suponemos que también verifica una condición de no ciclicidad. Los trabajos de varias personas, especialmente de Ricardo Mañé, han permitido identificar la noción de sistema dinámico hiperbólico con una noción fuerte de estabilidad de sistemas dinámicos llamada estabilidad estructural. Hay incluso un germen de una teoría de estructura de esta clase de sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos hiperbólicos constituyen un conjunto bastante vasto de sistemas dinámicos, pero existen otros que forman un conjunto mucho más grande que incluye las dinámicas caóticas que aparecen en las aplicaciones. El concepto de hiperbolicidad se extiende desde los sistemas dinámicos invertibles al caso planteado más arriba, de las aplicaciones polinómicas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. La teoría clásica de las funciones de variable compleja permite reemplazar el problema por el problema equivalente siguiente:

> *¿Pueden aproximarse las aplicaciones polinómicas $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante aplicaciones hiperbólicas?*

La teoría de sistemas dinámicos complejos de una dimensión fue iniciada por Fatou y Julia a comienzos del siglo XX. En los años sesenta, propuse a mi discípulo de doctorado John Guckenheimer que leyese los artículos de éstos e intentase resolver el problema anterior (entre otros). Su tesis (véase [Chern-Smale, 1970]) contiene una respuesta afirmativa, pero con un error en la demostración. Hoy en día, este problema abierto aparece como la cuestión fundamental sobre sistemas dinámicos de una dimensión.

El artículo de John es uno de los numerosos artículos sobre los problemas discutidos en este ensayo que contienen alguna demostración falsa, como el de Poincaré.

Los sistemas dinámicos complejos de una dimensión se han convertido en un tema floreciente y a ello han contribuido de forma importante Douady-Hubbard, Sullivan, Yoccoz y McMullen, entre otros muchos (véase [McMullen, 1994]).

Hay un campo de estudio paralelo, la dimámica real de una dimensión, es decir, de las aplicaciones regulares $T : I \longrightarrow I,\ I = [0,1]$.

> **Problema:** *¿Es posible aproximar las aplicaciones regulares* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$*, en el sentido* C^r*, para todo* r*, mediante aplicaciones hiperbólicas?*

Por la época de la tesis de Guckenheimer le pedí a Ziggy Nitecki que estudiase este problema. De nuevo negligente, tampoco detecté un error en la tesis de Nitecki (véase [Chern-Smale, 1970]) que pretendía dar una respuesta afirmativa al problema anterior.

Tiempo después, Jakobson (1971) resolvió el problema para las aproximaciones de clase C^1, pero el caso general permanece abierto. Véase [de Melo-van Strien, 1993] para más detalles.

Problema 12: Centralizadores de difeomorfismos

> *¿Pueden aproximarse los difeomorfismo de una variedad compacta* M *en sí misma, en el sentido* C^r*, para todo* $r \geq 1$*, mediante difeomorfismos* $T : M \to M$ *que conmutan sólo con sus iteradas?*

Se requiere, entonces, que el centralizador de T en el grupo de difeomorfismos, $\mathrm{Dif}\,(M)$, sea $\left\{T^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Comencé a pensar en el centralizador en [Smale, 1963], pero no fue hasta la defensa de la tesis que Nancy Kopell redactó bajo mi dirección (véase [Chern-Smale, 1970], y en la que respondía afirmativamente a esta pregunta en el caso dim $M = 1$, cuando propuse este problema [Smale, 1967]. Aún no ha sido resuelto, ni siquiera para las variedades M de dimensión 2.

Se puede también preguntar si el conjunto de difeomorfismos de M con centralizador trivial es denso y abierto en $\mathrm{Dif}\,(M)$ dotado de la topología C^r.

El trabajo más importante sobre estos problemas es el de Palis-Yoccoz (1989), que contiene respuestas casi completas en el caso de los sistemas dinámicos hiperbólicos (véase el problema 11) para cualquier variedad.

Escribí en [Smale, 1991]: "Encuentro este problema interesante porque aporta algo de luz en el reino de la oscuridad, más allá de la hiperbolicidad, donde incluso los problemas son demasiado difíciles para poder plantearlos de forma clara".

Problema 13: El decimosexto problema de Hilbert

Consideremos la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{dx}{dt} = P\,(x,y)\ , \qquad \frac{dy}{dt} = Q\,(x,y)\ , \tag{3}$$

donde P y Q son polinomios. ¿Existe una cota K para el número de ciclos límite de la forma $K \leq d^q$ donde d es el máximo de los grados de P y Q y donde q es una constante universal?

Ésta es una versión moderna de la segunda parte del decimosexto problema de Hilbert, el más esquivo de todos ellos, si exceptuamos la hipótesis de Riemann.

En efecto, desde el trabajo de Petrovskii y Landis de 1957 en el que éstos pretendían dar una solución positiva, en lugar de progresar parece que retrocedemos. Tiempo antes, Dulac (1923) había afirmado que el sistema (3) siempre tenía un número finito de ciclos. Después de que se encontrase un error en Petrovskii-Landis (véase [Petrovskii-Landis, 1959]), Ilyashenko (1985) descubrió otro error en el trabajo de Dulac. Además, Shi Songling (1982) encontró un contraejemplo para las cotas específicas de Petrovskii-Landis en el caso $d = 2$. Y no hace mucho, han aparecido dos largos artículos independientes dando demostraciones de la afirmación de Dulac, [Écalle, 1992] e [Ilyashenko, 1991], pero estos dos artículos todavía no han sido digeridos completamente por la comunidad matemática.

Podemos decir que hay un número finito de ciclos límites, pero que no hay cotas. Vamos a considerar una clase especial para la que es fácil probar la finitud, pero donde aún no se conocen cotas.

Lo que sigue corresponde a la ecuación de Lienard (véase [Hirsch-Smale, 1974])

$$\frac{dx}{dt} = y - f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = -x, \tag{4}$$

donde $f(x)$ es un polinomio real con término de mayor grado x^{2k+1} y tal que $f(0) = 0$.

Si $f(x) = x^3 - x$ entonces (4) es la ecuación de van der Pol con un ciclo límite. En general, se puede demostrar fácilmente que todas las soluciones de (4) circulan alrededor del único punto de equilibrio $(0, 0)$ en el sentido de la agujas del reloj. Siguiendo estas curvas, se define "la sección de Poincaré", $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+$ es el semieje y positivo. Los ciclos límites de (4) son precisamente los puntos fijos de T. En varias conferencias he planteado el problema de estimar el número de estos puntos fijos (¿utilizando un nuevo tipo de teorema de punto fijo?). Respondiendo a esto, Linz, de Melo y Pugh (1977) encontraron ejemplos con k ciclos límite diferentes y conjeturaron que este número k era una cota superior. Todavía no se ha encontrado una cota superior de la forma grado(f^q). Como T es analítica, se sigue que, para cada f, (4) tiene sólo un número finito de ciclos limites.

Para más información véase [Browder, 1976], [Ilyashenko-Yakovenko, 1995], [Lloyd-Lynch, 1988] y [Smale, 1991].

Problema 14: El atractor de Lorenz

¿Coincide el comportamiento dinámico de las ecuaciones diferenciales ordinarias de Lorenz (1963) con el del atractor geométrico de Lorenz descrito por Williams, Guckenheimer y Yorke?

Las ecuaciones de Lorenz son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + 10y\\ \dot{y} &= 28x - y - xz\\ \dot{z} &= -\tfrac{8}{3}z + xy\end{aligned}$$

Lorenz (1963) analizó mediante ordenador estas ecuaciones para demostrar que la mayor parte de las soluciones tendían a cierto conjunto atractor y, de esa forma, produjo uno de los primeros ejemplos importantes de "caos". Sin embargo, no había demostraciones matemáticas. Este trabajo numérico inspiró el desarrollo riguroso de una ecuación diferencial ordinaria definida geométricamente que parece tener el mismo comportamiento (Yorke, [Williams, 1979], [Guckenheimer-Williams, 1979]). Este atractor geométrico ha sido analizado con detalle y se puede decir honestamente que ahora se comprende perfectamente.

Este problema 14 pregunta si la dinámica de las ecuaciones originales es la misma que la del modelo geométrico. La respuesta positiva más completa consistiría en construir un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que llevara soluciones de las ecuaciones de Lorenz sobre soluciones del atractor geométrico; en realidad, el atractor geométrico de Lorenz es toda una familia biparamétrica de sistemas dinámicos y nos estamos refiriendo a un único miembro de esta familia.

Una respuesta a este problema sería un paso adelante de cara a establecer bases firmes de la teoría de sistemas dinámicos caóticos aplicados. Hasta ahora, en las ecuaciones de la Ingeniería y de la Física sólo se ha podido demostrar la existencia de caos en un sentido más débil, verificando la existencia de herraduras (Melnikov, Marsden y Holmes; véase [Guckenheimer-Holmes, 1990]).

En mi artículo [Smale, 1967] hay ejemplos de sistemas dinámicos que presentan atractores geométricos caóticos y estructuralmente estables. Pero estos ejemplos no provienen de ningún sistema físico.

Rychlik y Robinson (véase [Robinson, 1989]) han obtenido algunos resultados parciales sobre este problema 14.

PROBLEMA 15: LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

¿Tienen las ecuaciones de Navier-Stokes sobre un dominio Ω tridimensional en $\mathbb{R}^3$ una única solución regular para todo tiempo?

Este es quizás el problema más célebre de las ecuaciones en derivadas parciales. Seamos un poco más precisos. Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u - \nu \Delta u + \operatorname{grad} p = 0\,, \qquad \operatorname{div} u = 0\,,$$

y se debe encontrar una aplicación u de clase C^∞, $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ y otra aplicación $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfagan estas ecuaciones; u debe tener un valor dado en $t = 0$ y sus valores sobre la frontera $\partial\Omega$ está prescrita. Aquí, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $u \cdot \nabla$ es el operador $\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, y ν es una constante positiva. Véase, por ejemplo, [Chorin-Marsden, 1993] para más detalles.

Muchos matemáticos han contribuido a la comprensión de este problema. Hay una respuesta afirmativa para dimensión 2, y en dimensión 3, para t en un pequeño intervalo $[0, T]$. Véase [Temam, 1979] para más detalles.

La solución de este problema puede ser un paso fundamental para la comprensión del gran problema de la turbulencia. Por ejemplo, podría ayudar a completar el programa de Ruelle-Takens (1971), quienes introdujeron la noción del atractor caótico en un modelo de turbulencia. Véase también [Chorin-Marsden-Smale, 1977].

En [Smale, 1991] pregunté si las soluciones de la ecuación bidimensional de Navier-Stokes con un término forzado en un toro deben converger hacia el equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito. Babin-Vishik (1983) han aportado cierta evidencia en contra, y Liu (1992) ha dado ejemplos que muestran convergencia hacia un atractor más complicado.

PROBLEM 16: LA CONJETURA DEL JACOBIANO

Supongamos que $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica con la propiedad de que la derivada en cada punto es no singular. ¿Ha de ser f biyectiva?

En esta definición, $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial complejo de dimensión n, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ y cada f_i es un polimonio en n variables. La derivada de f en z, $Df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, puede entenderse como la matriz de las derivadas parciales y la condición de no singularidad se puede escribir como $\operatorname{Det}(Df(z)(\neq 0$.

Si f es inyectiva, entonces también es suprayectiva y tiene inversa, que es una función polinómica.

El problema se remonta a los años treinta y se pueden consultar los excelentes artículos [Bass-Connell-Wright, 1982]) y [van den Essen, 1997] para conocer su importancia, sus antecedentes y resultados relacionados.

Problema 17: Resolución de ecuaciones polinómicas

¿Se puede encontrar un valor aproximado de un cero de un sistema de n ecuaciones polinómicas complejas con n incógnitas con un algoritmo uniforme que requiera, en media, un tiempo polinomial de ejecución?

Éste es exactamente el teorema final de una serie de cinco artículos escritos con Mike Shub (véase [Shub-Smale, 1994]), pero sin la palabra “uniforme”.

Volvamos a las definiciones.

Consideremos $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$, donde cada f_i es un polinomio en n variables de grado d_i. Es razonable convertir los f_i en polinomios homogéneos añadiendo una nueva variable z_0, trabajar en el correspondiente espacio proyectivo y, entonces, traducir el algoritmo y los resultados al problema afín inicial.

Se puede definir “aproximadamente” de una manera intrínseca utilizando el método de Newton y esto es necesario en vista de resultados clásicos de Abel, Galois y otros. El tiempo se mide por el número de operaciones aritméticas y de comparaciones, “$\leq$”, utilizando máquinas reales (como en el problema 3), si se quiere ser formal.

Hay que dotar al espacio de las f de una medida de probabilidad, para cada $d = (d_1, \ldots, d_n)$, y promediar el tiempo del algoritmo sobre el espacio de las f. ¿Existe un algoritmo de este tipo en el que el tiempo de ejecución promediado esté acotado por un polinomio en el número de coeficientes de f, (el tamaño del dato de entrada)?

En [Shub-Smale, 1994] se prueba que esto puede hacerse, pero el algoritmo es diferente para cada d, e incluso, para cada probabilidad. Un algoritmo uniforme debe ser independiente de d (d es parte del dato de entrada).

La determinación de los ceros de polinomios y de sistemas polinómicos es seguramente uno de los más antiguos e importantes problemas de las Matemáticas. Nuestro problema pregunta si, bajo ciertas condiciones especificadas en el problema, éste puede ser resuelto sistemáticamente por los ordenadores. Si no es posible hacer esto en tiempo polinomial, entonces ningún ordenador podrá tener éxito.

Finalmente, hay un desarrollo reciente que otorga al problema de los ceros de polinomios un papel universal. El Teorema de los Ceros de Hilbert (visto como problema de decisión) es NP-completo sobre cualquier cuerpo (véase el problema 3).

Se puede plantear un problema similar, pero más difícil, sobre los números reales.

Problema 18: Los límites de la inteligencia

¿Cúales son los límites de la inteligencia, artificial y humana?

Penrose (1991) ha intentado demostrar que la inteligencia artificial tiene límites. Su argumentación incluye la interesante pregunta de saber si el conjunto de Mandelbrot es decidible (utilizado en [Blum-Smale, 1993]) y también discute ciertas implicaciones del Teorema de Incompletitud de Gödel.

Sin embargo, sería deseable hacer un estudio más amplio, en el que intervengan modelos más detallados del cerebro y del ordenador, en una búsqueda de lo que tienen en común la inteligencia artificial y la humana y en qué son diferentes.

Me gustaría implicarme en una investigación donde el aprendizaje, la resolución de problemas y la teoría de juegos desempeñen un importante papel, a la par con el papel de las matemáticas de los números reales, las aproximaciones, las probabilidades y la geometría.

Espero desarrollar estas ideas en otra ocasión.

REFERENCIAS

Abraham, R., Marsden, J., (1978) *Foundations of Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, Mass.

Babin, A. V., Vishik, M. I., (1983) *Atractors of partial differential evolution equations and their dimension.* Russian Math. Survey 38, 151-213.

Barvinok, A., Vershik, A., (1993) Polynomial-time, computable approximation of families of semi-algebraic sets and combinatorial complexity. *Amer. Math. Soc. Trans.* 155, 1-7.

Bass, H., Connell, E., Wright, D., (1982) The Jacobian conjecture: reduction on degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math Soc.,* 7, 287-330.

BSCC: Blum, L., Cucker, F., Shub, M., Smale, S., (1997) *Complexity and Real Computation.* Springer-Verlag, Nueva York.

Blum, L., Shub, M., Smale, S., (1989) On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines. *Bull. Amer. Math. Soc.* 21, 1-46.

Blum, L., Smale, S., (1993) *The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring.* Páginas 321-339 en M. Hirsch, J. Marsden y M. Shub (editores), *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, Springer-Verlag.

Browder, F., Editor, (1976) *Mathematical Developments Arising form Hilbert Problems.* Amer. Math. Society, Providence, RI.

Brownawell, W., (1987) Bounds for the degrees in the Nullstellensatz. *Annals of Math.* 126, 577-591.

Chern, S., Smale, S., Editores, (1970) *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics, vol XIV.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Chorin, A., Marsden, J., (1993) *A Mathematical Introduction te Fluid Mechanics.* Tercera edición, Springer-Verlag, Nueva York.

Chorin, A., Marsden, J., Smale, S., (1977) Turbulence Seminar, Berkeley 1976-77. *Lecture Notes in Math.* 615, Springer-Verlag, Nueva York.

Cucker, F., Koiran, P., Smale, S., (1999) A polynomial time algorithm for Diophantine equations in one variable. *Jour. of Symbolic Computation* 27, no. 1, 21-29.

Debreu, G., (1959) *Theory of Value.* John Wiley & Sons, Nueva York.

Dulac, H., (1923) Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France* 51, 45-188.

Écalle, J., (1992) *Introduction aux Fonctions Analysables et Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac.* Hermann, París.

van den Essen, A., (1997) Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. En *Algébre non commutative, groupes quantiques et invariants, septième contact Franco-Belge,* Reims, Juin 1995. Editores J. Alev y G. Cauchon, *Société Mathématique de France,* París.

Freedman, M., (1982) The topology of 4-manifolds. *J. Diff. Geom.* 17, 357-454.

Garey, M., Johnson, D., (1979) *Computers and Intractability.* Freeman, San Francisco.

Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A., (1993) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* Springer-Verlag, Nueva York.

Guckenheimer, J., Holmes, P., (1990) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Tercera reimpresión, Springer-Verlag, Nueva York.

Guckenheimer, J., Williams, R.F., (1979) Structural stability of Lorenz attractors. *Publ . Math. IHES* 50, 59-72.

Hayashi, S., (1997) Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability conjecture and Ω-stability conjecture for flows. *Annals of Math.* 145, 81-137.

Hirsch, M., Smale, S., (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, Nueva York.

Ilyashenko, Yu., (1985) Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations. *Russian Math. Surveys* VHO, 1-49.

Ilyashenko, Yu., (1991) *Finiteness Theorems for Limit Cycles.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

Ilyashenko, Yu., Yakovenko,S., (1995) *Concerning the Hilbert 16th problem.* AMS Translations, serie 2, vol. 165, AMS, Providence, RI.

Jakobson, M., (1971) On smooth mappings of the circle onto itself. *Math. USSR Sb.* 14, 161-185.

Kuijlaars, A.B.J., Saff, E.B., (1998) Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.* 350, no. 2, 523-538.

Kuz'mina, R., (1977) An upper bound for the number of central configurations in the plane n-body problem. *Sov. Math. Dokl.* 18, 818-821.

Lang, S., (1991) *Number Theory III,* volumen 60 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Nueva York.

LINS, A., DE MELO, W., PUGH, C., (1977) en Geometry and Topology. *Lecture Notes in Math.* 597, Springer-Verlag, Nueva York.

LIU, V., (1992) An example of instability for the Navier-Stokes equations on the 2-dimensional torus. *Commun. PDE* 17, 1995-2012.

LLOYD, N.G., LYNCH,S., (1988) Small amplitude limit cycles of certain Lienard systems. *Proceedings Roy. Soc. London* 418, 199-208.

LORENZ, E., (1963) Deterministic non-periodic flow. *J. Atmosph. Sci.* 20, 130-141.

MANDERS, K.L., ADLEMAN, L., (1978) NP-complete decision problems for binary quadratics. *J. Comput. System Sci.* 16, 168-184.

MCMULLEN, C., (1994) Frontiers in complex dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 31, 155-172.

DE MELO, W., VAN STRIEN, S., (1993) *One-Dimensional Dynamics.* Springer-Verlag, Nueva York.

PALIS, J., YOCCOZ, J.C., (1989) (1) Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann. Scient. Ecole Normale Sup.* 22, 81-98; (2) Centralizer of Anosov diffeomorphisms. *Ann. Scient. Ecole Normale Sup.* 22, 99-108.

PALMORE, J., (1976) Measure of degenerate relative equilibra I. *Annals of Math.* 104, 421-429.

PETROVSKII, I.G., LANDIS, E.M., (1957) On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials. *Mat. Sb. N.S.* 43 (85), 149-168 (en ruso), y (1960) *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 14, 181-200.

PETROVSKII, I.G., LANDIS, E.M., (1959) Corrections to the articles "On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials". *Mat. Sb. N.S.* 48 (90), 255-263 (en ruso)

PENROSE, R., (1991) *The Emperor's New Mind.* Penguin Books, Nueva York.

POINCARÉ, H., (1953) *Oeuvres, VI.* Gauthier-Villars, París. *Deuxième Complément á L'Analysis Situs.*

PEIXOTO, M., (1962) Structural stability en two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 101-120.

PUGH, C., (1967) An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math.* 89, 1010-1022.

PUGH, C., ROBINSON, C., (1983) The C^1 closing lemma including Hamiltonians. *Ergod. Theory Dynam. Systems* 3, 261-313.

RAKHMANOV, E.A., SAFF, E.B., ZHOU, Y.M., (1994) Minimal discrete energy on the sphere. *Math. Res. Lett.* 1, 647-662.

ROBINSON, C., (1989) Homoclinic bifurcations to a transitive attactor of Lorenz type. *Nonlinearity* 2, 495-518.

RUELLE, D., TAKENS, F., (1971) On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* 20, 167-192.

SAMUELSON, P., (1971) *Foundations of Economic Analysis.* Atheneum, Nueva York.

Saff, E., Kuijlaars, A., (1997) Distributing many points on a sphere. *Math. Intelligencer* 10, 5-11.

Schrijver, A., (1986) *Theory of Linear and Integer Programming.* John Wiley & Sons, Nueva York.

Shi, S., (1982) On limit cycles of plane quadratic systems. *Sci. Sin.* 25, 41-50.

Shub, M., (1970) Appendix to Smale's paper: Diagonals and relative equilibria in manifolds, Amsterdam, 1970. *Lecture Notes in Math.* 197, Springer-Verlag, Nueva York.

Shub, M., Smale, S. (1995) On the intractibility of Hilbert's Nullstellensatz and an algebraic version of "P=NP". *Duke Math. J.* 81, 47-54.

Shub, M., Smale, S., (1993) Complexity of Bezout's theorem, III: condition number and packing. *J. of Complexity* 9, 4-14.

Shub, M., Smale, S., (1994) Complexity of Bezout's theorem, V: polynomial time. *Theoret. Comp. Sci.* 133, 141-164.

Smale, S., (1963) Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms, páginas 490-496 en: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* Institute Mittag-Leffier, Suecia, 1962. (V. Stenström, ed.)

Smale, S., (1963) A survey of some recent developments in differential topology. *Bull. Amer. Math Soc.* 69, 131-146.

Smale, S., (1967) Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, 747-817.

Smale, S., (1970) Topology and mechanics, I *y* II. *Invent. Math.* 10, 305-331 y *Invent. Math.* 11, 45-64.

Smale, S., (1976) Dynamics in general equilibrium theory. *Amer. Economic Review* 66, 288-294.

Smale, S., (1980) *Mathematics of Time.* Springer-Verlag, Nueva York.

Smale, S., (198l) Global analysis and economics, páginas 331-370 en *Handbook of Mathematical Economics I.* Editores K.J. Arrow y M.D. Intrilligator. North-Holland, Amsterdam.

Smale, S., (1990) The story of the higher dimensional Poincaré conjecture. *Math. Intelligencer* 12, no. 2, 40-51. También en M. Hirsch, J. Marsden y M. Shub, editores, *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest,* 281-301 (1992).

Smale, S., (1991) Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed. *Physica D* 51, 267-273.

Taubes, G., (1987) What happens when Hubris meets Nemesis? *Discover,* Julio, 1987.

Temam, R., (1979) *Navier-Stokes Equations.* Edición revisada. North-Holland, Amsterdam.

Traub, J., Woźniakowski, H., (1982) Complexity of linear programming. *Oper. Res. Letts.* 1, 59-62.

TSUJI, M., (1959) *Potential Theory in Modern Function Theory.* Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

WEN, L., XIA,Z., (1997) A simpler proof of the C^1 connecting lemma. Por aparecer en *Trans. Amer. Math. Soc.*

WILLIAMS, R., (1979) The structure of Lorenz attractors. *Publ. IHES* 50, 101-152.

WINTNER, A., (1941) *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Steve Smale, Department of Mathematics,
City University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong
correo electrónico: `masmale@math.cityu.edu.hk`

Traducción de María José Alcón