La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

XXXVI Olimpiada Matemática Española

La sede de la Olimpiada ha sido, en el año 2000, la Universidad de las Islas Baleares. Se celebró entre el miércoles 29 de marzo y el domingo 2 de abril, con un día más de duración de lo habitual. Debemos agradecérselo a Miguel Amengual, responsable de la organización local, que supo coseguir para su financiación la colaboración del Gobierno y la Universidad de las Islas Baleares y la de los Ayuntamientos de Palma y de Valldemossa, además de la habitual del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Y, a pesar de la insularidad, los 108 alumnos seleccionados en los Distritos acudieron, junto con 38 profesores acompañantes, a la cita anual. Este año, únicamente nueve alumnos de cursos anteriores al preuniversitario (cuatro de 3ºde BUP y cinco de 1ºde Bachillerato) llegaron a la fase Nacional de la Olimpiada.

Todos los participantes visitaron, el jueves por la mañana, el Castillo de Bellver, donde asistieron a la recepción ofrecida por el Ayuntamiento de Palma. En esa misma mañana y en la Escuela de Hostelería y Turismo, tuvo lugar el acto institucional de inauguración de la Olimpiada, que contó con la presencia del Presidente del Gobierno de las Islas Baleares y del Rector de la Universidad. Tras una exquisita comida, preparada y servida por los alumnos de la Escuela, comenzó la primera sesión de problemas, mientras que la segunda se llevó a cabo al día siguiente por la mañana. El Ayuntamiento de Valldemossa ofreció la comida del viernes, ocasión que pudo aprovecharse para visitar la Cartuja. Por la tarde, de nuevo en la Universidad, tuvo lugar el Acto de entrega de Premios correspondientes a la Fase de Distrito, dotados con 50.000 pesetas, 35.000 pesetas y 25.000 pesetas para los primeros, segundos y terceros clasificados respectivamente.

Y, mientras los miembros del Tribunal calificador terminaban su trabajo, los alumnos visitaron, en la mañana del sábado, el Acuario de Marineland, para acudir a continuación al Pueblo Español, donde tendría lugar la comida de clausura. Allí mismo se realizó la proclamación de ganadores y entrega de los premios de esta fase nacional de la Olimpiada.

Estos son los problemas propuestos:

Primera sesión
jueves, 30 de marzo de 2000

Problema 1
Sean los polinomios

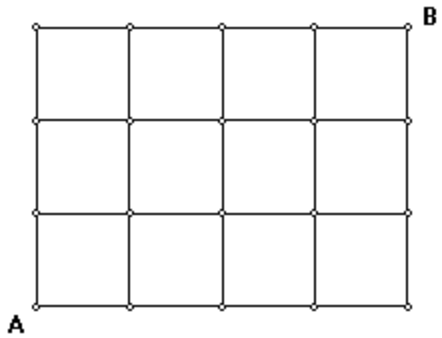
$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b y c $(a \neq c)$, para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes, y resuelve en este caso las ecuaciones $P(x) = 0; Q(x) = 0$.

Problema 2
La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona P va desde A hasta B, y otra Q desde B hasta A.

Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad.

Halla la probabilidad de que se crucen.



Problema 3
Dos circunferencias C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B. Por B se traza una recta r variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos P_r y Q_r respectivamente.

Demuestra que las mediatrices de los segmentos P_rQ_r pasa por un punto fijo.

Segunda sesión
viernes, 31 de marzo de 2000

Problema 4
Encuentra el mayor número entero N que cumple las siguientes condiciones:
a) $E(\frac{N}{3})$ tiene sus tres cifras iguales, y
b) $E(\frac{N}{3})$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural n tal que $e(N) = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$
Nota: $E(x)$ es la parte entera de x.

Problema 5
Tomemos cuatro puntos situados en el interior o en el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

Problema 6
Demuestra que no existe ninguna función $f : N \to N$ que cumpla :

$$f(f(n)) = n + 1$$

Y estas son las soluciones escritas por algunos de los alumnos participantes durante la prueba:

Problema 1 (Solución de Virginia García Madurga, Zaragoza)
Las raíces comunes a ambos polinomios serán raíces de la diferencia:

$$P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x$$

Resolvemos la ecuación $P(x) - Q(x) = 0$, sacando primero x factor común:

$$x[(a-c)x^2 + (c-a)] = 0$$

Las tres raíces son 0,1 y -1; entre ellas tienen que estar las raíces comunes
Como 0 no es raíz ni de $P(x)$ ni de $Q(x)$, las dos raíces comunes tienen que ser 1 y -1.
Sustituyendo estos valores en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos el sistema:

$$2 + a + b + c = 0$$
$$2 - a + b - c = 0$$

que nos da las condiciones $b = -2; a = -c$. Los polinomios quedan en la forma:

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1$$
$$Q(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1$$

Para resolver las ecuaciones $P(x) = 0, Q(x) = 0$, separamos por Ruffini las raíces conocidas 1 y -1, y quedan ecuaciones de la forma

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2 + ax - 1) = 0$$
$$Q(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - ax - 1) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones de segundo grado queda finalmente: soluciones de $P(x) = 0 : x = 1, x = -1$; soluciones de $Q(x) = 0 : x = 1, x = -1$

Problema 2 (Solución de Fernando Cruz Robledillo, Madrid)

Definamos un sistema de coordenadas con origen en A y unidad el lado del cuadrado.

Como P y Q recorren caminos de longitud mínima, P y Q sólo se podrán encontrar entre el 3ºy el 4ºmovimiento. Se han marcado en rojo todas las posibles posiciones de P ((0,3), (1,2), (2,1) y (3,0)) tras el tercer movimiento, y en verde las de Q.((0,4), (3,1), (2,2) y (1,3))

Caso1: P llega a (0,3).

La probabilidad de que P llegue a (0,3) es $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Sólo pudede cruzarse con Q si éste está en (0,3), lo que sucede también con probabilidad $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. P está obligado a pasar a (1,3), pero Q pasa a (0,3) con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de que se crucen entre (0,3) y (1,3) es $\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$

Caso 2: P llega a (1,2)

La probabilidad de que P llegue a (1,2) es 3 $(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$ (hay tres modos de llegar a (1,2))

Sólo se puede cruzar con Q si éste está en (1,3) o en (2,2). Distingamos ambos casos :

a) Q llega a (1,3) con probabilidad $\frac{1}{8}$, entonces se cruzarán entre (1,2) y (1,3) si P se mueve hacia (1,3) y Q hacia (1,2), ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$ La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$

b) Q llega a (2,2) con probabilidad $\frac{3}{8}$, entonces se cruzarán entre (1,2) y (2,2) si P se mueve hacia (2,2) y Q hacia (1,2), ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$

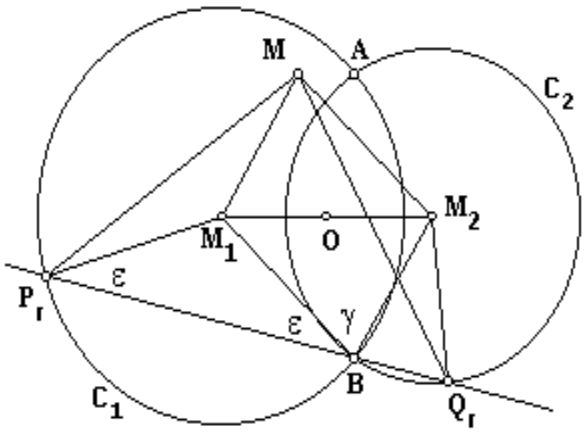
Caso 3: P llega a (2,1). Procediendo de modo análogo, la probabilidad de cruzarse entre los puntos (2,1) y (2,2) $\frac{9}{2^8}$; y la de cruzarse entre (2,1) y (3,1) es $\frac{9}{2^8}$

Caso 4: P llega a (3,0). La probabilidad de cruzarse entre (3,0) y (3,1) es $\frac{3}{2^8}$, y la de cruzarse entre (3,0) y (4,0) es $\frac{1}{2^7}$

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de todos los casos, resulta

$$\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{3}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{37}{256}$$

Problema 3 (Solución de Luis Emilio García Martínez, de Valencia)



Sea O el punto medio del segmento M_1M_2. Demostraré que todas las mediatrices de los segmentos P_rQ_r pasan por el simétrico de B respecto de O.

Sean $\varepsilon = \widehat{P_rBM_1}$; $\gamma = \widehat{M_1BM_2}$. Entonces

$\widehat{M_2BQ_r} = 180 - (\gamma + \varepsilon)$, y como el triángulo M_2BQ_r es isósceles,

$$\widehat{BM_2Q_r} = 180^o - 2\widehat{M_2BQ_r} = 180^o - 2(\gamma + \varepsilon)$$

y por tanto

$$\widehat{MM_2Q_r} = 180 - \gamma + \widehat{BM_2Q_r} = 180 - \gamma - 180 + 2(\gamma + \varepsilon) = \gamma + \varepsilon$$

De modo análogo, por ser el triángulo P_rM_1B isósceles, se tiene :$\widehat{P_rM_1B} = 180 - 2\varepsilon$, y

$$\widehat{P_rM_1M} = 360 - (\widehat{P_rM_1B} + 180 - \gamma) = 360 - 180 + 2\varepsilon - 180 + \gamma = 2\varepsilon + \gamma$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable, los triángulos MM_1P_r y MM_2Q_r son iguales, y por tanto $MP_r = MQ_r$, y M está en la mediatriz de P_rQ_r. Como M no depende de la recta variable, queda probada la propiedad del enunciado.

Problema 4 (Solución de Roberto Alonso Pérez, País Vasco)

Condición a): $z = E(\frac{N}{3}) = 111k \quad k = 1, 2, 3..., 9$

Condición b): $z = E(\frac{N}{3}) = 1 + 2 + ... + n \Rightarrow z = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + n - 2z = 0 \Rightarrow n = \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2}$ (la otra raíz es negativa)

Juntando las dos condiciones queda: $n = \frac{-1+\sqrt{1+8.111k}}{2}$

Como n es natural, el radicando ha de ser cuadrado perfecto, lo que sólo ocurre para $k = 6$ que sustituido en la expresión anterior da $n = 36$.

Recuperando la condición a):

$$z = E(\frac{N}{3}) = 111.6 = 666 \Rightarrow 667 > \frac{N}{3} > 666 \Rightarrow 2001 > N > 1998$$

Por tanto, el mayor N que cumple a) y b) es $N = 2000$

Problema 5 (Solución de Manuel Pérez Molina, Alicante)

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que podemos distribuir cuatro puntos en el cuadrado de manera que cada una de las seis distancias sea mayor mayor que 1. Entonces hay dos posibilidades.

a) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo

b) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero no convexo

Veamos ambos casos:

a) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos del cuadrilátero convexo. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^o$ Además cualquier pareja de puntos del interior (o frontera) del cuadrado está a distancia $d \leq \sqrt{2}$, ya que el diámetro de dicho cuadrado es $\sqrt{2}$.

De la condición $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^o$ se deduce que necesariamente uno de los ángulos ha de ser mayor o igual que 90°; digamos, por ejemplo, $\alpha \geq 90^o$. Tenemos : $\overline{P_iP_j} > 1, i \neq j$. Luego,

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}.\overline{P_2P_3}.\cos\alpha$$

Como el cuadrilátero es convexo, $90 \leq \alpha \leq 180$ y por tanto $\cos\alpha \leq 0$ y en consecuencia

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 > 2 \Rightarrow \overline{P_1P_3} > \sqrt{2}$$

lo que es imposible.

b) Si se forma un cuadrilátero no convexo podemos elegir tres de los cuatro puntos formando un triángulo de modo que el cuarto punto sea interior. Suponemos que el punto interior es P_4.

Cada lado de dicho triángulo es menor o igual que $\sqrt{2}$, (diámetro del cuadrado), y por tanto estará contenido en un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, y circunradio $\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Si su centro es C, P_4 estará en el interior de uno de los triángulos que resultan de unir C con cada vértice, y la distancia de P_4 a uno de los vértices será menor o igual que el circunradio, es decir, menor que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y por tanto menor que 1. Hemos encontrado un par de puntos a distancia menor o igual que 1.

Por último, si tres puntos están alineados se reduce al caso b) y si los cuatro puntos están alineados, llamando x_1, x_2, x_3 a las distancias entre puntos consecutivos , tenemos: $x_1 + x_2 + x_3 \leq \sqrt{2}$, y por el principio del palomar uno de ellos, digamos x_1, cumple $x_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

Problema 6(Solución de Alberto Suárez Real, Asturias)
Supongamos que existe $f : N \to N$ que cumple$f(f(n)) = n + 1$
Se tiene que $f(0) = a \in N$. Por el enunciado,

$$f(f(0)) = 1;\ f(f(0)) = f(a) = 1$$

Del mismo modo, $f(1) = a + 1$; $f(a + 1) = 2$; $f(2) = a + 2, ...$
Supongamos que $f(n - 1) = a + n - 1$, entonces $f(a + n - 1) = a + n$, luego hemos probado por inducción que $f(f(n)) = f(a + n) = 2a + n$
Entonces, $2a + n = n + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin N$
Hemos llegado a una contradicción; la condición supuesta es falsa, con lo que queda demostrada la inexistencia de la función f

Puntuaciones medias (cada problema se califica sobre un máximo de 7 puntos)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
media oros	5	5.17	5	6.33	3.83	5.17
media premios	4.47	5.31	2.56	5.86	1.75	2.58
media todos	2.51	3.12	1.60	3.92	1.31	1.35
desviación	2.57	2.84	1.56	2.46	1.34	1.91

Frecuencia de puntuaciones por problema:

Puntos	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0	35	23	22	18	31	39
1	14	26	41	11	40	45
2	16	12	23	5	22	9
3	11	5	8	4	7	1
4	0	1	7	9	4	3
5	6	8	4	21	3	1
6	13	1	1	27	0	5
7	13	32	2	13	1	5

Alumnos premiados en la fase nacional de la XXVI Olimpiada Matemática Española

Medalla de Oro

Carlos Gómez Rodríguez (COU; C. Peleteiro de Santiago de Compostela)
Luis Emilio García Martínez (COU; Colegio Alemán de Valencia)
Alberto Suárez Real (COU; Colegio Salesiano de Avilés, Asturias)
José M. Cantarero López (2ºBto.; IES Martín Rivero de Ronda, Málaga)
Manuel Pérez Molina (COU; IES Figueras Pacheco de Alicante)
Roberto Rubio Núñez (COU; IES Fuente San Luis de Valencia)

Medalla de Plata

Fernando Cruz Robledillo (Madrid)
José Doval González (Orense)
Xavier Martínez Paláu (Barcelona)
Santiago Molina Blanco (Castellón)
Carlos González Guillén (Madrid)
Francisco Javier Ortiz Barranco (Almería)
Carlos Marcelino Casas Cuadrado (Valladolid)
Jordi Rius Pascual (Lleida)
Carlos García Fernández (Madrid)
Alfredo Lafuente Laguna (Soria)
Juanjo Rué Perna (Lleida)
Enoc Altabás Felipo (Castellón)

Medalla de Bronce

Jesús P. Moreno Damas (Madrid)
Ignacio García Marc (Las Palmas)
Sergio Leal Alcubilla (Burgos)
Alberto Llorente Mediavilla (Burgos)
Miquel Oliu Bartón (Barcelona)
Alfonso Cabrera Salinas (Córdoba)
Stephane Lesaffre (Barcelona)
Indalecio Carbonell Pascual (Alicante)
Eduardo Eisman Cabeza (Granada)
Carlos Vinuesa del Río (Madrid)
Juan Alemany Flos (Barcelona)
Guillermo Heras Prieto (Murcia)
Germán Sanchís Trilles (Valencia)
Rubén Bautista Tapias (Madrid)
José M. Hernández García (Murcia)
Roberto Alonso Pérez (Vizcaya)
Gaspar Fdez. Domínguez (Asturias)
Dacio Sánchez Iglesias (Zamora)

Relación de premiados en la fase de Distrito

Primeros Premios

Adán Alonso, Miguel Ángel	Castilla la Mancha
Alonso Pérez, Roberto	País Vasco
Altabás Felipo, Enoc	Castellón
Barra Arias, Enrique	Extremadura
Blanco Gómez, Felipe	Madrid
Cabrera Salinas, Alfonso	Córdoba
Cantarero López, José María	Málaga
Casas Cuadrado, Carlos Marcelino	Valladolid
Cifuentes Negrete, Alberto	Salamanca
Crespo Rincón, Jaime	La Rioja
Doval González, José	Galicia
Esteban Martín, Paula	Zaragoza
Fernández Domínguez, Gaspar	Oviedo
Galbally Herrero, Javier	Cantabria
García Marco, Ignacio	Las Palmas
García Martínez, Luis Emilio	Valencia
Gómez Rodríguez, Carlos	Galicia
González Guillén, Carlos	Madrid
Hernández García, José Manuel	Murcia
Lesaffre, Stephan	Cataluña
Llorente Mediavilla, Alberto	Burgos
Lujambio Goizueta, Amaia	Navarra
Menacho López, Eligio	Cádiz
Moreno Damas, Jesús Pascual	Madrid
Moreno Sosa, Jesús María	Sevilla
Navarro Manchón, Carles	Alicante
Oliu Bartón, Miquel	Cataluña
Ortiz Barranco, Francisco Javier	Almería
Osorio Franco, Enrique	León
Palacios Miras, Carmelo	Granada
Pérez Molina, Manuel	Alicante
Rius Pascual, Jordi	Cataluña
Rubio Núñez, Roberto	Valencia
Sánchez de la, Cándida	Jaén
Suárez Real, Alberto	Oviedo
Tortella Rosselló, Sebastiá	Baleares
Vázquez Rodríguez, Juan Antonio	Huelva
Velasco Cebrián M^{a}Pilar	La Laguna

Segundos Premios

Alemany Flos, Juan	Cataluña
Antúnez García, Fernando	Granada
Ballester Navarro, Francisco Javier	Valencia
Berlanga Charriel, Pablo	Valencia
Bernardo Sacristán, Germán	Madrid
Cabello Blanco, Javier	Valladolid
Carbonell Pascual, Indalecio	Alicante
Carrillo Álvarez, Pablo Isidro	Sevilla
Cerrolaza Martínez, Juan José	La Rioja
Cruz Robledillo, Fernando	Madrid
Echevarría Corriente, Javier	La Laguna
Escolar lópez, Jon	País Vasco
Fuentes García, Alberto José	Galicia
García Domínguez, Celia	Las Palmas
García Madurga, Virginia	Zaragoza
González García, Álvaro	Castilla la Mancha
Gorena Martínez, Rubén	Navarra
Halir, Robert	Málaga
Heras Prieto, Guillermo	Murcia
Hevia Gisbert, José Antonio	Baleares
Leal Alcubilla, Segio	Burgos
Linares Sánchez, Javier	Cádiz
Lirola Criado, Francisco	Almería
Martín del Valle, Javier	Cantabria
Martínez Páu, Xavier	Cataluña
Meléndez Valoria, Verónica	León
Molina Blanco, Santiago	Castellón
Muñoz Mateos, Juan Carlos	Extremadura
Olmo Fernández, Alberto	Jaén
Orts Rasero, Jesús	Alicante
Otero de la Roza, Alberto	Oviedo
Otero Millán, Jorge	Galicia
Rué Perna, Juanjo	Cataluña
Sanchez Iglesias, Dacio	Salamanca
Sánchez Santana, Manuel Jesús	Huelva
Torralbo Torralbo, Francisco	Córdoba
Vinuesa del Río, Carlos	Madrid

Terceros Premios

Almonacid Olleros,Guillermo	Jaén
Bautista Tapias, Rubén	Madrid
Bosch Torres, Sebastiá	Baleares
Cabezos Martín, Juan	Cantabria
Carpintero Rubio, María	Cádiz
Carrera Cahaza, Noa	Galicia
Castro Argüello, David	León
Conde Calero, Pablo	Alicante
Delgado Monge, Fernando	Burgos
Eisman Cabeza, Rduardo	Granada
Fernández Cancillo, Nuria	Las Palmas
Fuertes Pascual, Carlos Alberto	Salamanca
García Fernández, Carlos	Madrid
García Lasheras, Javier David	Navarra
González Recuero, Manuel	Madrid
González Blanco, M^{a}del Pilar	Murcia
Guerra Ortiz, Eduardo	La Laguna
Lafuente Laguna, Alfredo	Valladolid
Lavela Jiménez, José fernando	Córdoba
Lesaffre, Fabrice	Cataluña
Marcuello Fanlo, Javier	Zaragoza
Mariano Hernández, Jennifer	Las Palmas
Martín Macías, Javier	Huelva
Martín Morán, Jesús	Almería
Molero Bastante, María	Castilla la Mancha
Moreno Rodríguez, Carlos José	Extremadura
Oroz Bueno, Eduardo	La Rioja
Planelles Bort, Josep	Castellón
Sánchez Zoccali, Juan Ginés	Sevilla
Sanchís Bonet, Vicente	Valencia
Sanchís Trilles, Germán	Valencia
Vidal Vicedo, Sara	Alicante
Villaverde Fernández, Diego	Galicia

41ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

por

Juan Manuel Conde Calero

Una vez al año, en julio, se reúnen los mejores estudiantes de bachillerato de matemáticas del mundo para enfrentarse a los seis problemas del prestigioso concurso que es la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO). La cita, este año 2000, ha sido en Taejon (Corea del Sur), celebrándose en el Instituto Superior de Ciencia y Tecnología de Corea (KAIST), del 13 al 25 de julio. Han participado 461 estudiantes de 82 países.

La IMO es una competición individual. Cada problema de los seis propuestos se valora hasta siete puntos. Reciben medallas aproximadamente la mitad de los participantes. Las medallas de oro, plata y bronce se conceden sin superar la razón 1.2:3, y en esta IMO se han concedido a partir de los 30, 21 y 11 puntos respectivamente. De este modo, 39 estudiantes han sido premiados con oro, 71 con plata y 119 con bronce. Para estimular a que se resuelvan problemas completos, se otorgan Menciones de Honor a los concursantes que obtengan siete puntos en algún problema y no hayan sido premiados con medalla.

El equipo español ha estado formado por los estudiantes siguientes:

Carlos Gómez Rodríguez (Santiago de Compostela)
Luis Emilio García Martínez (Valencia)
Alberto Suárez Real (Salinas, Asturias)
José María Cantarero López (Ronda, Málaga)
Manuel Pérez Molina (Alicante)
Roberto Rubio Núñez (Valencia)

Les acompañaban María Gaspar, como Jefe de Delegación, y Juan Manuel Conde como Jefe Adjunto.

Los problemas de la prueba se han seleccionado por el Jurado, formado por todos los Jefes de Delegación, de la "lista corta" que ha confeccionado el Comité de selección de problemas coreano a partir de de los enviados por 46 países. Esta lista consta de 27 problemas: 6 de combinatoria, 7 de álgebra y análisis, 6 de teoría de números y 8 de geometría.

La prueba se indica a continuación:

Primer día
Taejon, 19 de junio de 2000

Problema 1 (Propuesto por Rusia)

Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en M y N. Sea l la tangente común a Γ_1 y Γ_2 tal que M está más cerca de l que N. La recta l es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a l que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se intersectan en E; las rectas AN y CD se intersectan en P; las rectas BN y CD se intersectan en Q.

Demostrar que $EP = EQ$.

Problema 2 (Propuesto por Estados Unidos)

Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1$$

Problema 3 (Propuesto por Bielorrusia)

Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay n pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo λ definimos un *salto* como sigue:

Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en puntos A y B con A a la izquierda de B;.

Luego, la pulga situada en A salta hasta el punto C de la recta, situado a la derecha de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determinar todos los valores de λ tales que, para cualquier punto M de la recta y cualesquiera posiciones iniciales de las n pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de M

Segundo día
Taejon, 20 de junio de 2000

Problema 4 (Propuesto por Hungría)

Un mago tiene cien tarjetas numeradas desde 1 hasta 100. Las coloca en tres cajas: una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.

Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?

Problema 5 (Propuesto por Rusia)

Determinar si existe un enero positivo n tal que exactamente 2000 números primos diferentes dividen a n , y n divide a $2^n + 1$

Problema 6 (Propuesto por Rusia)

Sean AH_1, BH_2 y CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos T_1, T_2 y T_3 respectivamente.

Sea l_1 la recta simétrica de H_2H_3 con respecto a T_2T_3; l_2 la recta simétrica de H_3H_1 con respecto a T_3T_1, l_3 la recta simétrica de H_1H_2 con respecto a T_1T_2.

Demostrar que l_1, l_2, l_3 determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

Seguidamente se detalla en una tabla el número de estudiantes que ha obtenido cada puntuación en cada problema:

Puntos	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0	118	50	335	85	257	335
1	11	213	60	78	82	5
2	44	41	29	62	16	51
3	37	13	13	49	12	15
4	22	6	6	28	14	11
5	4	18	2	29	1	9
6	5	12	1	49	11	2
7	220	108	15	81	68	33
media	4.1	2.8	0.7	3.2	1.6	1

Los problemas se han propuesto en cada sesión en orden creciente de dificultad, es decir, de forma clásica, si bien el tercero ha resultado más difícil que el sexto.

Los participantes españoles no obtuvieron ninguna medalla en este certamen. José María Cantarero López obtuvo, sin embargo,una mención de Honor por sus siete puntos en el problema 4.

Sólo cuatro estudiantes (de Bielorrusia, China y dos de Rusia) han obtenido la puntuación máxima de 42 puntos.

La próxima Olimpiada Internacional será en Washington, Estados Unidos, del 1 al 15 de julio de 2001.

Juan Manuel Conde Calero
Universidad de Alicante
correo electrónico: jm.conde@ua.es

País	**pts**	**O**	**P**	**B**	**MH**
Albania	17				
Alemania	108	1	1	2	1
Argentina	88		1	4	
Armenia	108		2	3	
Australia	122	1	3	1	
Austria	68		2	1	
Azerbaiján	32				2
Bélgica	51			2	1
Bielorrusia	165	2	2	2	
Bosnia	78			4	
Brasil	58			3	1
Brunei	8				
Bulgaria	169	2	3	1	
Canadá	112	1	2	1	1
China	218	6			
China Taipei	164	3	2	1	
Chipre	32				1
Colombia	61			2	
Croacia	73			4	1
Cuba	61			2	2
Dinamarca	36			1	1
Ecuador	19				
Eslovaquia	111		2	3	
Eslovenia	73		1	1	2
España	29				1
Estados Unidos	184	3	3		
Estonia	42		1	1	
Filipinas	23				1
Finlandia	52			3	1
Francia	58			3	1
Georgia	72		1		4
Grecia	46			1	1
Guatemala	11				
Hong Kong	80		1	2	1
Hungría	156	1	5		
India	132		5	1	
Indonesia	54			2	
Irán	155	2	3	1	
Irlanda	28				1
Islandia	37				1
Israel	139	2	1	3	

País	**pts**	**O**	**P**	**B**	**MH**
Italia	57			3	
Japón	125	1	2	4	
Kazakhastán	91			4	1
Kyrgistán	16			1	
Kuwait	12				
Latvia	60			3	
Lituania	34			1	1
Luxemburgo	51			2	1
Macao	16				
Macedonia	63		1	2	
Malasia	32			2	
Marruecos	48			1	2
Méjico	75		1	3	1
Moldavia	84		2	3	
Mongolia	67			4	
Noruega	45			1	
Nueva Zelanda	34				1
Países Bajos	60			2	1
Perú	32				3
Polonia	75		1	2	1
Portugal	21				
Puerto Rico	8				
Reino Unido	96		2	4	
Rep de Corea	172	3	3		
Rep Checa	65		1	3	
Rumanía	139	1	3	2	
Rusia	215	5	1		
Singapur	71		1	2	
Sry Lanka	21				1
Sudáfrica	81			4	1
Suecia	77		2		2
Suiza	67		1	2	
Tailandia	78		1	3	
Trinidad Tobago	40				2
Turquía	111		3	1	1
Ucrania	135	2	2		1
Uruguay	23				1
Uzbekistán	70			2	4
Venezuela	11				
Vietnam	169	3	2	1	
Yugoslavia	93		1	3	

XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

José Aymerich Miralles

En Caracas, Venezuela, entre los días 16 y 24 de septiembre, se reunierom 83 estudiantes procedentes de 21 países para tomar parte en la Olimpiada Iberoamericana de 2000. Como se sabe, esta Olimpiada está dirigida a jóvenes de países miembros de la Organización de Estados Iberoamericanos (O.E.I), que participan con equipos de cuatro estudiantes. Únicamente Honduras faltó a la cita, y el resto de países, a excepción de Uruguay, participó con equipos completos.

Los Jefes de Delegación, que constituyen el Jurado, se alojaban en Caracas. A ellos se unieron, en el momento de comenzar las coordinaciones, los profesores tutores, que hasta ese momento se encontraban acompañando a los estudiantes en el Centro de Convenciones de Estudios Avanzados, en el Estado de Miranda.

Los seis problemas seleccionados por el Jurado entre una lista formada por 3 de álgebra, 6 de teoría ed números, 5 de combinatoria y 10 de geometría fueron los siguientes:

Problema 1

Se construye un polígono regular de n lados (n$\geq$ 3) y se numeran sus lados de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) el número asignado a cada lado o diagonal sea distinto del asignado a los vértices que une,

b) para cada vértice, todos los lados y diagonales que comparten dicho vértice tengan números distintos

media de todos: 4,04

media España: 7

Problema 2

Sean S_1 y S_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2 más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2. Sea C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

media de todos: 1,76

media de España: 2

Problema 3

Encontrar todas las soluciones de la ecuación $(x+1)^y - x^z = 1$ para x, y, z enteros mayores que 1

media de todos: 1,72

media de España: 2.75

Problema 4

De una progresión aritmética infinita $1, a_1, a_2, a_3, ...$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...$ de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

media de todos: 3.01

media de España: 3.25

Problema 5

Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternativamente, de acuerdo con las siguientes reglas:

1.- En cada jugada se pueden retirar 1,2,3,4 o 5 piedras del montón

2.- En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no puede realizar una jugada válida. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora, y encontrarla.

media de todos : 1.07

media de España: 3.5

Problema 6

Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

1.- Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono bonito de área k.

2.- Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $\frac{3}{2}$.

media de todos: 0.04

media de España: 0.75

La puntuación máxima de cada problema es, como de costumbre, siete puntos. El Jurado otorgó Medalla de Oro a los siete estudiantes (tres brasileños, dos mejicanos, un argentino y un venezolano) con 25 puntos o más. Nadie reunió más de 35 puntos. Los cortes para las Medallas de Plata y de Bronce fueron, respectivamente, 18 y 9 puntos.

El equipo español, con José Aymerich como Jefe de Delegación y Salvador Villegas como Profesor Tutor, estaba formado por los cuatro estudiantes, ganadores de la fase nacional de la Olimpiada, que habían obtenido mejores resultados en Corea. Y olvidada ya la Selectividad, tuvieron ocasión de sacarse la "espina" de los resultados de la internacional: Alberto Suárez Real, de Asturias,; José María Cantarero, de Málaga, y Luis Emilio García Martínez, de Valencia, obtuvieron Medalla de Plata, con 23, 19 y 19 puntos respectivamente; Carlos Gómez García, de Santiago de Compostela, tuvo 16 y Medalla de Bronce.

El año próximo, la Olimpiada se celebrará en El Salvador. España está oficialmente propuesta como sede para el año 2006,con autorización para adelantar si fallara alguna de las sedes intermedias, es decir, Uruguay (2002), Argentina (2003), Ecuador (2004) y Colombia (2005)

Noticias

El Profesor Francisco Bellot Rosado, del IES Emilio Ferrari de Valladolid, ha recibido el premio Erds que otorga la World Federation of Mathematical Competitions. Se reconocen as sus largos años de dedicación a la Olimpiada. Desde estas páginas le enviamos nuestra felicitación.

Es poca la literatura en castellano específica para los alumnos que desean prepararse para la Olimpiada. En el "*Manual de matemáticas para preparación olímpica*" que acaba de publicar la universidad Jaume I de Castellón se recogen, junto a numerosos problemas propuestos en nuestra Olimpiada y en las de otros países, los resultados teóricos que ayuda conocer para abordarlos con éxito. Los autores del libro son Cristóbal Sánchez Rubio y Manuel Ripollés Amela.

En el momento de cerrar esta edición de La Gaceta acaba de convocarse la XXXVII Olimpiada Matemática Española. La fase nacional se celebrará en Murcia, del 22 al 25 de marzo de 2001.