La Gaceta de la RSME, Vol. 5.3 (2002), Págs. 559–587

John Nash: Una mente maravillosa

El matemático americano John Nash ha recibido últimamente una notable atención mediática debida sobre todo a la publicación de su biografía[1] y al estreno de la película *"Una mente maravillosa"*. La Real Sociedad Matemática Española quiere hacerse eco de esta atención y aprovechar la ocasión para fomentar el conocimiento de su obra. Con este objetivo publica los dos artículos siguientes:

- *Un premio Nobel para John Nash: Una mente maravillosa* de John Milnor que recoge, en su totalidad, el artículo de John Milnor, *A Nobel Prize for John Nash*[2], junto con algunos extractos de *John Nash and "A Beautiful Mind"*[3], del mismo autor, que lo complementan.
  La Gaceta de la RSME agradece los permisos editoriales para su traducción y publicación, así como la colaboración de John Milnor.
  John Milnor se formó en la Universidad de Princeton. Ha trabajado en Topología, Geometría, Álgebra Dinámica y (tiempo ha) en Teoría de Juegos. En 1962 recibió la medalla Fields en reconocimiento a su trabajo. Desde 1989, es director del Institute for Mathematical Sciencies en la Universidad del Estado de Nueva York en Stony Brook.
- *J. F. Nash: Un matemático Nobel de Economía* de Federico Valenciano especialista en Teoría de Juegos de la Universidad del País Vasco.

[1] Silvya Nasar, *A Beautiful Mind: A biography of John Forbes Nash Jr.*, Simon & Schuster, Nueva York, 1998. Traducción española: *Una mente prodigiosa*, Grijalbo-Mondadori, Barcelona, 2002.

[2] *The Mathematical Intelligencer*, Vol 17, n^o 3, 1995, páginas 11-17

[3] *Notices of the American Mathematical Society*, November 1998, páginas 1329-1332

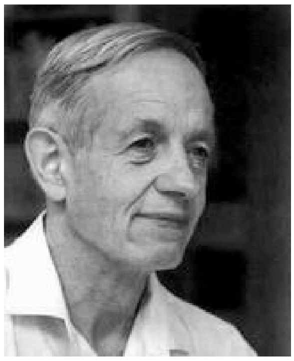
Un premio Nobel para John Nash: Una mente maravillosa

por

John Milnor

Durante los escasos diez años que duró su actividad investigadora, John Forbes Nash logró crear un asombroso conjunto de resultados matemáticos.

Para algunos, el breve artículo que escribió cuando tenía 21 años y por el que se le concedió el Premio Nobel de Economía[4], podría considerarse como el menos relevante de sus logros[5]. Sin embargo, aplaudo el acierto del Comité de Selección del premio Nobel de otorgarle el premio a Nash, porque resulta notablemente difícil aplicar métodos matemáticos precisos a las ciencias sociales y, sin embargo, las ideas de la tesis doctoral de Nash son simples y rigurosas y aportan una base sólida en la que cimentar, no sólo teorías económicas, sino también estudios de Biología evolutiva y, en general, el análisis de cualquier situación en la que seres humanos, o no, se enfrentan a competencia o a conflicto. En opinión de P. Ordeshook [O, página 118]



John F. Nash

> El concepto de equilibrio de Nash es quizás *la idea* más importante de toda la Teoría de Juegos no cooperativos [...] Tanto si queremos analizar las estrategias de que disponen los candidatos de unas elecciones, las causas que motivan una guerra, la manipulación de los programas electorales a lo largo de una legislatura, o la actividad de grupos de presión o de poderes fácticos, nuestras predicciones se reducen a la búsqueda y descripción de equilibrios. Sencillamente, buscamos estrategias de equilibrio para hacer predicciones sobre el comportamiento de la gente.

[4]Consúltese [P]. Éste es el tercer premio Nobel obtenido por un licenciado en Matemáticas de la Universidad de Princeton. Los dos primeros lo fueron en Física, ambos a John Bardeen.

[5]Nota Editorial. A este respecto, John Milnor comenta en su artículo *John Nash and "A Beautiful Mind"* lo siguiente: *Los matemáticos puros tienden a juzgar los trabajos matemáticos por su profundidad matemática, por las ideas o métodos nuevos que hayan aportado o por los problemas, que tras permanecer abiertos durante largo tiempo, hayan podido resolver. Desde esta perspectiva, el trabajo por el que Nash recibió el premio Nobel es una aplicación ingeniosa, pero no sorprendente, de métodos bien conocidos, mientras que su posterior trabajo matemático es mucho más importante.*

La primera sección de este artículo describirá el trabajo por el que a Nash se le concedió el premio Nobel. Tras una breve digresión, la tercera sección esbozará parte de los logros en los que se fundamenta la fama de que Nash goza entre los matemáticos, y la última repasará brevemente la vida de Nash tras 1958.

Teoría de juegos

En el marco establecido por von Neumann y Morgenstern [NM], un juego de n personas se describe de la manera siguiente. Hay n agentes o jugadores, numerados de 1 a n. Cada jugador i, con i entre 1 y n, tiene a su disposición un conjunto S_i de posibles estrategias, y eligirá algún elemento s_i de S_i; la naturaleza del juego permite que los agentes escojan simultáneamente entre sus opciones. El resultado final del juego es, por tanto, función de las n elecciones $s_1, s_2, \dots s_n$. Cada uno de los jugadores tiene un sistema de preferencias con el que ordena los posibles resultados; resulta conveniente describir las preferencias del jugador i-ésimo mediante una función p_i con valores reales,

$$p_i : S_1 \times \ldots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

a la que se denomina *ganancia*. El objetivo de cada jugador es elegir s_i para maximizar su ganancia, bien entendido que para cada $j \neq i$, el jugador j-ésimo simultáneamente elige s_j para intentar maximizar su propia ganancia p_j.

En la interpretación usual del modelo matemático, los distintos "jugadores" suelen ser personas. Sin embargo, caben otras posibilidades: los jugadores pueden ser naciones, empresas, equipos, ordenadores (programados por seres humanos) o animales. Para estudiar la Evolución, consideramos la competencia entre especies, (consúltense [MSP], [MS2] y [D1]). En los juegos que se desarrollan durante un periodo de tiempo, hemos de entender "las estrategias" de los jugadores no como elecciones simples, sino más bien como prescripciones de qué hacer en cada situación imaginable que pueda ocurrir durante el juego. Por ejemplo, una estrategia para el ajedrez podría consistir en un programa de ordenador capaz de seleccionar un movimiento para cada situación de la partida. Por cierto, la ganancia que reporta el juego no se mide necesariamente en términos de algo simple y objetivo, como el dinero, sino que se supone que incorpora cualquier motivación relevante que los jugadores pudieran contemplar, sea ésta egoista, altruista o lo que fuere.

Aunque von Neumann y Morgenstern desarrollaron una refinada teoría que permite tratar los juegos de dos personas y de suma cero, en el sentido de que $p_1 + p_2 = 0$, su aplicación al caso general resulta complicada y discutible. La teoría de Nash, sin embargo, es directa y elegante.

DEFINICIÓN. *Una n-tupla de estrategias $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ constituye un punto de equilibrio para el juego si ningún jugador puede incrementar su ganancia*

$$p_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

cambiando sólo s_i mientras los otros s_j quedan fijos.

No se afirma que un punto de equilibrio deba ser un resultado deseable del juego, de hecho, en ocasiones, el punto de equilibrio puede suponer un verdadero desastre para todos y cada uno de los jugadores. (Es fácil imaginar, por ejemplo, un juego de "guerra atómica" con un único punto de equilibrio en el que cada uno de los jugadores aniquila a todos los demás). Muy al contrario, debemos considerar un punto de equilibrio como la descripción de lo que probablemente ocurra en una situación de total falta de cooperación, en la que los jugadores persiguen sus objetivos individuales sin cooperar, bien porque no pueden comunicarse entre ellos, bien porque no hay mecanismos que les permitan cooperar o bien, sencillamente, porque no tienen interés alguno en cooperar. La teoría de von Neumann-Morgenstern, por el contrario, sólo considera juegos cooperativos.

Los dos ejemplos siguientes, que agradezco a Hector Sussmann, muestran cuan relevantes pueden llegar a ser en la vida diaria los puntos de equilibrio:

EJEMPLO 1. En una aburrida fiesta, todos los invitados quieren irse a casa temprano, pero nadie quiere marcharse antes de medianoche, salvo que algún otro invitado se vaya primero. Sólo hay un punto de equilibrio: todo el mundo se queda hasta medianoche. (Consúltese [Sch]).

EJEMPLO 2. Veinte personas van a cenar juntas una noche. Cada uno de ellos puede elegir entre dos menús: uno de 10 dólares, que no está mal, y otro excelente, de 20 dólares. Si cada uno se pagara lo suyo, todos se inclinarían por escoger el menú más barato. Sin embargo, han decidido que van a dividir la cuenta en partes iguales. Como para cada uno de ellos, pasar del menú barato al caro supone un coste marginal de tan sólo 50 centavos, todos eligen el menú caro.

Antes de enunciar el teorema fundamental de existencia de Nash, es preciso que introduzcamos probabilidades a través de las estrategias mixtas de von Neumann-Morgenstern. Para ver por qué esto es necesario consideremos el siguiente

EJEMPLO 3. Un sencillo candado tiene 1000 posibles combinaciones; el propietario del candado puede elegir cualquiera de ellas. Un ladrón potencial tiene una sola oportunidad de adivinar la combinación. Podíamos tomar S_1 y S_2 como conjuntos finitos con 1000 elementos cada uno. Sin embargo, con este modelo matemático, no existiría punto de equilibrio.

Para conseguir una teoría razonable es necesario que permitamos la posibilidad de que los jugadores escojan de forma aleatoria entre las opciones de que disponen. Para ello tomamos S_1 y S_2 como símplices de 999 dimensiones con 1000 vértices cada uno. Ahora hay un único punto de equilibrio (s_1, s_2), donde cada s_i es la distribución de probabilidad que asigna a cada posible elección de combinación, una probabilidad de 1/1000. El ladrón tienen entonces una posibilidad entre 1000 de adivinar la combinación correcta. (Éste es un ejemplo de un juego de suma cero de dos personas, de manera que, en este caso, un punto de equilibrio de Nash es lo mismo que un par de estrategias óptimas en el sentido de von Neumann-Morgenstern).

Siguiendo a von Neumann-Morgenstern, llamamos *estrategia mixta* a esta media ponderada de un número finito de estrategias puras, donde los coeficientes de la ponderación se interpretan como probabilidades. El conjunto de todas las estrategias mixtas de un jugador dado constituyen un símplice de dimensión finita.

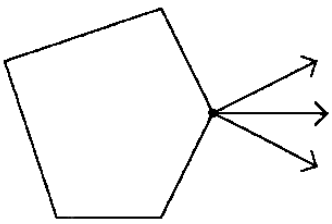


Figura 1: Ejemplos de vectores apuntando hacia fuera en un punto de la frontera de un conjunto compacto convexo.

TEOREMA DE EXISTENCIA. *Si el espacio de estrategias S_i de cada jugador es un símplice de dimensión finita, y si cada función de ganancia $p_i(s_1, \dots, s_n)$ es una función continua de sus n variables y es función lineal de s_i cuando las demás variables se dejan fijas, entonces hay al menos un punto de equilibrio.*

Para demostrar este enunciado se comienza por sumergir cada S_i en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{d_i}$ de su misma dimensión y consideramos el producto cartesiano

$$K = S_1 \times \cdots \times S_n \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$$

para a continuación construir un campo vectorial continuo

$$(s_1, \dots, s_n) \longmapsto (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_n} \qquad (*)$$

como sigue: la componente v_i en $\mathbb{R}^{d_i}$ es el vector gradiente $\partial p_i / \partial s_i$ de la función p_i cuando la consideramos como función lineal de s_i, con los restantes s_j fijos. Necesitamos el siguiente

LEMA. *Si $K \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto compacto convexo y $V : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua, entonces existe al menos un punto $\widehat{s} \in K$ donde el campo vectorial v se anula o apunta hacia fuera de K, en el sentido de que cada punto de K pertenece al semiespacio*

$$\left\{s \in \mathbb{R}^d : s \cdot v\,(\widehat{s}) \leq \widehat{s} \cdot v\,(\widehat{s})\right\}$$

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN. (Véase la figura 1.) Sea $\rho : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la retracción canónica que lleva cada punto de $\mathbb{R}^d$ al punto más próximo de K. Entonces la composición $s \longmapsto \rho(s + v(s))$ lleva K en sí mismo y, entonces, por el teorema del punto fijo de Brouwer, tiene un punto fijo

$$\widehat{s} = \rho(\widehat{s} + v(\widehat{s}))\,.$$

Es fácil comprobar que $v(\widehat{s})$, o se anula, o apunta hacia fuera de K.

Si ahora aplicamos el lema al campo vectorial $(*)$, obtenemos una n-tupla $\widehat{s} = (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n)$ que es el requerido punto de equilibrio.

COMENTARIO. Si una teoría matemática se supone que aporta un modelo matemático con el que analizar un determinado problema de la vida real, debemos preguntarnos cuán realista es ese modelo, si ayuda de verdad a entender el mundo real, y si podemos contrastar sus predicciones.

En el caso de la teoría del punto de equilibrio de Nash nos podríamos preguntar, para empezar, si se pretende que sea una teoría descriptiva de cómo actúa de verdad la gente ante la competencia, o una teoría normativa de cómo debe actuar la gente para obtener el mejor resultado posible. La respuesta es que probablemente ambas, o ninguna. De hecho, estos dos aspectos son inseparables, pues una teoría que describa como eligen entre sus opciones los otros jugadores puede ser crucial para determinar nuestra propia elección.

Hemos de preguntarnos en primer lugar sobre el realismo del modelo subyacente. Se parte de las hipótesis de que todos los jugadores son racionales, de que entienden perfectamente las reglas exactas del juego y de que disponen de información completa sobre los objetivos de los otros jugadores. Y la realidad, obviamente, es que rara vez se cumplen todas estas hipótesis.

Debemos abundar en la hipótesis de linealidad en el teorema de Nash. Esta hipótesis es una aplicación directa de la teoría de la utilidad numérica de von Neumann-Morgenstern que afirma que podemos medir el interés relativo de los resultados mediante una función con valores reales y lineal respecto de las probabilidades. En otras palabras, a un jugador le debe dar igual una estrategia s que le suponga una utilidad a con probabilidad del 50% y una utilidad b con un 50% de probabilidad, que una estrategia $\widetilde{s}$ que suponga una utilidad $(a + b)/2$ con probabilidad del 100%. Este concepto ha sido profundamente estudiado (véase, por ejemplo, [HM]). Mi opinión personal es que este punto de vista es bastante razonable como teoría normativa, pero que no es muy realista como teoría descriptiva.

¿Bajo qué condiciones se puede aplicar de verdad la teoría de equilibrio? Un juego puede tener muchos puntos de equilibrio, algunos de los cuales serán mejores que otros para un determinado jugador o, incluso, para todos ellos. Si sólo se juega una vez, sin comunicación alguna entre los jugadores, ¿cómo pueden saber éstos qué puntos de equilibrio son relevantes? Si los jugadores se comunican, ¿cuándo deja el juego de ser "no-cooperativo"? La situación cambia si el juego se repite una y otra vez, quizás asentándose gradualmente hacia algún punto de equilibrio. En este caso, hemos de considerar la complicación adicional de que la utilidad de los jugadores pueda ir evolucionando con las sucesivas repeticiones.

La teoría de Nash no supuso una respuesta definitiva al problema de entender situaciones de competencia, sino más bien un punto de partida para muchas líneas de investigación. Pero hay que resaltar que ninguna teoría matemática simple puede suponer una representación completa, puesto que la psicología de los jugadores y el mecanismo de interacción son cruciales para una comprensión precisa.

La idea de Nash[6], tan simple en apariencia, ha dado a lugar a cambios fundamentales en Economía y Ciencia Política. En el libro *A Beautiful Mind*, Nasar ilustra el impacto puramente mercantil de las teorías de Nash describiendo "La mayor subasta de la Historia", la subasta con la que en 1994 el gobierno de Estados Unidos vendió una buena parte de su espacio radioeléctrico para uso comercial. El procedimiento empleado, que consistía en rondas sucesivas de pujas, fue cuidadosamente diseñado por expertos en la aplicación de la Teoría de Juegos a las subastas con el objetivo de maximizar a la vez el beneficio para el Estado y la utilidad para los compradores de las longitudes de onda. El resultado de esta subasta fue todo un éxito: el Estado recaudó 10 mil millones de dólares, al tiempo que se garantizó una eficiente asignación de recursos. A modo de contraste, una subasta similar que tuvo lugar en Nueva Zelanda, que no contaba con un diseño cuidadoso desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, fue un desastre, pues el Estado recaudó tan sólo un 15% de lo que esperaba y no se logró una distribución eficiente de las longitudes de onda. Se dió incluso el caso de un estudiante neozelandés que compró una licencia de emisora de televisión por 1 dólar.

Un triunfo inesperado de la teoría de equilibrio ha sido su aplicación a la Genética de poblaciones y a la Genética evolutiva. Partiendo del trabajo pionero de Maynard Smith, las ideas de la Teoría de Juegos se aplican hoy en día en el estudio de la competencia entre diferentes especies o dentro de una misma especie. (Consúltese [MS2], [HS], [W]. Una versión más precisa de esta teoría, que Dawkins [D1] se ha encargado de popularizar, sostiene que, en realidad, son los genes los que compiten). La Teoría Económica también se

[6] Nota Editorial. El resto de esta sección proviene del artículo de Milnor *John Nash and "A Beautiful Mind"*.

enriquece, a través de un interesante flujo inverso de ideas, con aportaciones de Evolución. Según Binmore (en [W]):

> A pesar de las observaciones que Nash hacía en su tesis doctoral sobre una posible interpretación evolutiva [7] de la idea de un equilibrio de Nash, la atención de los investigadores del equilibrio se centró casi exclusivamente en su interpretación como el único resultado viable al que conduce el cuidadoso análisis de jugadores idealmente racionales. [...] El libro de Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, logró desviar la atención de los expertos en la Teoría de Juegos de su insistencia en el estudio de definiciones cada vez más elaboradas de racionalidad. Después de todo, dado que costaría aceptar que los insectos piensan, la racionalidad no puede ser tan crucial si, como parece ser el caso, la Teoría de Juegos es capaz de predecir su comportamiento en determinadas circunstancias. Simultáneamente, el desarrollo de la Economía experimental ha revelado que los seres humanos no son tan buenos razonadores como creen: el equilibrio se logra con frecuencia tras sucesivas rondas de ensayo y error.

Todas las aplicaciones de la teoría de Nash nos enseñan una lección que hemos de resaltar:

> *Aunque la teoría de equilibrio, desarrollada por Nash y por sus sucesores, parece suministrar la mejor descripción conocida de lo que es probable que ocurra en una situación de competencia, un equilibrio no es necesariamente un buen resultado para nadie.*

En contraste con la Teoría Económica clásica de Adam Smith, donde la libre competencia nos lleva al mejor de los resultados posibles, y en contraste con la teoría darwiniana clásica, en la que la selección natural siempre conduce a la mejora de las especies[8], la dinámica de la competencia sin una legislación que la regule puede resultar desastrosa. Todos sabemos que un conflicto entre naciones puede conducir a un carrera de armamentos, lo que es malo para todos, y que en casos extremos puede resultar en una guerra totalmente innecesaria. Análogamente, en la teoría evolutiva, una carrera de armamentos dentro de una misma especie o entre dos especies en competencia durante un

[7] Binmore no se refiere aquí a la evolución biológica, sino más bien a un proceso dinámico en el que sucesivas repeticiones de un juego convergen a un equilibrio. Lamentablemente, Nash no desarrolló esta discusión de su tesis doctoral en sus trabajos publicados.

[8] Según Darwin, "*como la selección natural actúa sólo por y para el beneficio de cada individuo, las dotes mentales y corporales han de tender progresivamente hacia la perfección*". Sin embargo, también expresó la opinión contraria. Consúltese la discusión de "*por qué el progreso no rige la historia de la vida*" en Gould [G1]. Lamentablemente, se ha producido un profundo e innecesario distanciamiento que llega hasta el rencor entre aquéllos que como Maynard Smith trabajan con modelos teóricos de la evolución y aquéllos que, como Gould [G2], ponen énfasis en que el mundo real es mucho más complicado que cualquier modelo.

periodo de tiempo geológico puede ser catastrófica[9]. De hecho, resulta perfectamente concebible que la propia selección natural pueda conducir a un punto sin retorno y a la extinción. He aquí una versión ligeramente exagerada de un ejemplo (consúltese [D3], [D4]) que debemos al propio Darwin: si las pavas en celo siempre eligieran a los pavos de cola más espléndida, se generaría una carrera de armamentos evolutiva que forzaría colas progresivamente más largas, hasta que los pavos resultaran tan torpes que no podrían escapar de sus depredadores.

Podemos aplicar comentarios similares a la Teoría Económica. En este contexto, quiero expresar mi firme convicción en la necesidad de que se escoja una adecuada normativa reguladora que ponga coto a los efectos negativos de la competencia desbocada que sirva para mejorar la situación en que nos encontramos. Sin embargo, la cuestión de sobre en quién debe recaer la responsabilidad de esa selección tan delicada es un asunto político para la que parece difícil que la teoría de equilibrio tenga solución.

Juegos

Nash se incorporó a Princeton como estudiante de doctorado en 1948, el mismo año en que yo comencé mis estudios de licenciatura. Pronto le conocí, porque ambos pasábamos mucho tiempo en la sala de descanso. Nash bullía con ideas matemáticas, no sólo en la Teoría de Juegos, sino también en Geometría[10] y Topología. Sin embargo, mis recuerdos más vívidos de esta época lo constituyen los múltiples juegos de mesa a los que tanto tiempo dedicábamos en aquella sala. Fui iniciado en el juego del Go y en el

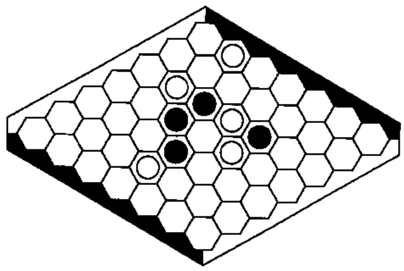


Figura 2: Situación típica del juego del Hex. Problema: las negras juegan y ganan. Problema alternativo: blancas juegan y ganan.

[9]Consúltese [DK], [D2]. Al interpretar la frase “carrera de armamentos” en un contexto evolutivo, conviene recordar que el éxito reproductivo es más importante que la destreza en la guerra. A menudo, la mejor estrategia evolutiva es *haz el amor, no la guerra*.

[10]He aquí una pregunta de Nash. Sea V_0 una variedad algebraica singular de dimensión k, sumergida en una variedad M_0, y sea $M_1 = G_k(M_0)$ la variedad de Grassman de k-planos tangentes a M_0. Entonces V_0 se eleva canónicamente a una variedad k-dimensional $V_1 \subset M_1$. Si continuamos inductivamente, obtenemos una sucesión de variedades k-dimensionales $V_0 \longleftarrow V_1 \longleftarrow V_2 \longleftarrow \ldots$ ¿Alcanzamos así alguna variedad no singular? Hasta la fecha, sólo en casos especiales se ha podido probar que así es. (Consúltese [G-S],[H] y [Sp]). Nota Editorial. Milnor comenta en el artículo del *Notices* que parece ser que el interés de Nash por estas cuestiones es posterior, de los años 60.

del Kriesgspiel, y también en un ingenioso juego topológico al que llamábamos Nash, en honor de su inventor. Tiempo después, descubrimos que este mismo juego había sido inventado unos años antes por Piet Hein en Dinamarca. Hein lo había llamado Hex, y por ese nombre se le conoce hoy. Un tablero $n \times n$ de Nash o Hex consiste en un rombo enlosetado con n^2 casillas hexagonales, como se ilustra en la figura 2. (Para disfrutar bien del juego recomiendo un tablero de tamaño 14×14; el que se representa en la figura es más pequeño por razones de espacio). Dos lados opuestos se colorean de negro, y los otros dos de blanco. Los jugadores van colocando alternativamente fichas de su correspondiente color en los hexágonos. Las fichas, una vez ubicadas, no se pueden volver a mover. El jugador negro intenta construir una cadena conexa de piezas negras que una los bordes negros del tablero, mientras que el jugador blanco intenta formar una cadena conexa de piezas blancas que una los bordes blancos. El juego continúa hasta que alguno de los dos jugadores tiene éxito.

TEOREMA. *En un tablero de Hex, el primer jugador puede ganar siempre.*

La demostración de Nash es maravillosamente no constructiva y puede esbozarse en los pasos siguientes

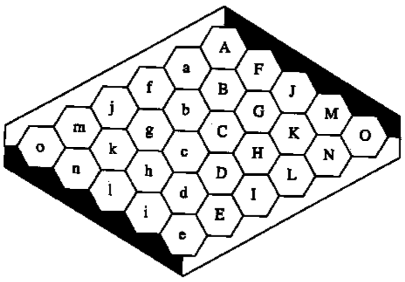


Figura 3: En un tablero asimétrico como el de la figura, las blancas siempre pueden ganar, incluso si las negras comienzan la partida. Podemos describir la estrategia ganadora como "doblar": a cualquier movimiento de las negras las blancas responden jugando en el hexágono marcado con el correspondiente símbolo, donde la correspondencia, por ejemplo, $a \Leftrightarrow A$ es una reflexión con traslación que dobla la mitad izquierda del tablero sobre la derecha.

PRIMER PASO. Un argumento puramente topológico demuestra que en cualquier partida, uno y sólo uno de los jugadores gana: cuando el tablero ya está cubierto de fichas blancas y negras, entonces hay una cadena negra de borde negro a borde negro o una blanca de borde blanco a borde blanco, pero no las dos.

SEGUNDO PASO. Como el juego es finito, con sólo dos posibles resultados, y como a los jugadores les toca turno alternativamente y disponen de información completa, un teorema de Zermelo, redescubierto por von Neuman y Morgenstern, asegura que uno de los dos jugadores debe tener una estrategia ganadora.

TERCER PASO, por simetría. Si el segundo jugador dispusiera de una estrategia ganadora, el primer jugador podría iniciar el juego escogiendo una casilla al azar, y a partir de ahí seguir la estrategia del segundo jugador. Puesto que su movimiento inicial nunca le perjudica, debe ganar. De manera que la hipótesis de que el segundo jugador disponga de una estrategia ganadora nos conduce a una contradicción. (Éste es un conocido argumento que se puede aplicar a muchos otros juegos simétricos, como el de "cinco en raya").

Obsérvese como esta demostración depende de la simetría del tablero. En un tablero $n \times (n+1)$, el jugador para el que la distancia entre sus correspondientes bordes del tablero sea más corta siempre puede ganar, incluso si el otro jugador comienza la partida. (Consúltese la figura 3).

Geometría y análisis

Tras su doctorado, Nash se incorporó como profesor al Massachussets Institute of Technology (MIT), comenzando así una etapa de extraordinaria productividad en la que logró una serie impresionante de resultados. El primero de estos resultados es una contribución fundamental a la teoría de las variedades algebraicas reales.

teorema. *Dada una variedad diferenciable compacta n-dimensional M, existe una variedad algebraica real $V \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ y una componente conexa V_0 difeomorfa a M.*

Nash complementó este teorema con una caracterización abstracta de tales variedades V_0 en términos una cierta álgebra de funciones definidas en V_0 y con valores reales.

Como ejemplo de la potencia de este resultado nos contentamos con mencionar la siguiente aplicación importante. Un problema fundamental en Dinámica es entender cómo el número de puntos periódicos de una aplicación diferenciable de periodo p puede variar en función de p.

teorema de Artin y Mazur. [AM] *Cualquier aplicación diferenciable de una variedad compacta en sí misma se puede aproximar mediante una aplicación diferenciable para la que el número de puntos periódicos de periodo p crece a lo sumo exponencialmente con p.*

La única demostración conocida de este teorema usa de manera esencial el resultado de Nash para traducir el problema de Dinámica a una cuestión de contar el número de soluciones de ciertas ecuaciones polinómicas[11].

Dos años más tarde, Nash se enfrentó con uno de los problemas abiertos más importantes de la Geometría Riemanniana, a saber, el problema de la

[11] Nota Editorial. Milnor comenta en el artículo del *Notices* que Kaloshin [Ka] ha dado en 1998 una demostración mucho más elemental basándose en el Teorema de aproximación de Weierstrass.

inmersión isométrica de variedades riemannianas. En otras palabras, Nash consideró el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = g_{ij}(u_1, \dots, u_k)$$

donde las u_i son coordenadas locales de una cierta variedad riemanniana k-dimensional, $g_{ij}(u_1, \dots, u_k)$ es la métrica riemanniana dada, y $\mathbf{x}(u_1, \dots, u_k)$ es la inmersión isométrica en el espacio euclídeo n-dimensional que buscamos. Éste es un sistema de $k\,(k+1)\,/2$ ecuaciones diferenciales no lineales con n funciones incógnita, que queremos resolver globalmente, sobre toda la variedad. Nash primero abordó el caso C^1.

Cualquier estudiante de Geometría Diferencial sabe que una superficie compacta sin borde del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ debe tener puntos con curvatura positiva. (Demostración: considere un globo esférico que rodee a la superficie, y vaya desplazándolo hasta que toque por primera vez la superficie. En ese punto de contacto ambas curvaturas principales deben ser no nulas y con el mismo signo. Por consiguiente, la curvatura gaussiana en ese punto de la superficie debe ser estrictamente positiva). Como ilustración, se sigue que para un toro plano $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ no puede existir una inmersión isométrica en $\mathbb{R}^3$.

Nash hizo caso omiso de estas dificultades. Incorporando una mejora posterior debida a Kuiper [Ku], podemos enunciar su resultado como sigue:

TEOREMA. *Si se puede sumergir diferenciablemente una variedad riemanniana compacta (M, g) en $\mathbb{R}^n$, entonces se puede sumergir C^1-isométricamente en $\mathbb{R}^n$.*

Sigue a continuación un somero esbozo de la demostración. Comenzamos con una inmersión diferenciable cualquiera y la encogemos uniformemente hasta que todas las distancias en la métrica inducida sean más cortas que las distancias de la métrica original g. A continuación introducimos pequeñas ondulaciones sinusoidales en la variedad inmersa para ir incrementando las longitudes euclídeas de las curvas carta por carta. Repetimos este proceso, controlando cuidadosamente las primeras derivadas en cada paso, con el objetivo de conseguir que la métrica riemanniana inducida por la inmersión vaya incrementándose monótonamente hacia la métrica buscada.

Una clave de esta construcción es que como no hay manera de controlar las derivadas segundas, la inmersión así construida nunca será C^2. Y puesto que la curvatura involucra derivadas segundas de forma esencial, ningún argumento sobre curvaturas principales afectará a la inmersión resultante.

Nash se enfrentó a continuación con el problema más profundo de la inmersión C^r, con $r > 1$.

TEOREMA. *Si $n \geq k(k+1)(3k+1)/2$, entonces toda variedad riemanniana k-dimensional de clase C^r se puede sumergir C^r-isométricamente en $\mathbb{R}^n$, para $3 \leq r \leq \infty$.*

Para demostrar este resultado, Nash introdujo un método completamente nuevo del Análisis no lineal. Podemos describir este método, en la forma general establecida por Moser [M], como sigue. Estamos intentando resolver algunos sistemas de ecuaciones en un espacio infinito-dimensional de funciones f. Dada una solución aproximada f_0, podemos aplicar un procedimiento de aproximación lineal del estilo del método de Newton, para obtener una aproximación mejor, g_0. La dificultad estriba en que, habitualmente, tales métodos lineales precisan diferenciar, lo que fuerza a que g_0 sea menos diferenciable que f_0. El truco entonces es aplicar un operador de alisado, para aproximar g_0 por una función f_1 que tenga mejores propiedades de diferenciabilidad. Podemos proceder inductivamente para construir una sucesión de aproximaciones $f_0, f_1, f_2, \ldots$ que, con cuidado extremo en las estimaciones de cada paso y con hipótesis adecuadas, convergerá a la solución buscada. (Para más información sobre estas ideas remitimos a [Gr] y [Gu]).

Tras estos resultados, Nash comenzó un profundo estudio de las ecuaciones diferenciales elípticas y parabólicas con el que consiguió demostrar teoremas fundamentales de existencia local, unicidad y continuidad (al tiempo que especulaba sobre las relaciones con Mecánica estadística, singularidades y turbulencia). A este trabajo no se le ha prestado toda la atención que se merecía. De hecho, un artículo de 1957 de De Giorgi [DG] ha dominado los estudios en este campo. Los métodos de estos dos autores eran muy diferentes, pero ambos eran profundamente originales y consiguieron importantes avances. De Giorgi se centró en el caso elíptico, mientras que Nash prestó especial atención a las ecuaciones parabólicas. Los métodos de Nash, fundamentados en una desigualdad de momentos de la solución fundamental, son muy potentes. (Consúltese [FS]).

Las dos citas que reproduzco seguidamente, que he resumido y editado ligeramente y que provienen del artículo de Nash sobre “Continuidad de soluciones”([Nash 16]), permiten hacerse una idea de los puntos de vista que defendía y de las metas científicas a que aspiraba en ese año de 1958 tan crucial en su vida.

> Los problemas abiertos en el área de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales son muy relevantes en las Matemáticas aplicadas y en la Ciencia en general, quizás más que cualesquiera otros problemas abiertos en Matemáticas, y este área parece en vías de un rápido desarrollo. Poco se sabe sobre existencia, unicidad y diferenciabilidad de las soluciones de las ecuaciones generales del flujo de un fluido viscoso, comprensible y conductor del calor. Además, no se entiende bien la relación entre esta descripción continua de un fluido y la descripción, físicamente más válida, en términos de Mecánica estadística. Quizás debiéramos intentar demostrar, existencia, diferenciabilidad y continuación única (en el tiempo) de los flujos bajo la hipótesis de que no aparezcan ciertas singularidades,

> tales como temperaturas o derivadas infinitas. Un resultado de este tipo ayudaría a clarificar el problema de la turbulencia.
>
> El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales se basa, habitualmente, en estimaciones *a priori* que, por su parte, son teoremas sobre ecuaciones lineales. Los métodos que hemos usado aquí están inspirados en la intuición física, en difusión, movimiento browniano y flujo del calor o cargas eléctricas, pero el ritual de la exposición matemática tiende a ocultar esta base natural.

EPÍLOGO

En 1958, cuando tenía 30 años, Nash sufrió un devastador ataque de enfermedad mental. (Consúltese [N]). Comenzó así una etapa horrible de muchos años en los que permaneció largos periodos confinado en distintos hospitales psiquiátricos, normalmente contra su voluntad y sometido con frecuencia a sesiones de electroshocks, y que se alternaban con cortos periodos de ligera mejoría. Durante uno de éstos, en 1966, Nash publicó un artículo en el que demostraba que su teorema de inmersión isométrica, e incluso la maquinaria más general de función implícita de Nash-Moser, se podía extender al caso analítico real. Luego siguió un periodo extremadamente largo de barbecho. Durante este tiempo perdí contacto con él; pero me sentí muy feliz cuando supe que su enfermedad había remitido y que había vuelto a interesarse por problemas matemáticos de primera línea. En 1995, Nash no sólo asistió a la ceremonia de los premios Nobel en Estocolmo, sino que además impartió un seminario en Uppsala sobre su trabajo reciente en Física matemática.

Concluyo felicitando a Nash, no sólo por su premio Nobel, sino por su aportación al acerbo de conocimientos de la Humanidad. Le deseo, de corazón, lo mejor para el futuro.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a D. Gale, I. Kra, H. Kuhn, J. Moser, M. Spivakovsky, y H. Sussmann la colaboración que me han prestado durante la elaboración de este artículo.

REFERENCIAS

[AM] M. ARTIN, B. MAZUR, On periodic points. *Ann. Math.* 81 (1965), 82-99.

[D1] R. DAWKINS, *The Selfish Gene.* Oxford University Press, Oxford, 1976.

[D2] R. DAWKINS, *The Extended Phenotype.* Oxford University Press, Oxford, 1982.

[D3] R. DAWKINS, *The Blind Watchmaker.* Norton, 1986.

[D4] R. DAWKINS, *River out of Eden.* BasicBooks, Harper Collins, 1995.

[DG] E. De Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3) 3 (1957), 25-43.

[DK] R. Dawkins, J.R. Krebs, Arms races between and within species. *Proc. Royal Soc. London* B 205 (1979), 489-511.

[FS] E.B. Fabes, D.W. Stroock, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 96 (1986), 327-338.

[G1] S.J. Gould, *Full House.* Harmony Books, 1996.

[G2] S.J. Gould, *Darwinian fundamentalism.* New York Review of Books, (12 de junio de 1997), páginas 34-37.

[G-S] G. González-Sprinberg, Résolution de Nash des points double rationnells. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 32 (2) 9 (1982), 1111-178. Véase además, Désingularisation des surfaces par des modifications de Nash normalisées. *Sem. Bourbaki*, 1985/86, Astérisque 145-146 (1987), 4 y 187-207.

[Gr] M. Gromov, *Partial Differential Relations.* Springer-Verlag, Nueva York, 1986.

[Gu] M. Günter, Isometric embeddings of Riemannian manifolds, *Proceedings International Congress of Mathematicians, Kyoto, II*, Mathematical Society of Japan, Springer, (1991), páginas 1137-1143.

[H] H. Hironaka, On Nash blowing-up. *Arithmetic and Geometry II*, Birkhäuser, (1983), 103-111.

[HM] I.N. Herstein, J. Milnor, An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica* 21 (1953), 291-297.

[HS] P. Hammerstein, R. Selten, *Game Theory and Evolutionary Theory.* Handbook of Game Theory with Economic Applications, volumen 2, (Aumann y Hart, editores), Elsevier, 1994, páginas 929-993.

[Ka] V. Kaloshin, *Generic diffeomorphisms with superexponential growth of numbers of periodic units.* Princeton University Press, por aparecer.

[Ku] N. Kuiper, On C^1- isometric imbeddings I, II. *Indag. Math.* 17 (1955), 545-556, 683-689.

[M] J. Moser, A new technique for the construction of solutions on nonlinear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 47 (1961), 1824-1831.

[MS1] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games.* Chapman and Hall, New York (1989).

[MS2] J. Maynard Smith, *Did Darwin Get It Right?* Chapman and Hall, New York, (1989).

[MSP] J. Maynard Smith, G.R. Price, The logic of animal conflict[12]. *Nature* 246 (1973), 15-18.

[12]Una estrategia evolutiva estable en el sentido de Maynard Smith y Price es casi lo mismo que un punto de equilibrio de Nash.

[N] S. NASAR, The lost years of a Nobel laureate. *New York Times Bussines Section*, 13 November 1994, 1 y 8.

[NM] J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, (1944).

[O] P. ORDESHOOK, *Game Theory and Political Theory: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, (1986).

[P] R. POOL, Economics: Game theory's winning hands. *Science* 266 (21 de octubre de 1994), 371.

[Sch] J. SCHWARTZ, *Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics*. Gordon and Breach, New York, (1961).

[Sp] M. SPIVAKOVSKY, Sandwiched surface singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations. *Ann. Math.* 131 (1990), 411-491.

[W] J. WEIBULL *Evolutionary Game Theory*. MIT Press, 1995. (Introducción de K. Binmore).

ANEXO I. TRABAJOS PUBLICADOS POR JOHN F. NASH

1. CON J. F. NASH SR. Sag and tension calculations for wire spans using catenary formulas. *Elect. Engrg.* (1945).
2. Equilibrium points in n-person games. *Proc. Nat. Acad. Sci USA* 36 (1950), 48-49.
3. *Non cooperative games*. Tesis doctoral, Princeton University, Mayo de 1950.
4. A simple three-person poker game. *Contributions to the theory of games*. Ann. of Math. Stud. 24, Princeton University Press, 1950, pp. 105-116.
5. The bargaining problem. *Ecomometrica* 18 (1950), 155-162. (Escrito cuando estudiaba su licenciatura en Carnegie Tech).
6. Non-cooperative games. *Ann. Math.* 54 (1951), 286-295.
7. Real algebraic manifolds. *Ann. Math.* 56 (1952), 405-421. (Véase también *Proc. Intern. Congr. Math., 1950* (AMS, 1953), páginas 516-517).
8. CON J. P. MAYBERRY Y M. SHUBIK, A comparison of treatments of duopoly situation. *Econometrica* 21 (1953), 141-154.
9. Two-person cooperative games. *Econometrica* 21 (1953), 128-140.
10. CON C. KALISCH, J. MILNOR Y E. NERING *Some experimental n-person game.* Decision Processes (Thrall, C. H. Coombs, y R. L. Davis, editores.) J. Wiley, New York, 1954.

11. C^1-isometric imbeddings. *Ann. Math.* 60 (1954), 383-396. (Véase también *Bull. Amer. Math. Soc.* 60 (1954), página 157).

12. Results on continuation and uniqueness of fluid flow. *Bull Am. Math. Soc.* 60 (1954), 165-166.

13. A path space and Stiefel–Whiney classes. *Proc. Nat. Acd. Sci. USA* 41 (1955), 320-321

14. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. Math.* 63 (1956), 20-63. (Véase también *Bull. Am. Math Soc.* 60, (1954), 480).

15. Parabolic equations. *Proc. Nac. Acad. Sci. USA* 43 (1957), 754-758.

16. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* 80 (1958), 931-954.

17. Le problème de Cauchy pour les équations differentielles d'un fluide général. *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), 487-497.

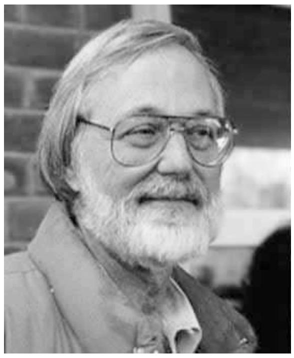
18. Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data. *Ann. Math.* 84 (1966), 345-355.

19. Autobiographical essay. *Les Prix Nobel 1994.* Norsteds Tryckeri, Estocolmo, 1995.

20. Arc structures of singularities. *Duke J. Math.* 81 (1995), 31-38. (Escrito en 1966).

21. con H. Khun, J. Harsanyi, R. Selten, J. Weibull, E. van Damme, y P. Hammerstein, The work of John F. Nash Jr. in game theory, *Duke J. Math.* 81 (1995), 1-29.

ANEXO II. COMENTARIO DE JOHN MILNOR SOBRE EL LIBRO "A BEAUTIFUL MIND" DE SYLVIA NASAR



John Milnor

En su biografía de Nash *A Beautiful Mind*, Sylvia Nasar nos relata la vida de Nash en detalle, basándose en cientos de entrevistas con amigos, conocidos, familiares y colegas, y en una cuidada documentación. El talento de Nasar para las entrevistas le ha permitido conseguir interesante información a la que de otra forma quizás no hubiera tenido acceso. Nasar describe meticulosamente las deliberaciones, no sólo de la medalla Fields de 1958, para la que Nash era uno de los candidatos, sino también para el premio Nobel de Economía de 1994, unas deliberaciones tan explosivas que obligaron a una reestructuración radical del premio y a un cambio completo en su comité. En general, Nasar identifica cuidadosamente sus fuentes, pero en estos casos particulares han permanecido en el anonimato.

Aunque su formación es en Economía y no en Matemáticas, Nasar ha sido capaz de dar descripciones someras de los principales trabajos de Nash, situándolos en su contexto y aportando referencias precisas. También suministra información detallada de los lugares y las personas que desempeñaron papeles importantes en la vida de Nash. (Algunos enunciados matemáticos y los nombres de algunas personas aparecen un tanto distorsionados, pero el lector astuto será capaz de identificarlos). En el libro nos encontramos con fascinante información sobre la historia de Carnegie Tech, Princeton, Rand Corporation, MIT, el Institute for Advanced Study, y el Courant Institute, además de información sobre bien conocidos matemáticos, y algunos otros no tan conocidos. La narración del libro nos conduce por interesantes historias paralelas: su descripción del MIT se entrelaza con una discusión de la era McCarthy, mientras que su descripción de la Rand Corporation y de von Neumann da lugar a una discusión de la relación de la Teoría de Juegos con la política de la Guerra Fría. (Parece ser que Von Neumann, quien abogaba por un ataque nuclear preventivo contra la Unión Soviética, pudo haber sido el modelo original del *Dr. Strangelove* de Kubrick).

Cualquier discusión del libro de Nasar debe señalar un dilema ético central: esta es una biografía no autorizada, escrita sin el consentimiento ni la cooperación del personaje biografiado. La actividad matemática de Nash estuvo acompañada por una complicada vida personal, que Nasar describe con sumo detalle. Este material es de interés para un público general. (En la cubierta del libro se recoge la opinión de Oliver Sacks de que el libro es "extraordinariamente emotivo, notable por sus compasivas intuiciones tanto acerca del genio como sobre la esquizofrenia"). Inevitablemente, la publicación de un material como el que nos ocupa supone una drástica violación del derecho a la intimidad del personaje.

El libro está dedicado a Alicia Nash, quien primero fue su mujer y después su fiel compañera, cuyo apoyo a través de dificultades imposibles ha desempeñado claramente un papel fundamental en la recuperación de Nash.

John Milnor
Institut for Mathematical Sciences
State University of New York
Stony Brook (USA)
Correo electrónico: `jack@math.sunysb.edu`

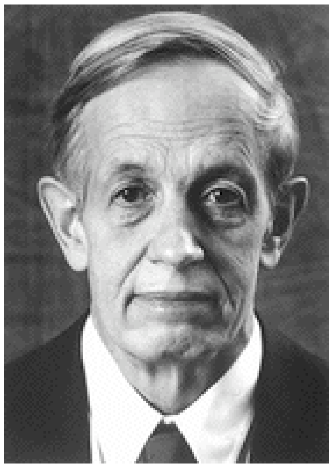
Traducción de Carmelo Alonso Torres y Pilar Pueyo Zaera

J. F. Nash: Un matemático Nobel de Economía

por

Federico Valenciano[13]

1. INTRODUCCIÓN



John F. Nash

Para el matemático alejado de las ciencias sociales en general y de la economía en particular, no puede mas que resultar sorprendente el caso de Nash. Aun dejando a un lado la dramática biografía del personaje, súbitamente popularizada en versión cinematográfica al gusto americano por la película de R. Howard, resulta fascinante el caso de un matemático que, habiendo recibido un solo curso de economía en su vida, recibe el Premio Nobel de Economía por un breve trabajo publicado casi medio siglo antes. En la nota de prensa en la que la Real Academia Sueca de Ciencias anunciaba la concesión del galardón en 1994 en forma compartida a J. F. Nash, R. Selten y J. Harsanyi, se fundamenta la decisión en la contribución de los tres autores a la noción de equilibrio como predicción del resultado de la interacción estratégica, y su enorme impacto en el análisis económico. En la misma nota, en el resumen sumario de los méritos de los tres laureados, en relación con Nash, y aparte de su reconocimiento como introductor de la noción que con el tiempo sería conocida como “equilibrio de Nash”, se destaca su introducción de la distinción entre juegos cooperativos, en los que son posibles los acuerdos vinculantes, y juegos no cooperativos, donde estos acuerdos no son posibles.

En esta breve nota, con el propósito de acercar al público matemático la contribución de Nash a la teoría de juegos y la economía, se presentan brevemente sus dos aportaciones más significativas e influyentes. De un lado, claro está, la noción de equilibrio no cooperativo, noción central de la teoría de juegos. Pero también su solución al problema del regateo o negociación,

[13]Quiero agradecer a mis compañeros J. Duoandikoetxea, F. Grafe, E. Iñarra y A. Laruelle sus comentarios al primer borrador de estas notas. La responsabilidad de opiniones y carencias es sólo mía.

paradigma y referencia básica de la literatura posterior en el terreno de los juegos cooperativos. Siguiendo un orden cronológico, me referiré en primer lugar a este último trabajo.

2. El problema de negociación o regateo

Al parecer inspirado por el único curso de economía que recibió en su vida[14], antes de ir a Princeton, y como resultado de su primer contacto con la teoría de juegos al llegar allí, donde éste era un tema caliente, Nash abordó y propuso un original tratamiento y "solución" al problema de negociación o regateo ("the bargaining problem"). Una situación de regateo o negociación es una situación en la que dos individuos pueden beneficiarse de la cooperación siempre que lleguen a un acuerdo sobre el modo de llevarla a cabo. Más precisamente, ambos tienen a su alcance una variedad de alternativas posibles que mejorarían la situación de los dos, y sólo el acuerdo les separa de cualquiera de ellas. El problema abordado por Nash es el de determinar el resultado o "nivel de satisfacción" que dos individuos racionales pueden esperar en una situación de este tipo, o, de otro modo, el valor que para cualquiera de ellos tiene la oportunidad de enfrentarse a una situación de esta naturaleza.

Para ello, Nash (1950a) propone un modelo matemático muy simple que capta lo esencial de una situación de negociación por medio de una cierta idealización de la misma. Dos agentes, que llamaremos 1 y 2, buscan un acuerdo sobre qué alternativa llevar adelante de un conjunto de ellas, que podemos considerar finito. Todas ellas beneficiarían al menos a alguno de ellos, si no a ambos, pues podemos eliminar del conjunto de alternativas aquellas que empeorarían el *status quo* o situación de partida a la que revertirían en caso de no llegar a un acuerdo: un agente racional nunca aceptaría una de ellas. Se supone que ambos están de acuerdo en ensanchar el conjunto de opciones ("anticipaciones" en los términos originalmente empleados por Nash) posibles incluyendo como tales mezclas aleatorias de las alternativas de partida. Por ejemplo, si A y B son dos alternativas o acuerdos factibles, también lo sería cualquier combinación probabilística de ambas, denotada $pA + (1-p)B$, esto es, cualquier "lotería" (el término hoy habitual) que da A con probabilidad p, y B con probabilidad $(1-p)$, con $0 \leq p \leq 1$. Esto involucra el problema del comportamiento racional en situaciones de riesgo. Nash supone las preferencias de ambos agentes consistentes con el modelo de conducta racional en situaciones de riesgo propuesto por von Neumann y Morgenstern en su obra fundacional de 1944. Es decir, que las preferencias de ambos agentes pueden representarse del siguiente modo. Para cada uno de ellos existe una función u_i que asigna a cada alternativa A de las de partida un número real $u_i(A)$,

[14] Las pocas referencias biográficas que acompañan a esta nota están basadas en la documentada biografía de Nash escrita por Sylvia Nasar (1998), y en las notas que acompañan la recopilación de sus trabajos recientemente editada por H. W. Kuhn y S. Nasar (2002).

de modo que: (i) $u_i(A) > u_i(B)$ si y sólo si A es preferido a B por i, esto es, u_i es una función (de "utilidad") que representa las preferencias de i sobre el conjunto de alternativas de partida, y (ii) la función ("de utilidad esperada"), que denotaremos también u_i, que asigna a cada lotería el valor esperado de u_i (por ejemplo, $u_i(pA + (1-p)B) = pu_i(A) + (1-p)u_i(B)$), representa las preferencias de i sobre el conjunto así ampliado de opciones. Como es sabido, de existir tal función u_i sobre el conjunto de alternativas de partida, ésta no es única: también cumplirá estas mismas condiciones $au_i + b$, para cualquier par de números reales a y b, siempre que $a > 0$. De otro modo, estas funciones, para uno y otro agente, están determinadas salvo el cero u origen y la unidad de escala para cada una de ellas. Sin pérdida de generalidad, parece natural elegir como cero para ambas funciones la utilidad de la situación de partida o *status quo* al que revertirían si no se llegase a ningún acuerdo.

Elegido así un par de funciones u_1 y u_2 para expresar las preferencias de uno y otro agente, es posible describir sumariamente la situación a la que ambos se enfrentan representando gráficamente en el plano todos los vectores "de utilidades" $(u_1(\alpha), u_2(\alpha))$ asociados a todas las posibles opciones, incluyendo las mezclas aleatorias. Un punto distinguido en este conjunto es el correspondiente al caso de desacuerdo o *status quo*, que será el origen si se han elegido las funciones de utilidad del modo indicado. El conjunto así obtenido es convexo y compacto. Lo primero porque cualquier punto intermedio del segmento que une dos cualesquiera de este conjunto puede obtenerse para la combinación probabilística apropiada de las dos "anticipaciones" correspondientes a esos dos puntos. Lo segundo porque ese conjunto es el cierre convexo de un conjunto finito: el de los vectores de utilidades asociados a las opciones de partida. Naturalmente, distintos acuerdos alternativos pueden proyectarse sobre un mismo punto siempre que sean vistos como indiferentes por ambos agentes, pero en este caso pueden verse como acuerdos equivalentes. De este modo, este gráfico, aunque determinado sólo salvo un cambio de escala, puede tomarse como una representación completa de los aspectos esenciales de la situación.

Resumida de este modo la situación, se entiende por "solución" un punto de este conjunto, realizable por tanto mediante el acuerdo apropiado, justificable o interpretable como expectativa *racional* compartida por ambos agentes, que se reconocen mutuamente como tales. A partir de aquí, el modo de proceder de Nash es proponer condiciones, una a una razonables y consistentes con el sentido de lo dicho hasta aquí, que cabría esperar de una solución así entendida. Si S denota el conjunto compacto y convexo mencionado para un par de funciones de utilidad u_1 y u_2, y $c(S)$ denota la solución, estas condiciones son las siguientes.

1. Si $(u_1(\alpha), u_2(\alpha))$ es un punto de S y existe otro $(u_1(\beta), u_2(\beta))$ tal que $u_i(\beta) > u_i(\alpha)$ (para $i = 1, 2$), entonces $(u_1(\alpha), u_2(\alpha)) \neq c(S)$.

2. Si el conjunto de opciones de partida se reduce, manteniéndose las preferencias (y funciones de utilidad que las representan) sobre las que permanecen, así como sobre sus combinaciones probabilísticas, de modo que el nuevo con-

junto de vectores de utilidades factibles se reduce a $T \subseteq S$, pero contiene a $c(S)$, entonces $c(T) = c(S)$.

Se dice que el problema es *simétrico* si S es cerrado por permutaciones de sus coordenadas. Es decir, si el conjunto S es simétrico con respecto a la bisectriz $u_1 = u_2$.

3. Si S es simétrico, entonces $c(S)$ es un punto de la forma (a, a).

Finalmente, dado el grado de indeterminación de las funciones de utilidad, la solución debe ser independiente de la elección de origen y escala para éstas.

4. Si S' es el conjunto que se obtiene cuando se toman funciones de utilidad $u'_i = a_i u_i + b_i$ $(i = 1, 2,\ a_i > 0)$, entonces $c(S') = (a_1 c_1(S) + b_1, a_2 c_2(S) + b_2)$.

La primera condición (habitualmente denominada "eficiencia" u "optimalidad de Pareto") expresa que un acuerdo que sea mejorable para ambos no será aceptado. La segunda ("independencia de alternativas irrelevantes") expresa la siguiente condición de racionalidad: si $c(S)$ es considerado por ambos agentes el (vector de utilidades asociado al) mejor acuerdo posible en la situación de partida, y a continuación el conjunto de acuerdos factibles se reduce manteniéndose factible la opción antes considerada óptima, parece natural y razonable seguir considerando ésta óptima sobre un conjunto menor de posibilidades. La tercera ("simetría") requiere que la solución no dependa de la "etiqueta" (1 ó 2) que se asigne a cada agente. Más precisamente, la solución sólo debe depender de la descripción matemática de la situación, pero siendo irrelevante la etiqueta asignada a cada jugador, viniendo así a ser una condición de isomorfía[15]. Por último, el sentido de la cuarta, ya explicitado, es obvio.

Pues bien, no es difícil demostrar (Nash lo hace en unas pocas líneas y el lector matemático es invitado a hacerlo por sí mismo) que estas cuatro condiciones, bajo los supuestos descritos, determinan de modo unívoco una solución para cada problema. Más específicamente, estas condiciones imponen que la solución sea el punto del conjunto S en el que se maximiza el producto de utilidades $u_1 u_2$[16].

Si dentro de la teoría de los juegos no cooperativos la noción central desde su introducción por Nash es la de equilibrio, dentro de la teoría de los juegos cooperativos, este trabajo de Nash es una de las referencias básicas, y la central en el caso de la literatura relacionada con el problema de negociación. Merece destacarse la claridad y la simplicidad de un modelo que capta los elementos esenciales de un tipo de situación cuya complejidad la hacía ser

[15]En el artículo original (Nash, 1950a) esta condición es interpretada como expresión del supuesto de igual capacidad o habilidad negociadora de ambos agentes. El mismo Nash, en (1953), desecha esta interpretación como errónea e inconsistente con el supuesto de racionalidad e información completa.

[16]Esto suponiendo que se han elegido funciones de utilidad para las que el cero se sitúa en el caso de desacuerdo o *status quo*. En otro caso, será el punto de S en el que se maximiza el producto $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$, donde d_i representa el valor de u_i en la situación de partida.

considerada inabordable teóricamente, o de resultado indeterminado más allá de la condición de "eficiencia" señalada ya por Edgeworth (1881). Al mismo tiempo, me parece importante resaltar la simplicidad de la construcción desde el punto de vista matemático. Volveré sobre este punto al comentar algunos aspectos que me parecen dignos de subrayar en el trabajo de Nash y que están también presentes en la más famosa de sus aportaciones, que a continuación presentamos brevemente.

3. El equilibrio no cooperativo o "de Nash"

El antecedente inmediato de la noción de equilibrio introducida por Nash se encuentra en la noción de punto de silla en estrategias mixtas en juegos de dos personas y suma nula en la obra fundacional de la teoría de juegos *Theory of Games and Economic Behavior,* publicada por J. von Neumann y O. Morgenstern en 1944[17]. En ella, junto al modelo de comportamiento racional en situaciones de riesgo antes mencionado, von Neumann y Morgenstern introducen los dos modelos básicos de juego: el juego en forma "extensiva", y su resumen sumario o normalizado en forma "estratégica". En el primero se incorporan formal y minuciosamente todas las posibles historias del juego, correspondientes a todas las posibles secuencias de decisiones de los jugadores que pueden darse hasta alcanzar el final del juego, así como los pagos resultantes para cada uno de los jugadores en todos los finales posibles. El segundo modelo se basa en la noción de "estrategia pura", esto es, un plan de juego que especifica de modo exhaustivo para un jugador la elección o decisión que tomará en todas y cada una de las situaciones que pueden presentarse a lo largo del juego de acuerdo con las reglas que lo especifican. De este modo se simplifica drásticamente el nivel de detalle que se incorpora al modelo, que queda así reducido a los siguientes elementos: un conjunto $1, 2, .., n$ de *jugadores* y, para cada uno de ellos, un conjunto de *estrategias puras* Π_i y una *función de "pagos"* que asigna a cada n-tupla de estrategias el pago que esa combinación de decisiones supondría para ese jugador. Sobre este punto de partida se supone además que cada jugador puede aleatorizar sus decisiones. Así una *estrategia mixta* de un jugador es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras, y una combinación o n-tupla de *estrategias mixtas* determina una distribución de probabilidad sobre las combinaciones de estrategias puras y los finales de juego que éstas determinan, y por tanto sobre los pagos. De este modo, a cada combinación de estrategias mixtas le corresponde un pago *esperado* para cada jugador. Hay que suponer, pues, que las funciones

[17]En realidad este resultado ya aparece en von Neumann (1928), aunque la obra de von Neumann y Morgenstern es, aparte de uno de sus propios trabajos (Nash, 1950b), la única referencia en la bibliografía de su tesis. También cabe mencionar como antecedente la noción de Cournot (1838) en su análisis del duopolio, aunque Nash, con toda probabilidad, no supiera nada de este autor.

de pago se han elegido de modo que los pagos esperados representen las preferencias de uno y otro jugador de acuerdo con el modelo de comportamiento en situaciones de riesgo descrito en el apartado anterior.

Von Neumann y Morgenstern estudian con especial detalle el modelo anterior para el caso de *dos* jugadores y "suma nula", obteniendo para este caso el conocido teorema de "minimax" o de existencia de punto de silla. Esto es, la existencia de al menos un par de estrategias mixtas, una para cada jugador, de manera que cada una de ellas es la mejor respuesta a la otra. Es más, aunque puede haber más de un par de estrategias con esta propiedad, si es así el pago que recibe cada jugador es el mismo en todas esas situaciones, y además cualquier combinación formada a partir de ellas tomando una estrategia mixta para el primer jugador y otra para el segundo entre las que aparecen en alguno de estos pares, el par resultante tiene la misma propiedad. Puede por tanto interpretarse al pago asociado a estas combinaciones de estrategias mixtas como el *valor* del juego, o pago que un jugador racional puede esperar ante la opción de participar en él (frente a otro igualmente racional).

Pese a ser éste uno de los resultados principales en el libro de von Neumann y Morgenstern, el caso considerado es de muy limitado interés. Hemos obviado la explicación precisa de la condición de "suma nula", pero es necesario detenerse en ella para entender lo restrictivo de este supuesto. Ciertamente abundan situaciones en las que los intereses de dos agentes son opuestos (por ejemplo, cualquier juego en el que sólo sea posible un ganador que recibirá lo que el perdedor haya de pagar). Pero el supuesto va mucho más allá de esto. Para ello, nótese que las funciones asépticamente presentadas como "de pago", deben entenderse en general como funciones *de utilidad esperada*, de acuerdo con el modelo de racionalidad en situaciones de riesgo de von Neumann y Morgenstern ya mencionado. Esto significa que la condición de suma nula requiere no sólo que si 1 prefiere A a B, entonces 2 prefiera B a A (y recíprocamente); sino que si 1 considera a C equivalente, digamos, a la lotería $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$, entonces 2 considere a C equivalente a $\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$. Es decir, en un juego de suma nula cada jugador es un réplica exacta pero invertida del otro. Esto es muy restrictivo y de escasa aplicación, incluso en el plano teórico.

El resto del libro de von Neumann y Morgenstern desarrolla lo que Nash llama en la introducción de su breve tesis doctoral[18], "a theory of n-person games of a type which we would call cooperative" (Nash, 1950c y 1951), basada en el análisis de las interrelaciones de la distintas coaliciones que los jugadores pueden formar. Y en el siguiente párrafo de su tesis Nash señala: "Our theory, in contradistinction, is based on the *absence* of coalitions in that it is assumed that each participant acts independently, without collaboration or communication with any of the others". Ha puesto así encima de la mesa la teoría *no cooperativa* de los juegos, que atraerá la mayor parte de la investigación ulterior.

[18]Kuhn y Nasar (2002) contiene el facsímil de sus 28 páginas.

El ingrediente básico de la nueva teoría es la noción de *equilibrio*, el equilibrio no cooperativo, o, con el tiempo, "de Nash". Sobre el formalismo descrito al principio de esta sección, esto es, la extensión mixta de un juego de n personas en forma estratégica, Nash formula su noción de equilibrio como una generalización del concepto de solución o punto de silla para juegos de dos personas y suma cero antes comentado. Así, un punto de equilibrio es una n-tupla de estrategias mixtas en la que cada una de ellas es una respuesta óptima frente a la configuración que forman las restantes. Más precisamente, es una n-tupla de estrategias mixtas $s = (s_1, ..., s_n)$, tal que si para cualquier estrategia mixta t_i del jugador i denotamos $(s; t_i) := (s_1, .., s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, .., s_n)$, se verifica para todo i

$$p_i(s) = \max_{t_i \in S_i} p_i(s; t_i),$$

donde S_i denota el conjunto de estrategias mixtas del jugador i, y p_i su función de pagos esperados.

Nash demuestra entonces el "resultado" central de su tesis: la existencia de equilibrio en estrategias mixtas en todo juego finito[19]. Nash dio tres demostraciones distintas de este teorema. Previamente a la presentación de su tesis doctoral, en un brevísimo artículo publicado en *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Nash, 1950b) prueba la existencia de equilibrio por medio del teorema de punto fijo de Kakutani. Mientras que en su tesis (Nash, 1950c) y en el artículo en que publica la misma en *Annals of Mathematics* (Nash, 1951) utiliza para ello el teorema de punto fijo de Brouwer. Aquí bosquejaré la prueba que aparece en el último trabajo citado, resultado de mejorar la que aparece en su tesis doctoral y en mi opinión la más atractiva de las tres.

Para ello será necesario un poco de notación. Escribiremos $s_i = \sum_\alpha c_{i\alpha}\pi_{i\alpha}$ con $c_{i\alpha} \geq 0$ y $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1$ para representar la estrategia mixta del jugador i que asigna probabilidad $c_{i\alpha}$ a la estrategia pura $\pi_{i\alpha} \in \Pi_i$, y diremos que s_i *usa* $\pi_{i\beta}$ si $c_{i\beta} > 0$. El conjunto de estrategias mixtas de cada jugador i puede identificarse, pues, con un símplex de dimensión igual al cardinal de Π_i (finito) menos 1. De la linealidad de $p_i(s_1, ..., s_n)$ en cada componente se sigue fácilmente que en una n-tupla de estrategias mixtas la estrategia mixta de un jugador es una respuesta óptima a la configuración que forman las estrategias mixtas de los $n-1$ restantes si y sólo si este jugador usa exclusivamente estrategias puras que son, todas y cada una de ellas, respuestas óptimas a la configuración dada por las $n-1$ estrategias mixtas de los otros. Se asigna entonces a cada n-tupla de estrategias mixtas una nueva n-tupla "corregida" del siguiente modo. Si es un equilibrio se le asigna la misma n-tupla. Si no lo fuese, significaría que algún(os) jugador(es) está(n) usando alguna estrategia pura que no es respuesta óptima a la configuración restante, y quizá no está(n)

[19] Un juego es *finito* si lo es el conjunto de estrategias puras de todos los jugadores.

usando otras que sí lo son. Si es así, “corregimos” las estrategias mixtas de estos jugadores incrementando la probabilidad de aquellas estrategias puras que son mejor respuesta que la estrategia mixta usada en esa n-tupla en forma proporcional a la cuantía de dicha mejora, y a costa de las estrategias puras que no la mejorarían. Obsérvese que un punto fijo de esta aplicación sólo puede serlo si es un equilibrio. Pues bien, no es difícil definir esta “corrección” de modo que la aplicación del producto cartesiano de los conjuntos de estrategias mixtas de los n jugadores en si mismo sea continua. Como este producto cartesiano es un producto de símplices, es compacto y convexo. El teorema de Brouwer asegura entonces que existe un punto fijo para esta aplicación, es decir, un punto de equilibrio.

4. 50 años después

Hasta aquí una presentación sumaria de las dos aportaciones básicas de Nash a la teoría de juegos y la economía, o a la ciencia social en general, vale decir, aunque sean los economistas los que más se han interesado por ellas. ¿Y bien? ¿Hay para tanto? En el apartado en que nos hemos ocupado del problema de negociación, ya hemos comentado la absoluta originalidad de su tratamiento de este tipo de situación. Todavía en un trabajo posterior Nash (1953) reexamina el problema de negociación desde un punto de vista *no cooperativo*, es decir, modelando la situación como un juego no cooperativo en el que los agentes pueden hacer propuestas y amenazas, y en el que la solución ya obtenida desde el enfoque cooperativo resulta ser un equilibrio no cooperativo. De nuevo, otro papel seminal que sienta las bases de lo que después se ha llamado el “programa de Nash”, esto es, el tratamiento no cooperativo de situaciones cooperativas a base de incorporar en el modelo un “protocolo” de negociación en el que uno u otro acuerdo (o “solución” cooperativa) será o no el resultado de equilibrio.

En cuanto a la noción de equilibrio, su aportación fundamental, es de nuevo lo más destacable la capacidad de Nash para captar los elementos esenciales de una situación y darles forma precisa en un modelo simple y claro. En este caso para ir al grano y formular en términos absolutamente nítidos el problema básico que entraña la interacción racional: el resultado de acciones racionales en una situación de interdependencia estratégica en la que todos los participantes, igualmente racionales, comparten la información que se incluye en el modelo debería ser un equilibrio. Si no fuera así es que alguien no ha hecho lo mejor que podía hacer, lo que no es consistente con la idea de racionalidad. Una vez formulada simple y claramente, la idea parece obvia. Pero, como el trabajo de los cincuenta años posteriores ha mostrado, la inocente noción estaba preñada de preguntas cuya sola formulación entraña una mejor comprensión de esta clase de situaciones. Habiendo, como puede haber, no uno sino muchos y diversos equilibrios, ¿cómo se llega a alguno de ellos, y por qué no a otros?, ¿son todos los equilibrios igual de razonables?, ¿cómo es que a veces no se llega a ninguno y sin embargo es así mejor para todos?, ¿qué pasa con el tiempo, dejado fuera del modelo?, ¿cuál es el papel de la información?, ¿qué pasa si no todos los jugadores saben todo sobre la situación en la que están inmersos? Todas estas y otras preguntas han dado que hacer todos estos años (entre otros a sus compañeros de Nobel, Harsanyi y Selten) y aún hoy día lo siguen dando.

Aunque separar una cosa de otra carezca de sentido, creo que merece la pena subrayar que es la noción misma de equilibrio la más valiosa aportación de Nash en su tesis, con independencia del resultado de existencia que la completa. Aunque parezca insensato decir que sin el resultado de existencia la noción sería igualmente interesante, un ejemplo puede valer para apoyar tan aparentemente peregrina afirmación: el teorema de imposibilidad de Arrow, premio Nobel de Economía en 1972, es un resultado negativo (algo que parece razonable, no existe) que es el punto de partida de la teoría de la elección social. En las dos contribuciones brevemente glosadas en las páginas anteriores hay que insistir en un aspecto que ya se ha comentado en relación con el problema de regateo: la simplicidad de la construcción formal. En ambos casos el genio matemático de Nash se muestra *no* en la complejidad técnica de los recursos formales puestos en juego[20], sino en la frescura y capacidad de abstracción para captar lo esencial de una situación y expresarlo con claridad, simplicidad y rigor.

Deliberadamente he huido de una presentación descarnada de concepto y sólo "apta para matemáticos"[21], y he intentado respetar el estilo original de Nash, claro y sencillo, y no excesivamente formalista aunque preciso, atento siempre al sentido de lo que formalmente va incorporando en el modelo. Otra cosa sería contribuir a la confusión en que parece sumida buena parte del quehacer investigador en el tratamiento formal de las ciencias sociales, donde a menudo el afán de utilizar a toda costa un tecnicismo barroco prevalece sobre el sentido. Si la falta de rigor en el uso de las matemáticas en ciencias sociales ha sido a menudo criticada, en el otro extremo no es raro el ejemplo lamentable de artículos conceptualmente vacíos bajo un ropaje de ahuecada complejidad matemática. Frente a tales despropósitos, el trabajo de Nash sigue siendo hoy un hito inigualado y una lección llena de actualidad. Si he conseguido despertar

[20] Al parecer von Neumann, también matemático, desechó como "trivial" el "resultado" de Nash: "another fixed point theorem", parece que fue su comentario (Kuhn y Nasar, 2002).

[21] Creo que fue Bertrand Russell el que dijo que las matemáticas son la única ciencia en la que se puede hablar con absoluta precisión sin saber de qué se habla. Desafortunadamente algunos supuestos científicos sociales creen poder hacer esto en su terreno.

la curiosidad de algún lector por leer los trabajos de Nash habrá merecido la pena el trabajo de escribir estas notas.

Referencias

[1] A. Cournot, 1838, *Recherches sur les principes matémathiques de la théorie des richesses*, Libraire des sciences politiques et sociales, M. Rivière & cie, París.

[2] F.Y. Edgeworth, 1881, *Mathematical Psychics*, Kegan Paul, Londres.

[3] H.W. Kuhn y S. Nasar (editores), 2002, *The essential John Nash*, Princeton University Press.

[4] S. Nasar, 1998, *A beautiful mind*, Simon & Schuster, New York.

[5] J.F. Nash, 1950a, The Bargaining Problem, *Econometrica* **18**, 155-162.

[6] J.F. Nash, 1950b, Equilibrium Points in n-Person Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36**, 48-49.

[7] J.F. Nash, 1950c, *Non-Cooperative Games*, Ph. D. dissertation, Princeton University.

[8] J.F. Nash, 1951, Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics* **54**, 286-295.

[9] J.F. Nash, 1953, Two-Person Cooperative Games, *Econometrica* **21**, 128-140.

[10] J. Von Neumann, 1928, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Annalen* **100**, 295-320.

[11] J. Von Neumann y O. Morgenstern, 1944, *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press.

Federico Valenciano
Departamento de Economía Aplicada IV
Universidad del País Vasco
48015 Bilbao
Correo electrónico: `elpvallf@bs.ehu.es`