Historia

Sección a cargo de

Antonio J. Durán

La sección de **Historia de La Gaceta** comienza su andadura con los objetivos y filosofía siguientes.

FILOSOFÍA: Se trabajará con la certeza de que en matemáticas los temas de historia van más allá de la mera anécdota o del interés cultural, pudiendo llegar a ser decisivos para un enfoque adecuado de la enseñanza de las matemáticas.

OBJETIVOS: Se publicarán artículos sobre aspectos y temas históricos relacionados con las matemáticas que puedan resultar interesantes al colectivo de la RSME. Aunque no se pretende que el artículo suponga una novedad con respecto a lo que se puede encontrar en la bibliografía, sí se exigirá una cierta originalidad en la presentación, en el enfoque o en las apreciaciones sobre el tema en cuestión. No serán admitidos artículos que supongan una repetición o reiteración sobre el tema con respecto a lo ya publicado. Si estás interesado en colaborar con esta sección envía tu artículo a:

Antonio J. Durán
Sección de Historia RSME, Dpto. Análisis Matemático,
Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,
Aptdo. 1160, 41080 Sevilla

Sobre la Historia del Concepto Topológico de Curva

por

Juan Tarrés Freixenet

INTRODUCCIÓN

En su famoso libro *Grüdzuge der Mengenlehre*, de 1914, **Hausdorff** afirma:

"No damos ninguna definición de curva; los conjuntos a los que convenimos dar este nombre son de naturaleza tan heterogénea que no encajan en ninguna definición de carácter general".

Ya en 1897, en el *I Congreso Internacional de Matemáticos*, **Adolf Hurwitz** había propuesto algunas cuestiones al respecto, indicando la conveniencia de dar respuesta adecuada a preguntas tales como:

¿Qué es una curva?

¿Qué es una curva simple cerrada?

¿Qué es una curva cerrada en general?

¿Son todas las curvas cerradas, o sólo algunas de ellas, las que son admisibles en el *Teorema de Cauchy?*

De hecho, estas dudas acerca del concepto de curva venían de antiguo pero en esa época el detonante había sido, sin duda, la aparición de algunos ejemplos de curvas patológicas, y básicamente, la llamada *curva de Peano.*

Por supuesto, la problemática planteada a propósito de las curvas puede extenderse al concepto de superficie. Ambos están vinculados a la dificultad de dar definiciones matemáticamente aceptables de un concepto tan intuitivamente claro como es el de *continuo.*

En 1693, en su *Tractatus de Quadratura Curvarum*, **Isaac Newton** plantea esta cuestión cuando afirma:

"No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos..."

Y **D' Alembert**, en la *Enciclopedia Metódica. Matemáticas* (1784-1789) se ocupa también de estas cuestiones cuando en su artículo *Punto* dice:

"*Sólo existen realmente los sólidos tridimensionales; los puntos, las líneas y las superficies existen por abstracción y son bordes de las figuras respectivas, una unidad superior en dimensión*"

Otros autores se ocuparon de estos conceptos durante el siglo XVIII, aunque algunos de ellos lo hicieron desde una perspectiva más filosófica, al considerar que nociones como *curva, superficie y continuo* debían establecerse sin tener en cuenta ninguna idea ajena a ellas mismas y, por supuesto, excluyendo cualquier mención a la idea de movimiento.

Tal es el caso de **A.G. Baumgarten** quien, en su obra titulada *Metaphisica* afirma:

"*Una serie de puntos con puntos intermedios que da lugar a una línea es un continuo...*"

Afirmación un tanto ambigua, pues supone establecido el concepto de línea para dar el de continuo, lo que, hasta cierto punto, parece una contradicción, ya que, por otra parte, da la sensación de que identifica ambos conceptos.

Una visión más matemática es la que da **A.G. Knäster** al decir:

"*Una cantidad continua es algo cuyas partes están conectadas de tal forma que, al detenerse, otras comienzan inmediatamente y entre un extremo y otro no hay ninguna que no pertenezca a esta cantidad*".

Obser vemos que esta definición de continuo (o cantidad continua) sugiere una idea un tanto imprecisa de línea como conjunto de puntos situados unos próximos a otros de tal manera que entre ellos no puede haber fisuras. Es decir, se plantea, tal vez sin tener conciencia de ello, la necesidad de buscar una estructura interna en determinados "conjuntos de puntos" que nos indique una idea de "proximidad" entre ellos.

Las ideas de B. Bolzano

Surge entonces la figura de **Bernhard Bolzano** (1781-1848), profesor en Praga y que, junto a una gran base matemática, presentaba una excelente formación filosófica y teológica. Por este motivo, **Bolzano** considera de las matemáticas lo que éstas tienen de especulativo y, en consecuencia, no debe extrañarnos su obsesión por el rigor a la hora de establecer definiciones y dar demostraciones de los resultados obtenidos.

Nos detendermos un poco a analizar sus logros en el campo de la Geometría, pues fue él el primero en dar la clave de una posible definición "topológica" del concepto de línea.

La dedicación de **Bolzano** a temas geométricos se circunscribe a los primeros años de su actividad científica y a los últimos de su vida.

Sus obras al respecto son:

1. *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* (1804)

2. *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänslichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt* (1817)

3. *Über Haltung* (1843)

4. *Geometrische Begriffe* (1844)

Asimismo, se pueden encontrar referencias geométricas en su obra póstuma *Paradoxien des Unendlichen* (1851).

En todas ellas se establece como objetivo prioritario dar definiciones intrínsecas y rigurosas de los conceptos de curva, superficie, cuerpo sólido y continuo. Un primer paso para ello aparecerá ya en el *Betrachtungen...* de 1804, en donde se da un concepto de *distancia* entre dos puntos del espacio. Su obsesión por no hacer uso de nociones ajenas a los conceptos considerados le impide dar una definición de esta noción en la que a cada par de puntos se asocie un número, lo que simplificaría las cosas de manera considerable. Por el contrario, sus ansias de generalidad hacen que la definición dada sea poco menos que incomprensible:

"Lo que se asocia al punto **b** *en relación con el punto* **a**, *de manera que es independiente del punto* **a** *(que es exactamente éste y no otro); es decir, lo que podría estar en relación con otro punto, por ejemplo* **c**, *recibe el nombre de* **distancia** *del punto* **b** *tomada desde* **a**".

Pese a todo, **Bolzano** va a utilizar su "distancia" entre pares de puntos pensando (sin decirlo) que "lo que se asocia" a los puntos **a** y **b** es, en realidad, un número.

En esta línea de actuación, en *Die drey Probleme...* da la siguiente definición:

"Entendemos por ***vecino*** *de un punto a otro punto de la intersección del objeto espacial considerado con la superficie de una esfera cuyo centro es el punto de referencia y su radio coincide con la distancia dada"*

Fijémonos en que **Bolzano**, con este concepto, acaba de fijar la noción de *bola métrica*. No obstante, al considerar como "vecinos" los puntos situados exactamente a una determinada distancia del punto dado le va a llevar a ciertas contradicciones y hará que haya que esperar 89 años hasta que, en 1906, **M. Fréchet** dé su definición de espacio métrico abstracto.

Pero en lo que concierne a nuestros objetivos, en estas primeras obras geométricas, **Bolzano** presenta una (¿primera?) definición intrínseca de *curva*:

"Un objeto espacial con la propiedad de que todo punto del mismo tiene exactamente un número finito de puntos vecinos correspondientes a cada distancia menor que una distancia dada recibe el nombre de **línea**".

Claramente, aquí sí se tienen en cuenta los números como "soporte" del concepto de distancia, y todavía más si se observan las ilustraciones que da el propio **Bolzano**:

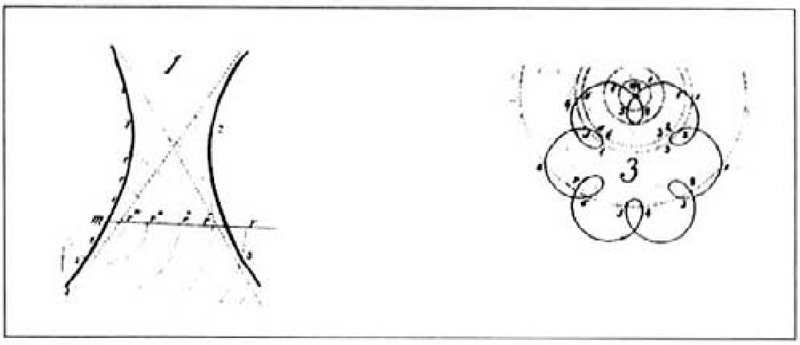

Figura 1

Además, es asombrosa la intuición de **Bolzano**, que parece acertar en las claves del concepto topológico de curva o línea. Claro que su definición es imperfecta, pues, por ejemplo, figuras como la que aparece a continuación puede considerarse una "curva" y, en cambio, no verifica la definición dada anteriormente:

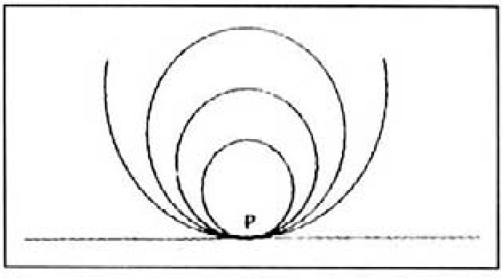

Figura 2

Estas anomalías quedaron corregidas en sus dos últimas obras de Geometría de 1843 y 1844:

"*Llamo a una extensión tal que cada punto tiene solamente algunos puntos vecinos para cada distancia suficientemente pequeña, de manera que el conjunto de ellos, considerado en sí mismo para cada una de las distancias, no constituye una extensión, objeto espacial simple o* **línea**".

Hay que interpretar la frase "no constituye una extensión" como que dicho conjunto de puntos no es "conexo" en algún sentido (probablemente, el más intuitivo).

También en estos dos libros aparece una primera definición de la noción de *curva cerrada:*

"*Una línea simple cerrada es aquella en la que cada punto tiene* **dos** *puntos vecinos, pero ningún punto posee vecinos para toda distancia mayor que una distancia dada*".

Es éste un claro ejemplo de mala definición. Hay que aclarar que cuando habla de "dos puntos vecinos" se refiere a distancias suficientemente pequeñas. No obstante, el intervalo abierto (0,1) se ajusta a esta definición y, por supuesto, no es una curva cerrada.

Defectos como éste obligan a **Bolzano** a modificar esta última definición en un apéndice del *Geometrische Begriffe*, en donde se da una versión corregida de la misma:

"*Diremos que una línea es cerrada si:*

1. *La distancia entre dos puntos de la misma no puede superar una cantidad dada.*
2. *Todo punto tiene dos vecinos para distancias suficientemente pequeñas.*
3. *No se puede añadir a dicha línea ningún punto o conjunto de puntos que no formen una línea sin que el conjunto resultante deje de ser una línea y siga teniendo puntos vecinos para cada distancia suficientemente pequeña.*

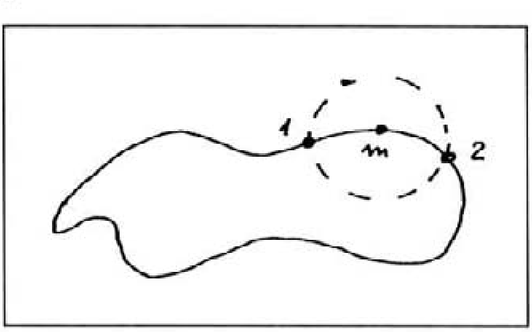

FIGURA 3

La definición anterior exige que la línea sea simple, pues una curva tal como la de la figura 3 cumple los requisitos de la definición.

Pero, sin embargo, si la curva no es simple, la definición no queda satisfecha:

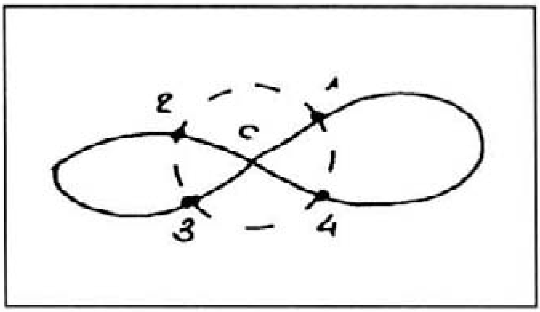

Figura 4

En consecuencia, hay que rectificar de nuevo la definición, exigiendo que en las condiciones (2) y (3) aparezca la frase "*un número par de puntos vecinos*". Con todo, todavía surge un inconveniente: dos líneas separadas como las de la figura 5 no forman una curva cerrada y, en cambio, cumplen las condiciones de la definición:

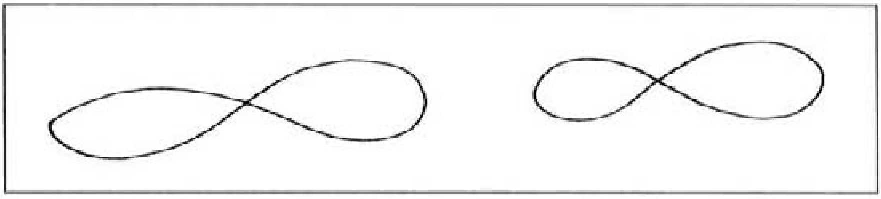

Figura 5

Esta anomalía se puede subsanar sin dificultad (y así lo hace **Bolzano**) mediante la definición siguiente:

"*Diremos que una línea es* **cerrada** *y* **conexa** *si ninguna parte de la misma que sea ya una línea cerrada se puede suprimir sin que la parte restante deje de ser una línea cerrada*".

En *Geometrische Begriffe*, **Bolzano** formula el siguiente teorema, que da sin demostración, y en el que se involucran las nociones de curva y superficie:

"*Toda curva simple cerrada contenida en una superficie divide a ésta en dos partes, que se distinguen entre sí por el hecho de que todos los puntos de la superficie que no pertenecen a la línea están a un lado de ésta o en el lado opuesto*".

Este enunciado es, precisamente, el que dará **C. Jordan** cuarenta años más tarde al establecer su famoso "Teorema de la Curva", pero este último se restringe al plano y no a una superficie cualquiera, ya que en este caso más general el teorema es evidentemente falso. Basta considerar para ello la superficie de un toro y la curva C de la figura 6:

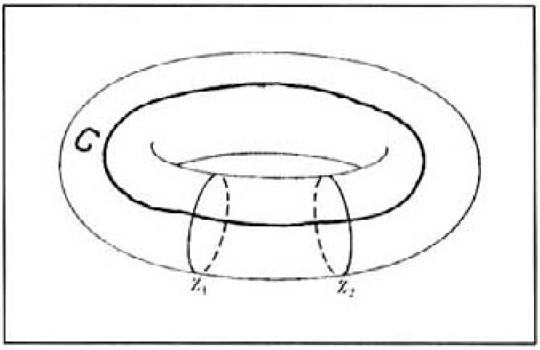

FIGURA 6

El concepto de *superficie* que manejaba **Bolzano** entra en la misma filosofía que el que había dado de curva:

"Un objeto espacial con la propiedad de que cualquiera de sus puntos tiene exactamente un número finito de líneas separadas completas de puntos vecinos, correspondientes a cada distancia menor que una distancia dada, recibe el nombre de **superficie**".

Definición que da una verdadera idea del carácter inductivo del concepto de dimensión para espacios abstractos, cuestión que **Bolzano** había captado perfectamente.

La actividad geométrica de **Bolzano** en relación con los conceptos de curva y superficie no se limitó a dar buenas definiciones de estos conceptos. Entre los años 1830 y 1834 dio un ejemplo de una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ninguno de ellos. La función queda descrita por su gráfica, y esta descripción viene dada a través de una construcción de tipo iterativo que da lugar a una curva, obtenida como límite de líneas poligonales. Este proceso resulta sorprendente para la época en que tuvo lugar, aunque hoy en día sean habituales este tipo de construcciones en el tratamiento de determinadas curvas fractales, como las curvas de **Koch, Besikovitch, Sierpinski, Menger,** etc.

Esta curva se construye como sigue:

Sea PQ, un segmento rectilíneo, y considérese una dirección d, distinta de la de PQ. Dividamos PQ por su punto medio M y tomemos los puntos P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 tales que $PP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3M = MQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q$.

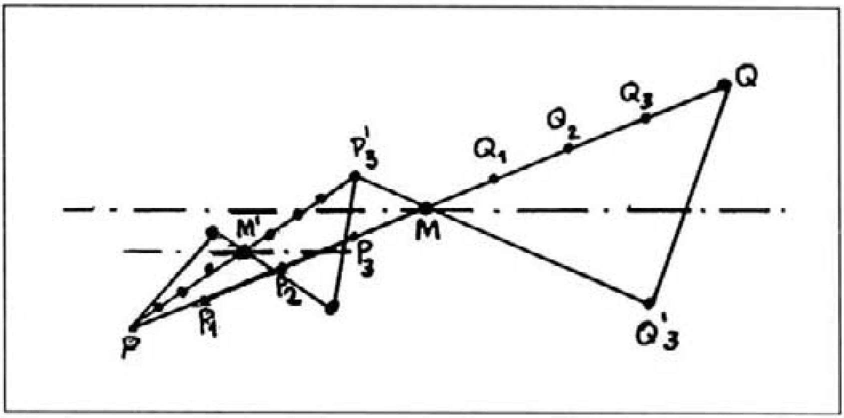

FIGURA 7

Si P'_3 y Q'_3 son los simétricos de P_3 y Q_3 respectivamente con respecto a la recta r, paralela a la dirección d por el punto M, formamos la línea poligonal $PP'_3Q'_3Q$ y repetimos el proceso en cada uno de los cuatro lados de esta poligonal, y así sucesivamente. El límite de estas líneas es la curva buscada.

LOS HIPERESPACIOS

Desgraciadamente, los trabajos de **Bolzano** quedaron olvidados rápidamente y sus ideas tuvieron que esperar largo tiempo antes de ser redescubiertas, ya en el siglo XX. No obstante, a mediados del siglo XIX había una corriente muy fuerte que propugnaba el establecimiento de definiciones que permitieran el uso de espacios de dimensión superior a tres y el desarrollo de una geometría en los mismos que generalizara la desarrollada en el espacio físico tridimensional.

Aunque el primer matemático importante que tomó en consideración esta cuestión a lo largo de la primera mitad del siglo fue **Carl Friedrich Gauss**, las primeras definiciones rigurosas de tales espacios debemos atribuirlas a **Hermann Grassmann** (1809-1877) y **Bernhard Riemann** (1826-1866).

El primero de ellos publicó un libro en 1844, titulado *Die Lineale Ausdenungslehre*, en el que se desarrolla la que su autor denomina *Teoría de la Extensión* al mismo tiempo que expresa que tal teoría va más allá que la propia geometría en su concepción del espacio:

"Mi teoría de la extensión constituye la base de la teoría del espacio; es decir, es una ciencia matemática pura independiente de cualquier intuición espacial, cuya principal aplicación al espacio es la Geometría"

"Así, los teoremas de la geometría tienden siempre a la generalización, pero en virtud de su limitación a tres dimensiones, tal generalización no puede llevarse a cabo; esto es posible en la teoría de la extensión".

Dentro de este contexto, **Grassmann** da una definición de línea, o *extensión-forma de primer orden* que recuerda las primeras ideas de **Newton**:

"Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos en el cual un elemento generador pasa a través de un cambio continuo..."

Este concepto implica, como vemos, una noción de "cambio continuo" e implica tener que recurrir a nociones externas para el establecimiento de la propia definición. Sin embargo, lleva consigo el notable avance de desligar el concepto de línea, o curva, de la intuición determinada por el espacio físico tridimensional. Esto lo pretendía también **Bolzano** al dar su definición de distancia. Tal vez, si se hubieran coordinado los esfuerzos de ambos se hubiera podido llegar más rápidamente a conclusiones científicamente aceptables.

En la misma línea de **Grassmann** está **Riemann** quien, en su famoso *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, de 1854, se ocupa también de los espacios de dimensión arbitraria y establece:

"El verdadero carácter de una variedad unidimensional (curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie),..."

Está claro que, además de hablar de unos determinados espacios abstractos como son las variedades, **Riemann** había captado, igual que lo habían hecho **Bolzano** y **Grassmann**, el carácter inductivo de la dimensión de las figuras. Realmente, estos trabajos representan una auténtica revolución acerca de la idea del espacio así como de los elementos contenidos en el mismo, a los que no es ajeno, por supuesto, el concepto de curva, que a partir de ahora habrá que tratar desde un punto de vista mucho más general.

ALGUNAS IDEAS DE G. CANTOR

En las décadas de los años 1870 y 1880 surge con gran fuerza la figura de **Georg Cantor** (1845-1918) que entre los años 1879 y 1884 publicó, como es bien sabido, una serie de seis artículos en los Mathematische Annalen bajo el título *Über unendliche lineaire Punktmannichfaltigkeiten* (Sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos) en los que fija las bases de la "topología" de los conjuntos del espacio euclídeo de dimensión n. En estos trabajos se encuentran sus definiciones de punto de acumulación de un conjunto, conjunto derivado, punto aislado, punto interior, etc. y en particular una definición de *continuo*, concebido como un conjunto perfecto, o conjunto que coincide con su conjunto derivado, que está bien encadenado, noción esta última que está estrechamente ligada a la de conjunto conexo y que, en un espacio euclídeo, es equivalente a ella cuando se trata de conjuntos compactos.

En la obra de **Cantor** podemos encontrar también una definición de curva plana:

"*Una curva plana es un continuo sin puntos interiores*"

Este concepto recibirá, ya en los primeros años del siglo XX, el nombre de *línea cantoriana*, objeto de consideración y estudio a cargo de matemáticos del prestigio de **L. Zoretti**, **A. Schoenflies**, **W. Sierpinski** o **P. Urysohn**.

Sin embargo, a finales de los años 1870 surge una profunda crisis acerca de los conceptos de curva y superficie y, en general, de la idea de dimensión de las figuras, al probar **Cantor** que los puntos de un segmento podía ponerse en correspondencia biunívoca con los de un cuadrado y, en general, con los de un cubo n-dimensional. Esta "paradoja" obligó a plantearse la revisión de la noción de dimensión de los objetos geométricos.

LA CURVA DE PEANO

Los matemáticos de finales del siglo XIX que hicieron las aportaciones más relevantes al campo de la teoría de curvas fueron, sin ningún género de dudas, **Camille Jordan** (1838-1922) y **Giuseppe Peano** (1858-1932).

Las ideas de **Jordan** están contenidas en su *Cours d'Analyse*, obra en tres tomos cuya primera edición apareció en 1882. En una nota al final del tercer volumen se encuentra su famoso *Teorema de la curva:*

"*Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito*"

Se define una curva plana C como una sucesión de puntos representados por las ecuaciones:

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Aquí, f y g son funciones del parámetro t. Además:

1. Si son continuas se dice que C es una *curva continua.*
2. Si tienen un periodo común, C es una *curva cerrada*
3. Si existen $t \neq t'$ con $f(t) = f(t')$ y $g(t) = g(t')$ y además, la curva es cerrada, diremos que C tiene *puntos múltiples.*

Parecía que con esta definición se había asestado un golpe definitivo al problema de la definición de la noción de curva. No obstante, en ella no se aprecia carácter inductivo alguno, por lo que no resulta sencillo generalizar esta idea a la definición de superficie y otros objetos de dimensión superior.

No fue necesario plantearse esta última cuestión desde este punto de vista ya que la definición de curva dada por **Jordan** sufrió un durísimo golpe en 1890 de la mano de **Giuseppe Peano** quien, en un artículo titulado *Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine* define una curva continua que recubre todos los puntos de un cuadrado; es decir, la imagen geométrica de la misma tiene dimensión dos.

La descripción dada por **Peano** es analítica y no da ningún método que permita "representar" su curva. Considera el sistema ternario de numeración y denomina "cifra" a cada uno de los números $\{0,1,2\}$. Para toda sucesión de cifras $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ se escribe:

$$T = 0, a_1a_2a_3...$$

Por otra parte, dada una cifra a se define:

$$\begin{aligned} Ka &= 2 - a \\ K^n a &= K(K^{n-1}a) \end{aligned}$$

Se cumple entonces:

1. $Ka = b \Longleftrightarrow Kb = a$
2. $Ka \equiv a$ (mód. 2)
3. Si n es par, $K^n a = a$; si n es impar, $K^n a = Ka$

Ahora, a

$$T = 0, a_1a_2a_3 \cdots$$

se asocian las sucesiones:

$$\begin{array}{ll}
X = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots & Y = 0, c_1 c_2 c_3 \cdots \\
b_1 = a_1 & c_1 = K^{a_1} a_2 \\
b_2 = K^{a_2} a_3 & c_2 = K^{(a_1+a_3)} a_4 \\
b_3 = K^{(a_2+a_4)} a_5 & c_3 = K^{(a_1+a_3+a_5)} a_6 \\
\vdots & \vdots \\
b_n = K^{(a_2+\cdots+a_{2n-2})} a_{2n-1} & c_n = K^{(a_1+\cdots+a_{2n-1})} a_{2n} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Asimismo, se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
a_1 = b_1 & & a_2 = K^{b_1} c_1 \\
& a_4 = K^{(b_1+b_2)} c_2 & \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
& a_{2n-1} = K^{(c_1+\ldots+c_{n-1})} b_n & \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
& a_3 = K^{c_1} b_2 \\
a_5 = K^{(c_1+c_2)} b_3 & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
a_{2n} = K^{(b_1+\ldots b_n)} c_n & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Es decir, T determina el par (X, Y) y recíprocamente. Para $T = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ llamamos:

$$t = val(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

Se cumple que $0 \leqslant t \leqslant 1$; es decir, T es la expansión triádica del número t. Tenemos también que si $val(T) = val(T')$ y T y T' llevan asociados los pares de sucesiones (X, Y) y (X', Y') respectivamente, entonces,

$$val(X) = val(X') \quad val(Y) = val(Y')$$

Tenemos así una aplicación (suprayectiva pero no inyectiva) del intervalo unidad $I = [0, 1]$ en el cuadrado I^2, dada de manera que a cada número $t \in I$ le corresponde el punto (x, y) de I^2 determinado de tal forma que si es $t = val(T)$ y T va asociado al par (X, Y) entonces es $x = val(X)$, $y = val(Y)$. Se prueba también que esta aplicación es continua.

Esta curva despertó inmediatamente un enorme interés entre los matemáticos, pues era el primer "monstruo" que surgía en este contexto y no tardaron en aparecer varios trabajos referidos a la misma. Así, en 1891,

D. Hilbert publicó un artículo en los Mathematische Annalen en el que se da un método que permite "visualizar" el proceso de construcción de una curva como la de **Peano**, y que se obtiene como límite de líneas poligonales, igual que la **curva de Bolzano**, ya considerada.

Para cada valor de n se divide el intervalo unitario $I = [0,1]$ en 4^n intervalos I_n de longitud 4^{-n}, y el cuadrado I^2, en 4^ncuadrados S_n de lado 2^{-n}. Se establece una correspondencia biyectiva entre los intervalos I_n y los cuadrados S_n de manera que:

1. A intervalos adyacentes corresponden cuadrados también adyacentes.
2. A los cuatro intervalos I_{n+1} de I_n corresponden los cuatro cuadrados S_{n+1}de S_n.

Así, a toda sucesión infinita decreciente de intervalos $\{I_n\}$ se le asocia otra $\{S_n\}$ de las mismas características. Si $T(I_n)$ es el número real definido por la sucesión $\{I_n\}$, y $Z(S_n)$, el punto del plano determinado por $\{S_n\}$, podemos plantear una correspondencia continua entre cada número $T(I_n)$ y el punto (S_n), de tal forma que cuando $T(I_n)$ recorre todo el intervalo $I = [0,1]$, $Z(S_n)$ completará todo el cuadrado I^2.

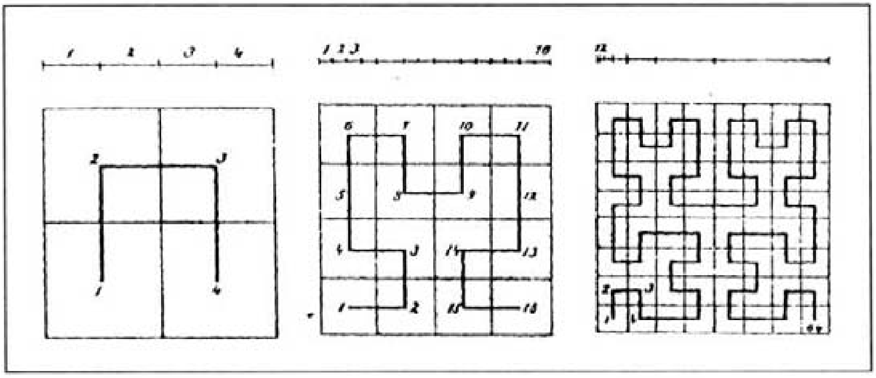

FIGURA 8

En 1897, el matemático italiano **E. Cesàro** dio una expresión analítica para una curva de este tipo, dada de tal forma que si es:

$$f_n(t) = ([3^n t] - 3.[3^{n-1}t] - 1).(-1)^{[3t]+[3^2t]+\ldots+[3^{n-1}t]}$$

la curva en cuestión se puede representar por las ecuaciones:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}.f_{2n-1}(t) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}.f_{2n}(t)$$

Existen otras construcciones de la **curva de Peano**. Una muy notable es la dada por **E.H. Moore** en 1900 en un artículo (*On certain crinkly curves*) en el que se hace un estudio my detallado de la construcción de **Hilbert** y se propone una del mismo estilo cuya "visualización" conserva los llamados "puntos nodales" en el límite.

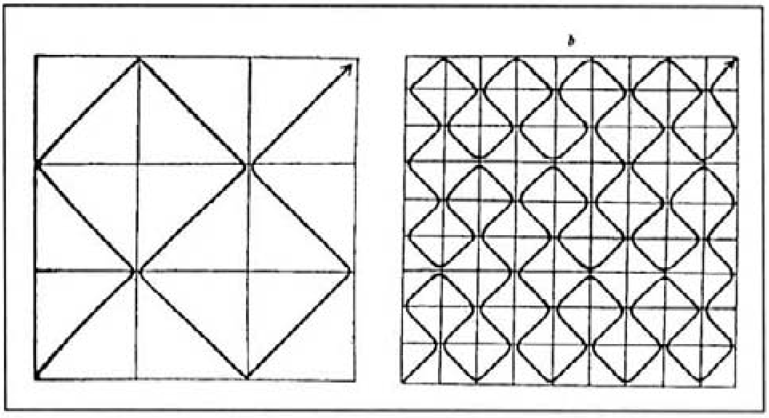

FIGURA 9

LAS NUEVAS DEFINICIONES

Se hace preciso pues revisar la noción de curva. En 1905, **Oswald Veblen** propone una definición axiomática de *curva simple* que, finalmente, resulta ser equivalente a la dada por **Jordan**. También en 1905, **L. Zoretti**, y en 1908, **A. Schoenflies**, toman la antigua definición de **Cantor** y establecen el concepto de *línea cantoriana* como un continuo plano sin puntos interiores.

La definición de **Zoretti** y **Schoenflies** va a calar hondo ya que, de una parte, es una definición intrínseca, y por otra, maneja los conceptos cantorianos de continuo y punto interior, nociones básicas en una teoría topológica de los espacios abstractos, en plena gestación en aquellos años. Dentro de este contexto, destaquemos la construcción realizada por **W. Sierpinski** en 1916, en la que se define una curva (la *alfombra de Sierpinski*) que resulta ser un continuo cantoriano localmente conexo que, además, es universal para todas las líneas de Cantor.

En junio de 1921, el matemático ruso **D. F. Egorov** propone al joven **P. Urysohn** las dos cuestiones siguientes:

1. Dar una definición topológica intrínseca de curva cuya restricción al plano sea equivalente al concepto de *línea cantoriana*.

2. Dar una definición del mismo tipo que englobe una colección suficientemente amplia de conjuntos conocidos habitualmente como *superficies*.

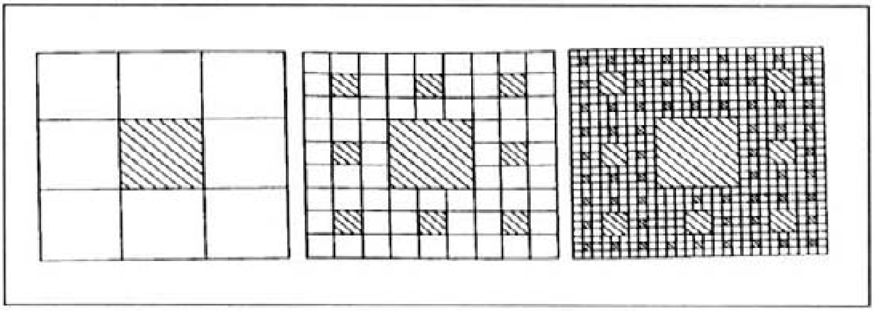

FIGURA 10

En agosto del mismo año, **Urysohn** comunica a su maestro una solución a ambos problemas, solución que incluye una definición general de dimensión para espacios métricos compactos:

1. Sean C, un conjunto, y $x \in C$. La descomposición:

$$C = A \cup B \cup C$$

en conjuntos disjuntos dos a dos es una ϵ-separación de x si:

i) $x \in A$
ii) Los conjuntos A y C están separados
iii) $A \cup B \subset B_\epsilon(x)$

2. Si para todo $\epsilon > 0$ el punto $x \in C$ puede ser ϵ-separado por el conjunto vacío diremos que x tiene dimensión cero respecto a C:

$$\dim_x(C) = 0$$

3. Si todos los puntos de C tienen dimensión cero respecto a C, se dice que este conjunto tiene dimensión cero:

$$\dim(C) = 0$$

4. Un punto $x \in C$ que no sea de dimensión menor que n respecto a C y tal que para todo $\epsilon < 0$ existe una ϵ-separación B de x de dimensión menor que n, es un punto de dimensión n respecto a C:

$$\dim_x(C) = n$$

5. $\dim(C) = n$ si $\dim_x(C) = n$ para todo $x \in C$.

Define entonces **Urysohn** una curva como *un continuo de dimensión uno*. Estos resultados se publicaron en versión abreviada en los *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* el mismo año 1921, y en versión completa en los dos trabajos póstumos (recopilados por su amigo **P. Alexandroff**, tras la muerte en accidente de **Urysohn**) en la revista *Fundamenta Mathematicae* en los años 1925 y 1926 bajo el título *Memoire sur les Multiplicités Cantoriennes*.

Al mismo tiempo que **Urysohn**, en Viena, **K. Menger** daba otro concepto de dimensión topológica que resulta ser equivalente al de **Urysohn** en los espacios métricos separables, y que surge de una manera parecida al caso de este último.

En 1920, **H. Hahn** estaba dando un Seminario en la Universidad de Viena y propuso el problema de dar una definición adecuada del concepto de curva. De forma casual, el joven **Menger** (que contaba entonces 17 años) asistió a aquella sesión del seminario y se hizo eco de la propuesta. Una semana más tarde llamaba a la puerta del Profesor **Hahn** para presentarle una solución:

> "*Una curva es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos*".

¡Sorpresa! ¡Hacía más de un siglo que **Bolzano** había dicho exactamente lo mismo! la solución dada por **Menger** interesó mucho a **Hahn**, quien la elaboró para darle una aspecto más formal y se dio esta versión revisada de la definición:

> "*Un continuo K recibe el nombre de curva si en cada entorno U de cualquier punto p de K existe un entorno U', contenido en U, de manera que la intersección del borde de U' con K no contiene conjuntos conexos*".

Los trabajos de **Menger** se publicaron los años 1923 y 1926 en la revista *Monatschefte für Mathematik und Physik* en una serie de dos artículos titulados *Über die Dimensionalität von Punktmengen*. En 1928, el propio **Menger** recogió sus resultados en el libro *Dimensionstheorie*, en donde se establece lo que desde entonces se conoce como *Teoría de la Dimensión Topológica*.

Conforme a las teorías de **Menger**, todas las curvas del espacio euclídeo tridimensional pueden sumergirse mediante homeomorfismos en la llamada *curva de Menger*, conocida también como la *esponja de Menger*, que, como es bien sabido es uno de los modelos habituales de curvas fractales (Fig. 11)

El concepto de dimensión que se adoptó formalmente en un principio es el dado por **Menger**, aunque como ya hemos señalado, es equivalente a la definición de **Urysohn** en determinados tipos de espacios; posteriormente, se han dado otras definiciones de dimensión. De esta manera, objetos geométricos como las curvas quedan inmersos, desde el punto de vista topológico, dentro de esta teoría más general, con la salvedad de que se les exige la condición de ser continuos topológicos.

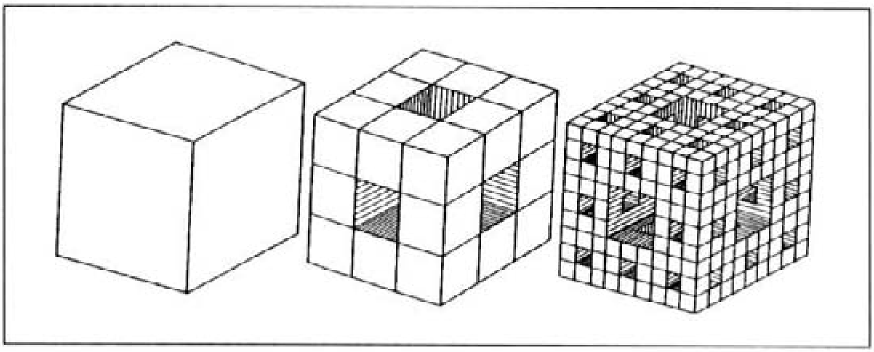

FIGURA 11

Referencias

[1] CANTOR, G. "Sur les Ensembles Infinis Linéaires de Points". *Acta Mathematica* **2** (1883), 349-380, 381-408, 409-414.

[2] CESÀRO, E. "Sur la Representation analytique des régions et des courbes qui les rempliessent". *Bull. des Sciences mathématiques* (2nd. sér.) **21** (1897), 257-266.

[3] DAUWEN, J.W. "The Invariance of Dimension: Problems in the Early Development of Set Theory and Topology". *Historia Mathematica.* **2** (1975), 273-288.

[4] DAUWEN, J.W. "El Desarrollo de la Teoría de Conjuntos Cantoriana". En "Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una Introducción Histórica". Compilación de I. Grathan-Guinness. Alianza Universidad. Madrid. 1984.

[5] DIEUDONNÉ, J. *Abrégé d'Histoire des Mathématiques: 1700-1900.* Vol. II. Hermann. Paris. 1978.

[6] FRÉCHET, M. "Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **22** (1906), 1-74.

[7] HILBERT, D. "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück". *Mathematische Annalen* **38** (1891), 459-460.

[8] JOHNSON, D.M. "Prelude to Dimension Theory: The Geometric Investigations of Bolzano". *Archiv. Hist. Exact Sciences* **17** (1977), 261-295.

[9] JOHNSON, D.M. "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology". Part I. *Archiv. Hist. of Exact Sciences* **20** (1979), 97-188. Part II. Ibid. **25** (1981), 85-267.

[10] MANHEIM, J.H. "The Genesis of Point Set Topology". *Pergamon Press.* London. 1964.

[11] MOORE, E.H. "On Certain Crinkly Curves". *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **1** (1900), 72-90.

[12] MENGER, K. "Über die Dimensionalitätvon Punktmengen". *Teil I. Monat. Math. und Phys.* **33** (1923), 148-160. Teil II. Ibid. **24** (1926), 137-161.

[13] OSGOOD, W. "A Jordan Curve of Positive Area". *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **4** (1903), 107-112.

[14] PEANO, G. "Sur une Courbe qui Remplit Toute une Aire Plaine". *Math. Annalen* **36** (1890), 157-160.

[15] TARRÉS, J. "Historia de la Teoria de la Dimensió". *Soc. Cat. de Ciències. Butll. Secc. Mat.* **17** (1984) 94-114.

[16] TARRÉS, J. "Historia de la Teoría de la Dimensión". En "Seminario de Historia de la Matemática I". Fac. de Ciencias Matemáticas. Univ. Complutense. Madrid. 1991, págs. 61-95.

[17] TARRÉS, J. "La Topología General desde sus Comienzos hasta Hausdorff". En "Historia de la Matemática en el Siglo XIX" , Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid. 1994, págs. 191-211.

[18] TARRÉS, J. "Algunas ideas acerca del origen de la Topología de Conjuntos". En "Contribuciones Matemáticas. Estudios en honor del Prof. José Javier Etayo Miqueo". Ed. Complutense. Madrid. 1994. págs. 107-125.

[19] URYSOHN, P. "Mémoire sur les Multiplicités Cantoriennes". *Fund. Math.* **7** (1925), 30-137 y **8** (1926), 225-359.

[20] VEBLEN, O. "Theory of Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs". *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **6** (1905), 83-98.

Juan Tarrés Freixenet. Dpto. de Geometría y Topología.
Facultad de Matemáticas. U.C.M. 28040 Madrid