Programas Informáticos en Matemáticas

Sección a cargo de

Emilio Bujalance

Introducción

Esta sección pretende ser un foro abierto sobre la relación que ha surgido entre las computadoras y las matemáticas. En ella se informará sobre los distintos programas para experimentar en matemáticas, tanto en el ámbito docente (Universidad y Enseñanza Secundaria) como en el investigador, así como de los programas que existen para la edición de textos en matemáticas. Además de la información se realizarán distintos tests comparativos de los programas

En este primer número, dedicado al programa Maple, tres profesores muestran distintos aspectos del mismo. El primero de los artículos, "Maple en la enseñanza secundaria" del Profesor Miguel Delgado Pineda, es una breve introducción al Maple, así como a sus aplicaciones a la Enseñanza Secundaria.El Profesor Delgado, que en la actualidad es Catedrático de E. U. del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la U.N.E.D., ha sido Catedrático de Instituto, ha trabajado en el proyecto ATENEA, y desde hace cinco años imparte cursos de formación del profesorado sobre las aplicaciones del Maple en la enseñanza secundaria.

El segundo de los artículos "Maple y enseñanza universitaria" es del Profesor José Luis Vicente Córdoba, Catedrático del Departamento de la Universidad de Sevilla. Fue uno de los primeros que trabajó en España en la relación entre Computadoras y Matemáticas, a través del Proyecto Euromath. Es autor de dos libros sobre el Maple y las Matemáticas.

El tercer artículo es "Aplicación del Maple a la investigación" del Profesor Ignacio Luengo Velasco, Catedrático del Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense, quien ha obtenido importantes resultados en Geometría Algebraica utilizando Maple como herramienta de experimentación.

Toda sugerencia para el mejor desarrollo de esta sección será recibida con agradecimiento. Sólo hay que enviarla al Prof. Emilio Bujalance, Departamento de Matemáticas Fundamentales, Facultad de Ciencias, UNED 28040 Madrid.

E-mail: **eb@mat.uned.es**

Maple en la Enseñanza Secundaria

por

Miguel Delgado Pineda

INTRODUCCIÓN

Maple es un entorno de cálculo matemático con el cual se puede operar a varios niveles desde una consola de ordenador y a través de la Red. Se le reconoce como uno de los programas clásicos de cálculo simbólico, aunque también posee características de cálculo numérico e incorpora un potente lenguaje procedimental con un amplio catálogo de estructura de datos, entre los que destacan aquellos relacionados con la estructura de lista; conjunto, vector, matriz, ...

Este entorno de cálculo ha experimentado, desde su aparición en la Universidad de Waterloo, sucesivas modificaciones con la participación de otras universidades, de esta forma han aparecido diversas actualizaciones periódicamente (aproximadamente cada 2 años), siendo la más reciente la versión Maple V R5 (**www.maplesoft.com**) que acaba de aparecer en Febrero de este año en nuestro país.

El usuario interactúa con el entorno mediante un lenguaje estructurado que es analizado e interpretado sentencia a sentencia, si bien puede optarse por ejecutar conjuntamente grupos de sentencias. Cada sentencia posee una sintaxis común:

Comando(Parámetros) `Fin_de_Sentencia`

Los comandos son de dos tipos: internos y externos, es decir, comandos que se incorporan en el núcleo de programa o comandos que están en librerías que deben cargarse para que el comando actúe. Por ejemplo, el comando **plot** es interno y el comando **animate** es externo y está en la librería **student**.

También los parámetros son de dos tipos: de usuario y de entorno. Los parámetros de usuario son los que necesita el comando para actuar mientras que los de entorno son aquellos que modifican de la actuación del comando. Por ejemplo, en:

plot(cos($2x$), x =-Pi..Pi, thickness=2, color=red)

los parámetros cos($2x$) y x =-Pi..Pi son parámetros de usuario mientras que thickness=2 y color=red son parámetros de entorno.

El final de la sentencia puede ser, también, de dos tipos: con respuesta en pantalla y sin respuesta en pantalla. Al final le corresponde un único carácter, bien un ; o bien :

La respuesta al usuario que hace Maple posee calidad Postcrip tanto en texto como en gráficos de 2D y 3D. Ésta se puede adaptar a las necesidades del usuario.

Este entorno incorpora la tecnología Open Math, por lo cual puede conectarse con el entorno numérico y de modelización MATLAB sin ningún problema. Además, el procesador de textos científicos Scientific Work Place incorpora un módulo Maple para ejecutar expresiones editadas en el procesador.

Maple V R5, aparte de las 2500 funciones ya existentes, tiene renovadas rutinas matemáticas y de visualización. Algunas de las características más importantes que cabe destacar en esta nueva versión son las siguientes: Resolución de Transformaciones Integrales: Laplace, Hankel, Fourier, etc. Bases de Gröbner. Geometría 3D. Contornos y Polígonos. Sistemas de coordenadas definibles por el usuario. Exportación a formatos HTML.

Maple en la Enseñanza Secundaria

Cualquier profesor busca la referencia visual necesaria para que el alumno comprenda algunos conceptos básicos de las Matemáticas. Por ello, mientras fui profesor de este nivel de enseñanza, perseguí situaciones de aprendizaje que incorporaran efectos visuales para simular tanto las definiciones como los teoremas que debía explicar. En ocasiones diseñé algún material artesanal que requería el uso de tecnología que no solía utilizar un profesor de esta materia, sobre todo antes de la aparición de los ordenadores personales. El motivo de la búsqueda de entonces era el reconocimiento implícito de que el nivel de manipulación de objetos abstractos que requiere esta materia y que la madurez mental de los alumnos de este nivel de enseñanza no siempre permitían conseguir resultados excesivamente positivos. Actualmente este motivo sigue siendo válido, así pues, es necesario mostrar algún modelo clarificador de cada uno de los elementos que se manipulan en esta asignatura.

Las asignaturas de Matemáticas carecen de un laboratorio reglado donde el alumno pueda experimentar situaciones matemáticas familiares y al nivel de los temas que estudia. Esto obliga al profesor a utilizar herramientas de apoyo a su labor docente dentro del horario establecido para su asignatura. En el caso que la utilice, se requiere de dicho profesor un cierto esfuerzo de talante administrativo y organizador. Por supuesto, no existe un conjunto de experimentos documentados equiparables a una tormenta de ideas donde el alumno se sienta protegido del temor al fracaso y se decida a experimentar situaciones variadas aunque sean erróneas.

Los profesores de Matemáticas empezamos a creer que una posible solución a la falta de marco visual es la utilización de conjuntos de instrucciones, en lenguaje matemático, ejecutadas sobre Programas de Cálculo Simbólico. Estos programas permiten al profesor crear los laboratorios que tan necesarios son para el alumno, y Maple V r5 de Waterloo Maple es uno de esos programas.

Este programa no está muy difundido en la Enseñanza Secundaria, pero no cabe duda que pronto lo estará, puesto que posee múltiples facilidades incorporadas tanto en su núcleo como en las librerías complementarias. Calcula numérica y simbólicamente todo aquello que se sabe calcular tradicionalmente, si bien, puede ocurrir que el procedimiento manual y el utilizado por Maple difieran, como ocurre con casi todos los programas de este tipo. En este artículo queremos destacar aquellas características más útiles a la hora de generar material educativo a este nivel; características que no todos los programas de cálculo simbólico poseen.

Facilidades multitexto

1. El profesor puede generar un texto matemático con la sintaxis tradicional de un libro de texto. Dentro de ese texto se insertan las instrucciones en un lenguaje similar al matemático, así pues, texto e instrucción se integran fácilmente.

2. El alumno puede estudiar cada parte del texto y ejecutar seguidamente la correspondiente instrucción sin tener que cambiar de soporte. Además, puede modificar directamente el texto, bien para personalizarlo o bien para añadir información, y puede experimentar situaciones análogas modificando la instrucción.

3. El texto y las instrucciones se pueden agrupar en unidades de manera que sólo sea visible aquella parte que se desee, el resto quedará minimizado como si se tratara de un pequeño botón. Figura (Maple1)

Facilidades Multimedia

1. La respuesta gráfica generada por algunas instrucciones se puede insertar en el texto, inmediatamente después de la instrucción o en cualquier otra parte de la pila de sentencias. Además, estas respuestas se pueden acumular en ventanas independientes, una por respuesta, de esta forma se puede ver el resultado de varias en pantalla.

2. La manipulación elemental de gráficos o ventanas gráficas es sencilla ya que se tratan gráficos vectoriales, y se realiza mediante un menú de opciones. Es muy fácil cambiar las características de los gráficos;

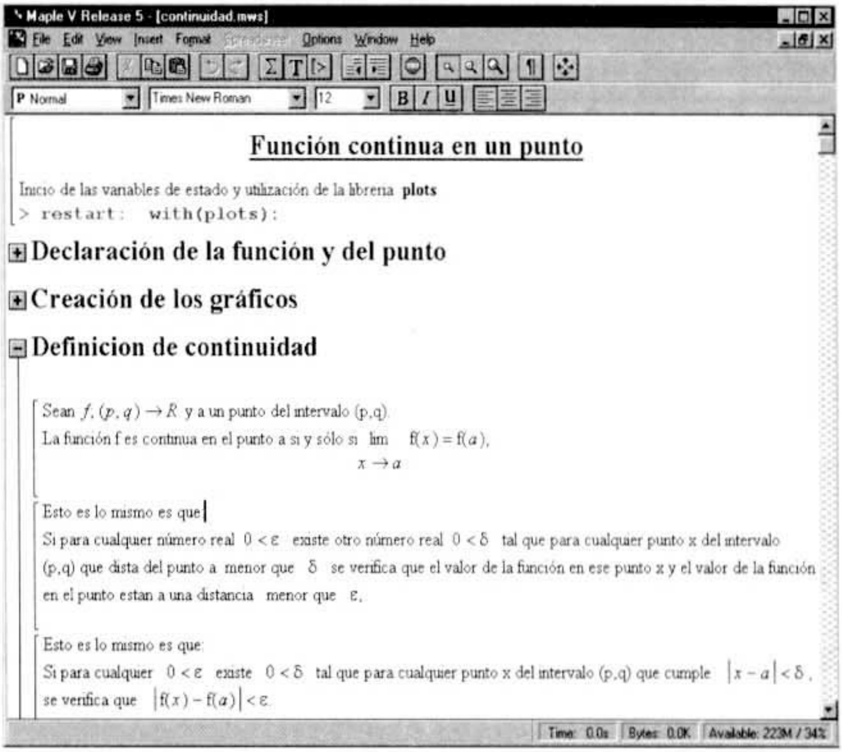

FIGURA. *Maple1*

color, trazo, grosor, interpolación, escala, marco de referencia, orientación tanto para gráficos bidimensionales como tridimensionales.

3. Existen instrucciones cuya respuesta es una película de animación de distintas respuestas gráficas. Las animaciones se realizan tanto en 2D como en 3D y pueden incluir cualquier tipo de respuesta gráfica que genere Maple.

4. La puesta en marcha de una animación se realiza mediante un menú similar al de gráficos en el cual aparecen los controles tradicionales de un reproductor doméstico de vídeo. Al igual que con los gráficos, las animaciones se pueden insertar en el texto o en una ventana independiente.

5. Existen instrucciones que permiten generar una secuencia de diapositivas gráficas y controlar manualmente su visión. Figura (Maple2)

Facilidades de navegación e hipermedia

1. Una hoja de trabajo constituida por todos los elementos mencionados anteriormente se puede estructurar definiendo grupos de ins-

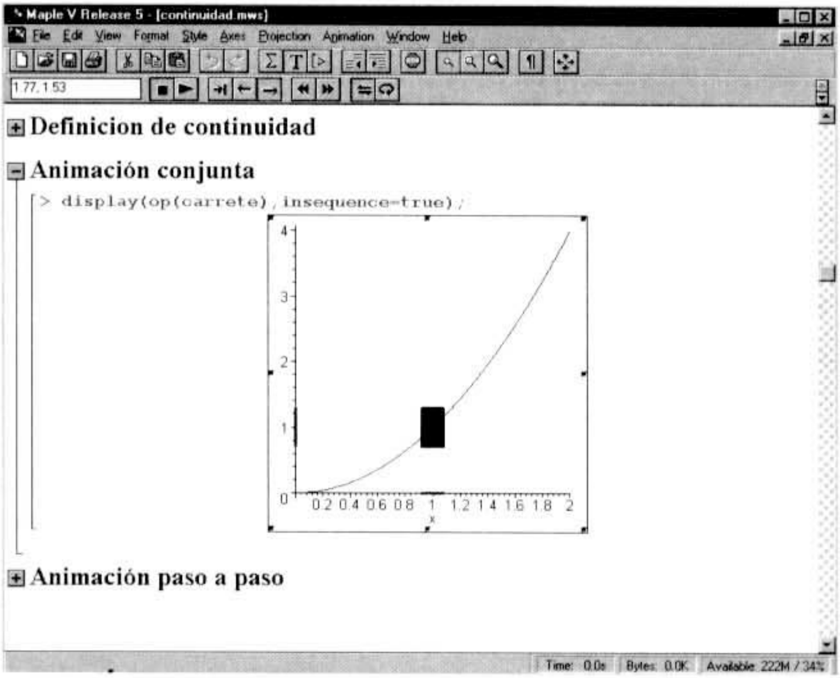

FIGURA. *Maple 2*

trucciones. El profesor puede ejecutar todas las instrucciones de un grupo o de toda la hoja para comprobar rápidamente que todo funciona, así como eliminar las respuestas existentes en la hoja con el fin de empezar una nueva sesión con otros alumnos.

2. Los grupos de instrucciones se pueden minimizar al tamaño de un pequeño botón para que los alumnos no se despisten, y se pueden expandir a texto completo instantáneamente.

3. Existe la posibilidad de crear botones textuales de navegación por la hoja de forma que al pulsar en uno de ellos se acceda a la parte etiquetada con aquello a lo que marca el botón.

4. Con distintos botones se puede enlazar una hoja de trabajo con otras, de forma que el cambio de hoja sea transparente para el alumno o compruebe otro elemento.

5. Si se desea que los alumnos no modifiquen la hoja, entonces se puede almacenar toda la hoja como fichero HTML y ser navegada con cualquier navegador de Internet.

6. Todo el trabajo del profesor puede ser editado para impresión profesionalmente si se almacena la hoja como fichero LaTex. De esta

forma se puede ir construyendo un con lo cual se minimiza la tarea de edición. Figura (Maple3)

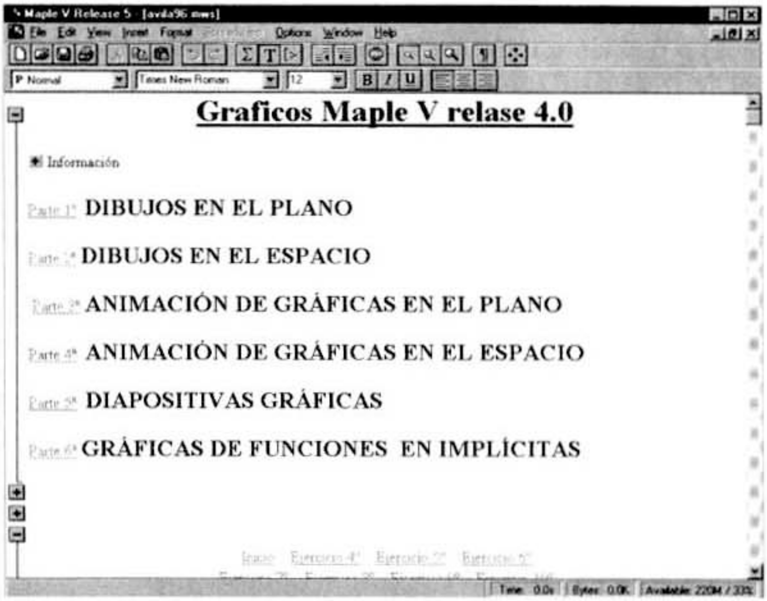

FIGURA. *Maple3*

Este programa posee múltiples características notables como la de definir procedimientos, que permiten crear un conjunto de instrucciones en el lenguaje natural del alumno, y la posibilidad de programación estructurada entre otras. Aunque también posee algunas características molestas como son:

1. El programa requiere el entorno Microsoft Windows y la operatividad de este entorno implica 16 Mb de memoria en la máquina.

2. No posee un dispositivo gráfico de edición de instrucciones. Es un programa que interactúa con el usuario mediante el sistema de consola, es decir, el usuario escribe la sentencia que desea ejecutar. Esto suele hacer vacilar al profesor que no lo ha utilizado nunca pues suele creer que debe conocer cada una de las sentencias que se puedan escribir y las variaciones de cada una de ellas.

3. Las sentencias poseen una sintaxis muy similar a un procedimiento en cualquier lenguaje de programación escritas en inglés.

4. Los resultados obtenidos por defecto no siempre son aquellos que el profesor de Matemáticas esperaba obtener sin más.

Para terminar este breve artículo basta reflexionar en la práctica diaria y observar que a un alumno familiarizado con el Cálculo Diferencial se le suele solicitar la confección de la gráfica de una función; en muchos casos se aplica toda la mecánica diferencial para representar idealmente funciones polinómicas o funciones racionales casi exclusivamente. No cabe duda que a un nivel de 1º de BUP un alumno está capacitado para distinguir la forma de muchas gráficas de funciones polinómicas, sobre todo si se conoce una descomposición en factores primos, y otras tantas de funciones racionales irreducibles, sobre todo si se conoce una descomposición en factores simples. ¿Cuántos de esos alumnos están capacitados para resolver una ecuación polinómica o racional una vez que tienen la gráfica de la correspondiente función?, ¿cuántos de ellos no suelen distinguir entre polinomio, ecuación polinómica o función polinómica? No debe extrañarnos, pues al escribir $x^3-x^2+3x-2, x^3-x^2+3x-2=0$ y $f(x)=x^3-x^2+3x-2$ las diferencias no son muchas. ¿Por qué el profesor se empeña en que sus alumnos distingan estos conceptos?, sobre todo si aquél no les da un marco de referencia visual y sólo se queda en la correcta definición de esos elementos y en la reiteración más o menos afortunada de un grupo de ejercicios. La pregunta final es: ¿No requerirá menos esfuerzo mental distinguir visualmente estos conceptos de forma que el pensamiento sea gradualmente más abstracto, aunque con un cierto marco visual? Creemos que la respuesta es SÍ.

Miguel Delgado Pineda
miguel@mat.uned.es

Referencias

[1] CHAR, B.W. et al, *Maple V*, Springer Verlag.

[2] KLIMEK, G. Y KLIMEK, M. *Discovering curves and Surfaces with Maple*, Springer-Verlag.

[3] MONAGAN, M.B. et al, *Maple V*, Springer-Verlag.

[4] RINCÓN, F.; GARCÍA, A. Y MARTÍNEZ, A., *Cálculo Científico con Maple*, Rama.

[5] SOTO PRIETO, M.J. Y VICENTE CÓRDOBA, J.L., *Álgebra Lineal con MATLAB y Maple*, Prentice-Hall.

* * *

Maple en la Enseñanza Universitaria

por

José L. Vicente

A la pregunta "¿qué es MAPLE?" se puede responder de maneras muy diversas, en función de quien lo haga. Ocurre que MAPLE es una herramienta matemática (aunque distinta de la pura cogitación, que es la clásica), luego cada uno la definirá dependiendo del uso que haga de ella. Para quien necesite calcular mucho será una super-calculadora. Para alguien especialista en informática será un lenguaje de programación tipificado y dotado de una gran cantidad de estructuras de datos. Para quien cultive la matemática finita será un auxiliar que le permitirá demostrar teoremas. Para quien enseñe matemáticas puede ser una gran ayuda para hacer comprender lo que transmite. En este pequeño trabajo nos vamos a colocar en la posición del que enseña matemáticas a nivel universitario. Vamos a intentar hacer ver cómo MAPLE es todo lo anterior. En tres páginas escasas se puede decir poco; por tanto nos vamos a limitar a aquéllo que hemos experimentado directamente. Las referencias que hagamos a técnicas de enseñanza están basadas, no sólo en experiencias, sino en una respetable cantidad de programas MAPLE que utilizamos normalmente y que están publicados y disponibles en diversos lugares. Supongamos que tenemos delante a una persona que sabe manejar y programar MAPLE y queremos enseñarle un poco de matemáticas, por ejemplo, a resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de reducción de Gauss. Podemos concebir un método de reducción en el cual la matriz A de los coeficientes (o la ampliada) esté en forma escalonada por filas, lo que significa:

1. El primer elemento distinto de cero de cada fila (contando de izquierda a derecha), llamado *pivote* está a la derecha del pivote de la fila superior.

2. Encima de cada pivote hay ceros (debajo también por la condición anterior).

Tratamos de probar al oyente que, dada A, se puede lograr ponerla en forma escalonada por filas mediante transformaciones elementales a determinante constante. La demostración de este hecho es idéntica a escribir un programa en MAPLE. En otras palabras, la escritura de un algoritmo en MAPLE *es una demostración* del teorema. El procedimiento es clásico de la programación funcional: se define la función `pivotar` y se construye un algoritmo que hace un uso inteligente y repetido de ella para lograr pasar a la forma deseada (véase [2]). La forma escalonada por filas de una matriz (o la forma escalonada por columnas, que es lo correlativo) tiene más fondo de lo que parece. No es simplemente un algoritmo de cálculo. Usándola se pueden demostrar teoremas engorrosos de la teoría de matrices y determinantes con una facilidad pasmosa (c.f. [2]), por ejemplo que el grupo $\mathrm{Sl}(n,k)$ está engendrado por las matrices elementales correspondientes a las operaciones de pivotar. Se puede pensar que aquí no hay nada sorprendente desde el punto de vista teórico. Un algoritmo es ciertamente una demostración en un proceso finito. Lo que tiene valor en este caso es que el punto de vista algorítmico es fecundo porque simplifica los desarrollos teóricos. Además, quien estudia va asimilando la idea de que los algoritmos *son matemática*, finita si se quiere, pero matemática al fin y al cabo. La cuestión que se plantea ahora es la de la necesidad de aprender a programar MAPLE para poder aplicar estas técnicas. En el marco de una enseñanza universitaria clásica, el aprender a programar MAPLE sería materia de prácticas de laboratorio, mientras que el uso de la programación sería parte del contenido de las enseñanzas teóricas o prácticas. ¿Cómo enseñar a programar MAPLE? No hay un método infalible para hacer esto. Además, tenemos la experiencia de que es muy fastidioso aprender un lenguaje de programación. Los manuales clásicos no hacen atractiva la tarea. Hemos hecho la experiencia de enseñar a programar MAPLE usando la matemática. Así invertimos los términos anteriores: de enseñar matemática usando MAPLE pasamos a enseñar MAPLE usando matemática. Naturalmente, para que esto no sea un círculo vicioso, tenemos que dotarlo de una cierta estructura de "función recursiva". En otras palabras, enseñamos MAPLE usando los contenidos inferiores de matemáticas y luego usamos MAPLE para enseñar contenidos superiores. Esta idea es la que se desarrolla en nuestro libro [1]. Es sorprendente cómo, mediante el uso de matemática muy elemental a nivel de enseñanza secundaria, se pueden aprender sutilezas de la programación de MAPLE. Esto es una característica de la programación de alto nivel: en la de bajo nivel se pierde uno en detalles ínfimos, de tal manera que las hojas de los árboles no dejan ver ni a éstos ni al bosque. Vamos a decir unas palabras sobre un ejemplo muy sencillo tomado de [1]. La divisibilidad de números enteros es algo muy elemental y conocido a nivel de enseñanzas medias. Se la puede complementar definiendo y describiendo las principales propiedades de la función φ de Euler. Quizás no se puedan dar demostraciones exhaustivas a ese nivel, pero se pueden dar explicaciones razonables. Con la divisibilidad elemental y la función φ se puede construir el sistema de codificación RSA de clave pública. La explicación teórica es muy sencilla, y se hace en pocas líneas. Cuando se trata de implementar un algoritmo en MAPLE para codificar y descodificar mediante RSA, nos encontramos con bastantes dificultades típicas de la programación, que hay que vencer. Quien se inicia tendrá que aprender a manejar las funciones de manipulación de cadenas de caracteres, las funciones de la aritmética modular de los grandes números y la noción de "parsing", que no es fácil. Así, con una pequeña cantidad de aritmética, hemos hecho surgir unas estructuras muy ricas de la programación en MAPLE, que quedarán incorporadas al bagaje del estudiante. Hoy día los mecanismos de computación teórica (autómatas y máquinas esencialmente) constituyen un bagaje imprescindible para cualquier matemático. También lo son técnicas más matemáticas, como las funciones recursivas, o estructuras de información, como las estructuras de datos directamente tomadas de la matemática combinatoria (véase [3]). Todo ello se puede estudiar y dominar de manera muy rápida con MAPLE. La noción de recursión es central a casi toda la matemática. MAPLE tiene medios para resolver ecuaciones de recurrencia (o ecuaciones en diferencias finitas), hallando términos generales o funciones generatrices. Se pueden hacer comprender los conceptos al alumno presentando casos clásicos, como el problema de las torres de Hanoi, o la sucesión de Fibonacci o tantos otro semejantes. Una vez asimilados estos conceptos, se puede hacer ver cómo la "computación recurrente" (es decir, la computación basada en las ecuaciones de recurrencia) no es práctica, de donde se deriva la necesidad del cálculo de términos generales o funciones generatrices. Cuando se tienen estos tres elementos se pueden comparar las eficacias de los respectivos algoritmos de cálculo. Esto enseña a apreciar "el fondo" de la matemática, es decir, aquel nivel en que hay que enfrentarse con la dura realidad de necesitar calcular, de obtener resultados numéricos. Los tipos y estructuras de datos del lenguaje MAPLE se pueden usar asimismo para hacer matemática. MAPLE es un lenguaje tipificado con un gran número de estructuras de datos. También permite al usuario definir nuevos tipos y estructuras. Vamos a ver cómo podemos emplear estas facilidades en geometría. Pensemos en un objeto geométrico cualquiera, por ejemplo, una variedad lineal afín en un espacio de dimensión arbitraria pero fija. Este objeto puede estar definido por varios datos: un conjunto de puntos que la generen, unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, un punto y la variedad de dirección. El problema está que, sea cual sea el dato de entrada, los otros son necesarios cuando hay que operar para resolver problemas. Por ejemplo, si se dan dos variedades mediante puntos que las generen y se pide la intersección, es mejor usar las ecuaciones implícitas para este fin. Una manera de resolver este problema sería representar de alguna forma cada variedad por los datos de entrada y luego operar para hallar otras representaciones siempre que se pueda. Sin embargo, hay una solución más inteligente. MAPLE posee una estructura de datos que se llama `table`. Una tabla es una estructura de datos que permite guardar información heterogénea. Podemos diseñar una función MAPLE que, tomando uno cualquiera de los datos anteriores que definen una variedad lineal afín, calcule automáticamente todos los demás y los guarde en una tabla. Así, cuando tenemos varias variedades y hay que operar con ellas, la función correspondiente sólo tendrá que tomar los datos en el lugar adecuado de las tablas. Es evidente que esto se puede hacer con casi cualquier otro objeto geométrico. Por ejemplo, si operamos con cónicas en el plano, podemos crear la correspondiente estructura de datos que almacene la ecuación cartesiana, la ecuación polar, la matriz, el tipo de cónica, los ejes, los semiejes, las asíntotas, los focos, la excentricidad, etc. Correlativo a lo anterior, se puede escribir una función que defina el tipo de dato *variedad lineal afín* (o *cónica*, o cualquier otra cosa). Esta función sirve para comprobar que una cierta tabla que hayamos podido construir representa o no una variedad lineal afín (véase [1]). También se puede jugar con las estructuras de datos para hacer operaciones. Por ejemplo, consideremos operadores diferenciales polinómicos en n variables. La forma natural de representarlos es como un polinomio

$$P = \sum a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} D_1^{j_1} \cdots D_n^{j_n}$$

donde las x_i son las variables y $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Esta representación es adecuada para la suma de operadores diferenciales y el producto por un escalar. Sin embargo, el algoritmo de composición de operadores diferenciales se escribe muy mal en la representación polinómica. Podemos representar el operador diferencial P como una lista de listas, correspondiendo cada lista elemento a un término de P. El término general se escribe a su vez como una lista

$$[[a_{i_1,\dots,i_n}], [i_1, \dots, i_n], [j_1, \dots, j_n]]$$

Usando esta representación, los exponentes de los monomios en la composición de operadores diferenciales se hallan mediante operaciones aritméticas con números enteros. Naturalmente, hay que definir funciones que pasen de una representación a otra. Esto no es una mera técnica de programación: pone de relieve la estructura aritmética de la composición de operadores, lo que significa una nueva luz y una visión más profunda del álgebra de operadores diferenciales. ¿Cuál es la conclusión a sacar? Que cuando los temas se plantean bien desde el punto de vista computacional, se puede imbricar MAPLE y matemáticas, de manera que una suministre información a la otra.

José Luis Vicente Córdoba
joseluis@algebra.us.es

Referencias

[1] SOTO, M.J. Y VICENTE, J. L., *Matemáticas con Maple*, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid, 1996.

[2] SOTO, M.J. Y VICENTE, J. L., *Álgebra lineal con Matlab y Maple*, Prentice Hall, 1996.

[3] KNUTH D.E., *Fundamental algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

Aplicación de MAPLE a la Investigación

por

Ignacio Luengo Velasco

MAPLE es un sistema de cálculo simbólico que por sus características de potencia y flexibilidad se ha convertido en una herramienta matemática de primera magnitud. Dentro de MAPLE hay decenas de paquetes de programas para las más variadas áreas de Investigación en Matemáticas, como por ejemplo combinatoria, teoría de grupos, teoría de números, geometría algebraica y geometría diferencial. Esto da una idea de su extensión y uso en la investigación.

En esta nota nos vamos a limitar a ilustrar su utilidad a través de nuestra propia experiencia. En los problemas geométricos en los que yo he trabajado se llega a menudo a una situación en la que, para verificar una cierta propiedad geométrica, hay que hacer un cálculo concreto, normalmente con un conjunto de polinomios. El uso que hacemos de MAPLE es como una especie de supercalculadora con muy poca programación y gran cantidad de datos.

Por supuesto esta no es la única ni la principal situación en la que MAPLE puede ser de gran utilidad. En general se puede decir que todo cálculo susceptible de ser realizado de manera explícita, puede hacerse con MAPLE, aunque en algunas ocasiones, la complejidad de la estructura de datos u otras razones dificultan su realización, o aconsejan echar mano de otros programas más específicos.

Al menos para los que usamos estos programas como supercalculadora, el ordenador se ha convertido en una especie de laboratorio. El estudio de un número significativo de ejemplos concretos puede permitir descubrir fenómenos nuevos, a los que convenientemente elaborados, se tratará de una explicación y, en su caso, formulación precisa de los posibles resultados.

Este enfoque experimental de las Matemáticas no es por supuesto nuevo, pero hasta hace poco estaba limitado a áreas muy específicas como las relacionadas con el cálculo numérico. La novedad consiste en que gracias a los paquetes de cálculo simbólico ese enfoque se está extendiendo a un buen número de campos de las Matemáticas en los que ya ha demostrado su eficacia.

En el estudio de puntos singulares de variedades algebraicas se asocian a cada punto P una serie de invariantes algebraicos, geométricos y topológicos. El principal invariante topológico que se asocia a un punto singular P de una hipersuperficie V de ecuación $f(x) = 0$, es el número de Milnor $\mu(V, P)$ que es, salvo el signo, la característica de Euler-Poincaré de la fibra de la fibración de Milnor de f en P menos 1. Para singularidades aisladas este invariante (V, P) juega un papel similar al género para superficies de

Riemann. Si se fija el género g de una superficie de Riemann se fija la topología y se puede definir el espacio de Moduli de superficies de Riemann (o curvas algebraicas) de género g, como el espacio de las estructuras de superificie de Riemann en una superficie topológica de género g dado. De la misma forma, fijado el número de Milnor μ existe un "espacio de moduli local" S que es el estrato μ-constante de la deformación universal del germen (V, P).

Para curvas planas este espacio S es no singular. Este hecho se puede probar de diferentes maneras y cada una de ellas refleja una serie de propiedades útiles que son propias de la dimensión $n = 2$. De hecho en [3] nosotros demostramos que S es singular para $n \geq 3$.

La parte esencial de la demostración consiste en dar un método efectivo para calcular las ecuaciones locales del espacio S, para determinadas singularidades de superficies en C^3. Estas ecuaciones locales son polinomios que se obtienen por un procedimiento recursivo y cuyo "tamaño" crece de manera exponencial. Más concretamente los ejemplos más sencillos con S singular son superficies de grado 10, y en este caso los polinomios que determina S tienen más de 50 variables y un cálculo completo de los polinomios está fuera del alcance de MAPLE. Sin embargo, un análisis más detallado del algoritmo de cálculo permite calcular la parte lineal de los polinomios, es decir, el espacio tangente a S. Este es el punto clave que permite predecir qué singularidades van a tener S singular. A partir de aquí un proceso de eliminación en el anillo local correspondiente al punto P permite concluir usando MAPLE que S es singular en el punto correspondiente a P.

MAPLE es también útil en otros problemas geométricos en los que se usa la resolución de singularidades para reducirlos a un cálculo explícito en un anillo de polinomios. Un problema de este estilo aparece en el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas sobre los complejos.

Sea $V(z)$ un campo de vectores en C^n. La integración de la ecuación diferencial correspondiente $(z' = V(z))$ (1) es un proceso esencialmente trascendente, incluso si los coeficientes de V son algebraicos (es decir son polinomios en z). No obstante en el estudio de las soluciones próximas a un punto singular del campo $(V(P) = 0)$ hay una parte algebro-geométrica, y es la determinación de las separatrices. Una separatriz del campo V en P es una curva invariante (i.e. solución de la ecuación (1)) tal que $\gamma \cup P$ es una curva analítica en P. Para un campo de vectores V la existencia de separatrices en P tiene consecuencias importantes, porque de algún modo "modera" la dinámica de la ecuación (1) en un entorno de P. Su estudio fue iniciado en 1854 por Briot y Brouquet. En 1982 Camacho y Sad [1] demostraron para campos de vectores en C^2 que por cada punto singular pasa al menos una separatriz analítica. En [2] nosotros demostramos que para $n \geq 3$ existen campos de vectores holomorfos sin separatrices en C^n. Encontramos un conjunto $W \subset H$, en el espacio H de campos polinomiales de multiplicidad mayor o igual que 2 tal que los campos de W no tienen separatrices ni analíticas ni formales. El hecho que W sea localmente cerrado, es decir, dado por ecuaciones e inecuaciones significa que $dim(W) \geq (dim(H) - 10)$ si $W \neq \emptyset$ pero W puede ser vacío. En este punto interesante por otras razones encontrar un argumento geométrico que garantice $W \neq \emptyset$, además sería la forma más elegante de concluir la demostración. Desgraciadamente hasta el momento no hemos sido capaces de encontrar dicho argumento y en [2] concluimos la demostración de que $W \neq \emptyset$ exhibiendo una solución concreta de las ecuaciones implícitas que definen W. En este caso se llega a una situación parecida a la del problema anterior, las ecuaciones que definen W son polinomios en muchas variables, que en este caso se pueden calcular completamente, pero por su tamaño no hay ninguna esperanza de que un sistema de cálculo de bases de Gröbner pueda encontrar las soluciones. En [2] usamos un estudio geométrico de la resolución de los campos por explosiones para reducir las ecuaciones de W a otras más sencillas que se pueden calcular y resolver usando MAPLE.

Para acabar esta nota, una anécdota que ilustra bien alguna de las características de MAPLE. Hace unos días, ya muy tarde, me encontré a un compañero que trabaja en Geometría Algebraica, absorto ante la pantalla de un ordenador. Al interesarme por lo que hacía, me comentó que llevaba varias horas haciendo un programa de Fortran. " ¿Para qué necesitas programar en Fortran?", pregunté. Me explicó que necesitaba calcular unas clases de Chern para corroborar, en un intervalo razonable del género, una conjetura relacionada con el Lema de Clifford para fibrados de rango superior en curvas. El cálculo de las clases de Chern se reduce a unas sumas de números combinatorios, por lo que le expliqué que con MAPLE eso se podía hacer en dos líneas, escribiéndolo más o menos como escribiría la fórmula en un papel.

Así que con una pequeña ayuda, unos pocos minutos después de haber oído hablar de MAPLE, había calculado dichas sumas en un rango amplio del género. Más aún, aprovechando las facilidades de MAPLE para el cálculo de sumas indefinidas, es decir, de la función generatriz, obtuvo directamente la correspondiente función hipergeométrica generalizada que expresaba dichas sumas.

Volví a pasar por el mismo lugar una hora más tarde. Había verificado la conjetura hasta el género 300 y se encontraba investigando "experimentalmente" las propiedades de los valores especiales de las funciones hipergeométricas que le permitieran llegar a una demostración de su conjetura.

Ignacio Luengo Velasco

E-mail: Iluengo@mat.ucm.es

Referencias

[1] CAMACHO, C. Y SAD, P., *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. Math, **115**, 579-595 (1982).

[2] GÓMEZ-MONT, X. Y LUENGO, I., *Germs of holomorphic vector fields in C^3 without a separatrix*, Invent. Math., **109**, 211-219 (1992).

[3] LUENGO, I., *The μ-constant stratum is notsmooth*, Invent. Math., **90**, 139-152 (1987).

PALILLOS, ACEITUNAS Y REFRESCOS MATEMÁTICOS

Luis Balbuena, Luis Cutillas y Dolores de la Coba

Rubes Editorial, S.L.

Nada más gratificante, saludable y mediterráneo que un buen refresco, una ración de aceitunas y un cubilete de palillos para ensartarlas. Con semejante equipaje podemos arrellanarnos en nuestro sillón de terraza y dejar transcurrir el tiempo, o emprender excitantes viajes hacia lugares insospechados mientras nuestra mente intenta resolver los misterios que encierran los pequeños actos cotidianos.

Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos es un libro de juegos matemáticos que ofrece todo un mundo en clave que hace vivir y vibrar a través de la magia de las ideas y los números. Los autores, auténticos expertos, han recopilado y creado un sinfín de pequeñas aventuras llenas de sabrosas enseñanzas para disfrutar sin más armas que un bote de aceitunas y una caja de simples mondadientes de madera.

Con ellos se puede enfrentar a la esfinge, maravillarse ente las ciudades perdidas del desierto, compartir inquietudes con Bertrand Russell... y luego comer tranquilamente los enigmas con la satisfacción de haber descubierto que las matemáticas también forman parte del sabor de la vida.

Luis Balbuena es profesor de matemáticas y consumado autor de libros y artículos divulgativos. Le apasiona popularizar esta ciencia a través de cuantos medios tiene a su alcance, como prensa y radio.

Dolores de la Coba es experta elaboradora de materiales didácticos que aplica y pule en sus clases de matemáticas. Entretiene su devoción por esta materia exprimiendo juegos de trasfondo matemático.

Luis Cutillas ejerce de profesor de matemáticas. Cuenta entre sus especialidades la informática aplicada y es un experto en relojes solares.

Precio: 990 ptas.