La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

XXXIV Olimpiada Matemática Española
Tarazona, 12-15 Marzo de 1998

La XXXIV Olimpiada Matemática Española, que cada año convoca y organiza la Real Sociedad Matemática Española, se ha celebrado en Tarazona entre los días 12 y 15 del pasado mes de Marzo. El Seminario Diocesano congregó a 89 de los 91 ganadores de la Fase de Distrito, a sus Profesores acompañantes y familiares. El Comité Organizador, presidido por el Profesor Guillermo Dorda, realizó una excelente labor.

Los protagonistas de la Olimpiada son los alumnos participantes. Ellos son el futuro. Es una satisfacción darles a todos la enhorabuena.

Se relacionan a continuación los ganadores de la fase de distrito. En Cataluña y Madrid actuaron tres tribunales, y en Valencia dos.

Lista de participantes

Primeros clasificados

Acero Sistach, Lluís	Cataluña 2
Aliaga Varea, Ramón José	Valencia 2
Álvarez Pareja-Obregón, Guillermo	Huelva
Angosto Hernández, Carlos	Murcia
Arias de Reyna Domínguez, Sara	Sevilla
Cáceres Luque, Carmen	Málaga
Cantón Párraga, Emilio	Granada
Corral Pérez, Roberto	Burgos
Crespo Gil, Fernando	Navarra
Domínguez Folgueras, Ana	Oviedo
García Montes, Mario Andrés	Salamanca
González González, Carlos Javier	La Laguna
Gratal Martínez, Xavier	Cataluña 3
Ladra González, María Jesús	Santiago de Compostela
López Garrido, Julián	Jaén

López Jiménez, Jorge	Valencia 1
Lumbreras Fernández, Javier	León
Maestre Blanco, Nelo Alberto	Madrid 2
Margallo Balbas, Eduardo	Cantabria
Martínez de Albéniz Margalef, Marc	Cataluña 1
Mir Pieras, Juan	Baleares
Miralles Montolío, Alejandro	Castellón
Navarro Tobar, Álvaro	Madrid 3
Pérez Ortega, Francisco	Córdoba
Recio Uría, Pedro	País Vasco
Rubio Guivernau, José Luis	Madrid 1
Sanz Vázquez, Francisco Manuel	Extremadura
Torrés Ramírez, Francisco Javier	Almería
Trigo Conde, Isaac	Zaragoza
Vinuesa del Río, Jaime	Valladolid
Zhan Kang, Da	La Rioja

Segundos clasificados

Armendáriz Benítez, Iñaki	Madrid 2
Ciria Bru, Rubén	Córdoba
Corró Moya, Miguel Lluís	Baleares
Díaz Hernández, Laura	Huelva
Domingo Más, Carlos	Valencia 1
Domínguez Romero, Manuel	Salamanca
Faus Tomás, Ángel	Cataluña 3
Fernández Díez, Alicia	León
Flores Portillo, María	Navarra
Galindo González, Carlos	Santiago de Compostela
González Flores, Luis	La Rioja
González Pellicer, Edgar	Cataluña 1
Guardiola del Corral, Borja	Madrid 3
Jiménez Molina, Pedro	Madrid 1
Lago Martín, José Domingo	Sevilla
López Peña, José Javier	Granada
Llorente Saguer, Aniol	Cataluña 2
Martín Clavo, David	Zaragoza
Martínez Ros, Patricio	Murcia
Moreno Carmena, Raquel	Castellón
Nájera Cano, Fernando Pedro	Valladolid
Oliva Fernández, Nuria	Extremadura
Oramas Martín, Sergio	La Laguna
Padilla de la Torre, José Luis	Jaén

Pe Pereira, María	Burgos
Requena Trujillo, Víctor	Valencia 2
Ruiz Ruiz de Villa, José Manuel	Cantabria
Valdeón Vélez, Aitor	País Vasco
Villafañe Roca, Hugo	Oviedo

Terceros clasificados

Altabás Felipo, Enoc	Castellón
Amosa Delgado, Manuel	Madrid 2
Arjona Saiz, Daniel	Córdoba
Bennásar Sevillá, Alejandro	Balcares
Castro González, Jorge	León
Cerrolaza Martínez, Beatriz	La Rioja
Conejero Cárceles, Antoni	Cataluña 2
Del Castillo Mayorga, Ignacio	Navarra
Fernández Carames, Carlos	Salamanca
García Martínez, Carlos	Granada
Huerta Villegas, Carlos Jesús	Madrid 1
Jara Simón, José Antonio	Cantabria
Linde Estrella, Antonio Luis	Jaén
López Nieto, Francisco	Cádiz
Luengo Oroz, Miguel Ángel	Oviedo
Mainar Ruiz, Gloria	Valencia 1
Mateo Perrote, Elena	Zaragoza
Múgica de Rivera, Javier	Santiago de Compostela
Oliva García, José Gregorio	La Laguna
Peña Ortiz, Nicolás	Sevilla
Pérez Molina, Manuel	Alicante
Ramírez Soria, Antonio José	Valencia 2
Ramos Matín, Jonathan	Huelva
Rojo Arce, Marta	Burgos
Sanz Merino, Beatriz	Madrid 3
Valencia Acebes, Raúl	Valladolid
Valencia Conejo, Vicente	Extremadura
Viladesau Franquesa, Eduard	Cataluña 1
Zapata Pérez, Federico	Murcia

* * *

Problemas

Y los problemas son el corazón de cada Olimpiada. Se realizaron en dos Sesiones de cuatro horas y media, y cada problema se calificó sobre siete puntos.

PRIMERA SESIÓN

Problema 1 Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

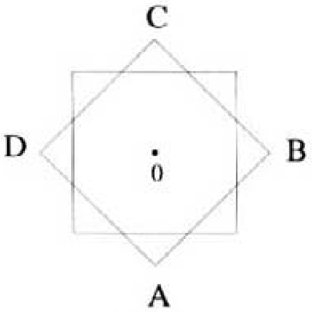

Figura 1

media de todos los participantes : 2,79
desviación: 1,95
media de los 18 premiados: 4,17
media de los 6 oros: 4,83

Problema 2. Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

media de todos los participantes: 5,49
desviación: 2,08
media de los 18 premiados: 6,56
media de los 6 oros: 6,67

Problema 3. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

media de todos los participantes: 0,61
desviación: 1,52
media de los 18 premiados: 2,06
media de los 6 oros: 4

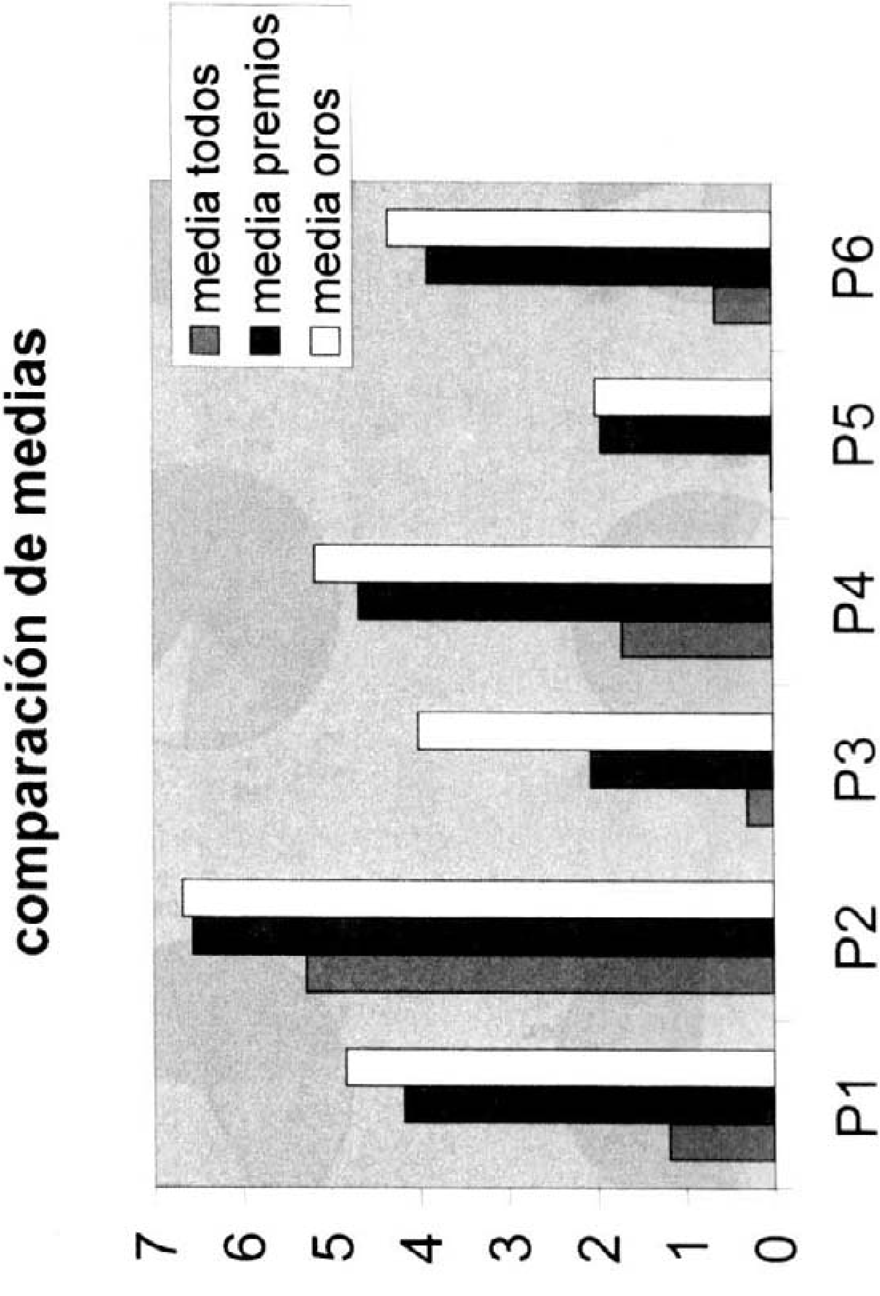
comparación de medias
media todos
media premios
media oros
7
6
5
4
3
2
1
0
P1
P2
P3
P4
P5
P6

Gráfico 1

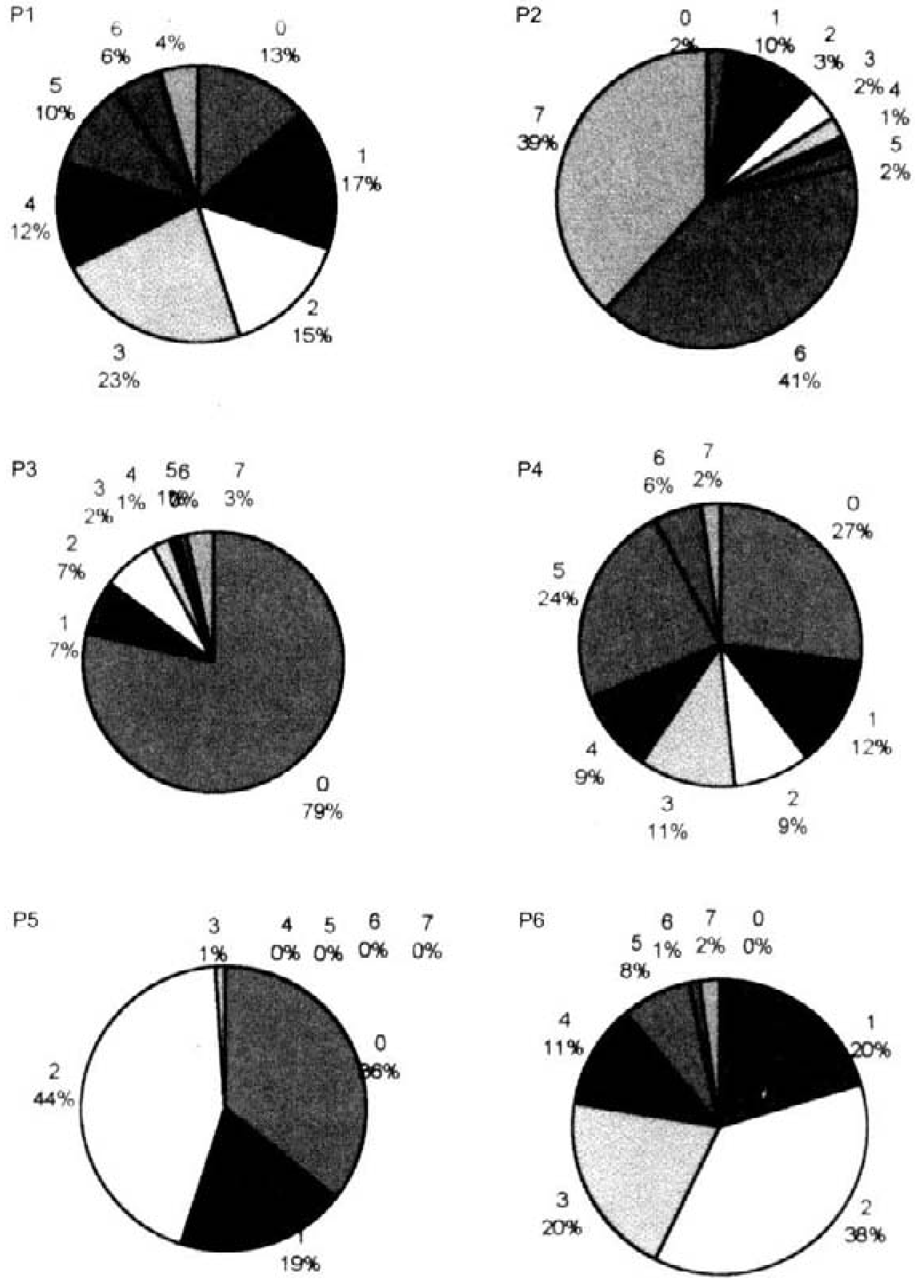
P1
0
13%
1
17%
2
15%
3
23%
4
12%
5
10%
6
6%
4%
P2
0
2%
1
10%
2
3%
3
2%
4
1%
5
2%
6
41%
7
39%
P3
0
79%
1
7%
2
7%
3
2%
4
1%
7
3%
P4
0
27%
1
12%
2
9%
3
11%
4
9%
5
24%
6
6%
7
2%
P5
0
36%
1
19%
2
44%
3
1%
4
0%
5
0%
6
0%
7
0%
P6
0
0%
1
20%
2
38%
3
20%
4
11%
5
8%
6
1%
7
2%

Gráfico 2

SEGUNDA SESIÓN

Problema 4. Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

media de todos los participantes: 2,67
desviación: 2,20
media de los 18 premiados: 4,67
media de los 6 oros: 5,17

Problema 5. Hallar todas las funciones $f : N \to N$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2f(n)$$

media de todos los participantes: 1,10
desviación: 0,92
media de los 18 premiados: 1,94
media de los 6 oros: 2

Problema 6. Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo de la figura 2.

media de todos los participantes: 2,62
desviación: 1,39
media de los 18 premiados: 3,89
media de los 6 oros: 4,33

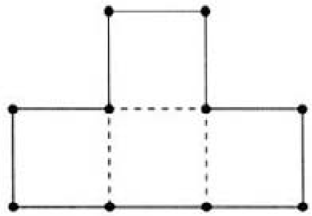

Figura 2

Soluciones

Durante una Olimpiada –ya sea local, Nacional o Internacional– muchas personas piensan los mismos problemas, y obtienen diferentes soluciones. A menudo, las más interesantes son las de los participantes. Ofrecemos algunas de ellas, con sus propias palabras.

Solución al problema 1 (María Pé Pereira). El problema nos pide el área común a dos cuadrados iguales. Podemos suponer que el ángulo de giro es α con $0 \leq \alpha \leq 90^{o}$, ya que para α y $\alpha + 90^{o}$ el área intersección sería la misma.

Sabemos que para $\alpha = 0$ el área es 1.

Para $\alpha \neq 0$, los triángulos que resultan son iguales por simetría. Llamamos a la hipotenusa y y a uno de los catetos x; el otro cateto será $\sqrt{y^2 - x^2}$.

Figuras 3a y b

Porque el lado del cuadrado vale 1 tenemos: $y + x + \sqrt{y^2 - x^2} = 1$

Además son triángulos rectángulos: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Resolviendo el sistema: $y + y\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{y^2 - y^2\operatorname{sen}\alpha} = 1 \Rightarrow y(1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) = 1 \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$$

El área común será la del octógono formado por ocho triángulos de base y y altura $\frac{1}{2}$.

Por tanto el área será:

$$y \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}8 = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 90^{o}$$

Solución al Problema 2 (Guillermo Álvarez Pareja-Obregón). El número más pequeño que puede salir de la suma de las cifras es el 1 (1000), y el más grande es el 36 (9999); luego los cubos van del 1 hasta el 36^3. Pero los únicos cubos con cuatro cifras son los que van desde 10^3 hasta 21^3, ambos incluidos:

$$10^3 = 1000 \Rightarrow 1 + 0 + 0 + 0 = 1, 1 \neq 1000 \text{ no vale}$$
$$11^3 = 1331 \Rightarrow 3 + 3 + 1 + 1 = 8; 8^3 \neq 1331 \text{ no vale}$$
$$12^3 = 1728 \Rightarrow 1 + 7 + 2 + 8 = 18; 18^3 \neq 1728 \text{ no vale}$$
$$13^3 = 2197 \Rightarrow 2 + 1 + 9 + 7 = 19; 19^3 \neq 2197 \text{ no vale}$$

$$14^3 = 2744 \Rightarrow 2+7+4+4 = 17; 17^3 \neq 2744 \text{ no vale}$$
$$15^3 = 3375 \Rightarrow 3+3+7+5 = 18; 18^3 \neq 3375 \text{ no vale}$$
$$16^3 = 4096 \Rightarrow 4+0+9+6 = 19; 19^3 \neq 4096 \text{ no vale}$$
$$17^3 = 4913 \Rightarrow 4+9+1+3 = 17; 17^3 = 4913 \text{ SÍ VALE}$$
$$18^3 = 5832 \Rightarrow 5+8+3+2 = 18; 18^3 = 5832 \text{ SÍ VALE}$$
$$19^3 = 6859 \Rightarrow 6+8+5+9 = 28; 28^3 \neq 6859 \text{ no vale}$$
$$20^3 = 8000 \Rightarrow 8+0+0+0 = 8; 8^3 \neq 8000 \text{ no vale}$$
$$21^3 = 9261 \Rightarrow 9+2+6+1 = 18; 18^3 \neq 9261 \text{ no vale}$$

A partir de 22, los cubos tienen más de cuatro cifras.
Los números son 4913 y 5832.

Solución al problema 3 (Mario Andrés Montes García). Consideremos los triángulos BAE y DAC, y sean A_1 y A_2 sus áreas respectivas.

Entonces,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}} \Leftrightarrow \frac{1/2\,\overline{BE}.\overline{AP}}{1/2\overline{CD}.\overline{AP}} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1/2\overline{AB.RE}}{1/2\overline{AC.SD}} = \frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{RE}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{RE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{AC}}.$$

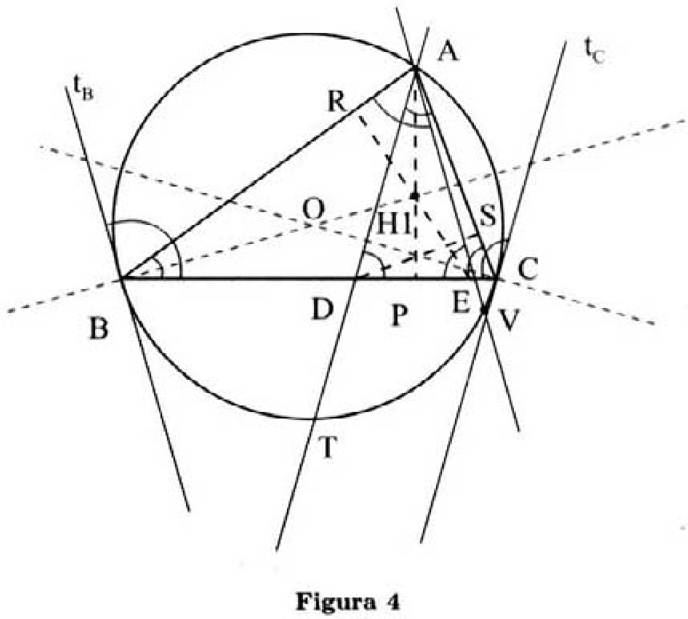

Figura 4

Como BAE y DAC son semejantes esta última relación se cumple (es decir: en triángulos semejantes la razón entre el lado y la altura sobre él es la misma en pares de lados homólogos) y por tanto la primera también, que es lo que queríamos demostrar. Que BAE y DAC son semejantes se observa fácilmente mirando que sus tres ángulos son iguales dos a dos.

Si $\alpha = \widehat{EBA}$, $\beta = \widehat{BAE}$, $\gamma = \widehat{AEB}$, son los ángulos del triángulo BAE y $\varepsilon = \widehat{DAC}$, $\Omega = \widehat{ACD}$, $\delta = \widehat{CDA}$ los ángulos del triángulo DAC, resulta:

- $\alpha = \varepsilon$ ya que ambos son ángulos inscritos y $AC = CT$ por ser simétricos respecto del diámetro que pasa por C.

- $\beta = \Omega$ ya que ambos son ángulos inscritos y $BV = BA$ por ser simétricos respecto del diámetro que pasa por H_1 (ortocentro de BAE).

- $\gamma = \delta$ ya que AE y AD son paralelas a t_b y t_c respectivamente, y esas dos tangentes forman el mismo ángulo ρ con BC al ser ángulos inscritos y abarcar ambos el arco BC (observar que $\delta = \gamma = 180 - \rho$).

Solución al problema 4 (Ramón José Aliaga Varea). Primero voy a demostrar que para las tres tangentes se cumple:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma :$$

Partimos de la fórmula para la tangente de la suma:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Como los ángulos $\alpha + \beta$ y γ son suplementarios, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}\gamma$:

$$-\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \Rightarrow -\operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot tg\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

En este caso el recíproco también se cumple, es decir, si $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$, los tres ángulos α, β y γ suman 180^o, ya que podríamos realizar los mismos pasos al revés hasta llegar a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}\gamma$. Como α, β y γ son agudos (ya que sus tangentes son positivas), esto sólo puede darse en el caso de que

$$\alpha + \beta = 180 - \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180.$$

Si las tres tangentes son a, b y c ($a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = tg\gamma$) se cumple que $abc = a + b + c$

Ahora bien, resulta que $\operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3} < 2$, por lo tanto $\operatorname{arctg} 2 > 60^o$. Entonces no puede darse el caso de que los tres a, b y c sean mayores o iguales que 2, pues entonces $\alpha + \beta + \gamma > 180^{o}$. Uno de ellos, por ejemplo a, tiene que ser igual a 1. Entonces tenemos: $bc = 1 + b + c$.

Ahora ya no puede ser ni b ni $c = 1$, pues si, por ejemplo, $b = 1, \beta = 45^{o}$ y $\gamma = 90^{o}$. Entonces $\operatorname{tg}\alpha$ no sería natural. Igualmente se demuestra que no puede darse el caso de que ambos b y c sean mayores que 3, pues entonces sería: $b = 3 + \varepsilon$, $c = 3 + \delta$, con $\varepsilon, \delta > 0$. Entonces escribiríamos:

$$(3+\varepsilon)(3+\delta) = 1+3+\varepsilon+3+\delta \Rightarrow 9+3\varepsilon+3\delta+\varepsilon\delta = 7+\varepsilon+\delta \Rightarrow 2\varepsilon+2\delta+\varepsilon\delta = -2$$

Esto no es posible, ya que los tres sumandos de la izquierda son positivos.

Por lo tanto, al menos uno de b o c (por ejemplo b) es igual a 2 ó a 3. Si $b = 2$, resulta $c = 3$. Si $b = 3$, resulta $c = 2$. Por lo tanto, las tres tangentes buscadas son 1, 2 y 3.

Como para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$ se cumple $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + tg\beta + tg\gamma$, existe un triángulo con esas tres tangentes. Así pues, la solución al problema es $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = 3$.

Solución al problema 5. Supongamos $f(1) = b$. Se tiene que $f(1+b) = b + b$.

f es estrictamente creciente, luego $f(1) = b < f(1+1) < \ldots < f(1+b) = b+b$ y tenemos $b+1$ naturales distintos en $[1, 1+b]$, así que son consecutivos.

En general, para $n > 1$, si $f(n) = c$, $f(n+c) = 2f(n) = 2c = c + c$, $f(n) = c < f(n+1) < \ldots < f(n+c) = c+c$; y $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+c)$ son consecutivos.

Así pues, $f(n) = n + (f(1) - 1)$

Solución al problema 6 (Xavier Gratal, de Barcelona, que mereció Mención Especial del Tribunal Calificador).

Ya que las piezas consisten en cuatro cuadrados 1×1, para que se pueda formar la figura es imprescindible que $n \times n$ sea múltiplo de 4, o sea, que n sea múltiplo de 2.

Consideramos un cuadrado de $n \times n$, donde n es múltiplo de 2.

Llamamos $c_1, c_2, \ldots c_n$ al número de cuadraditos de 1×1 que hay en cada columna del cuadrado en cada momento mientras se va llenando, y llamamos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ al número de cuadraditos que hay en cada fila.

Definimos: $C = c_1 - c_2 + c_3 \ldots\ldots + c_{n-1} - c_n$

$$F = f_1 - f_2 + f_3 - \cdots + f_{n-1} - f_n$$

Como n es par, habrá el mismo número de términos sumando y restando. En el momento en que el cuadrado esté lleno –si se puede llenar– tendremos que:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n \Rightarrow C = 0; \qquad f_1 = f_2 = \cdots = f_n \Rightarrow F = 0.$$

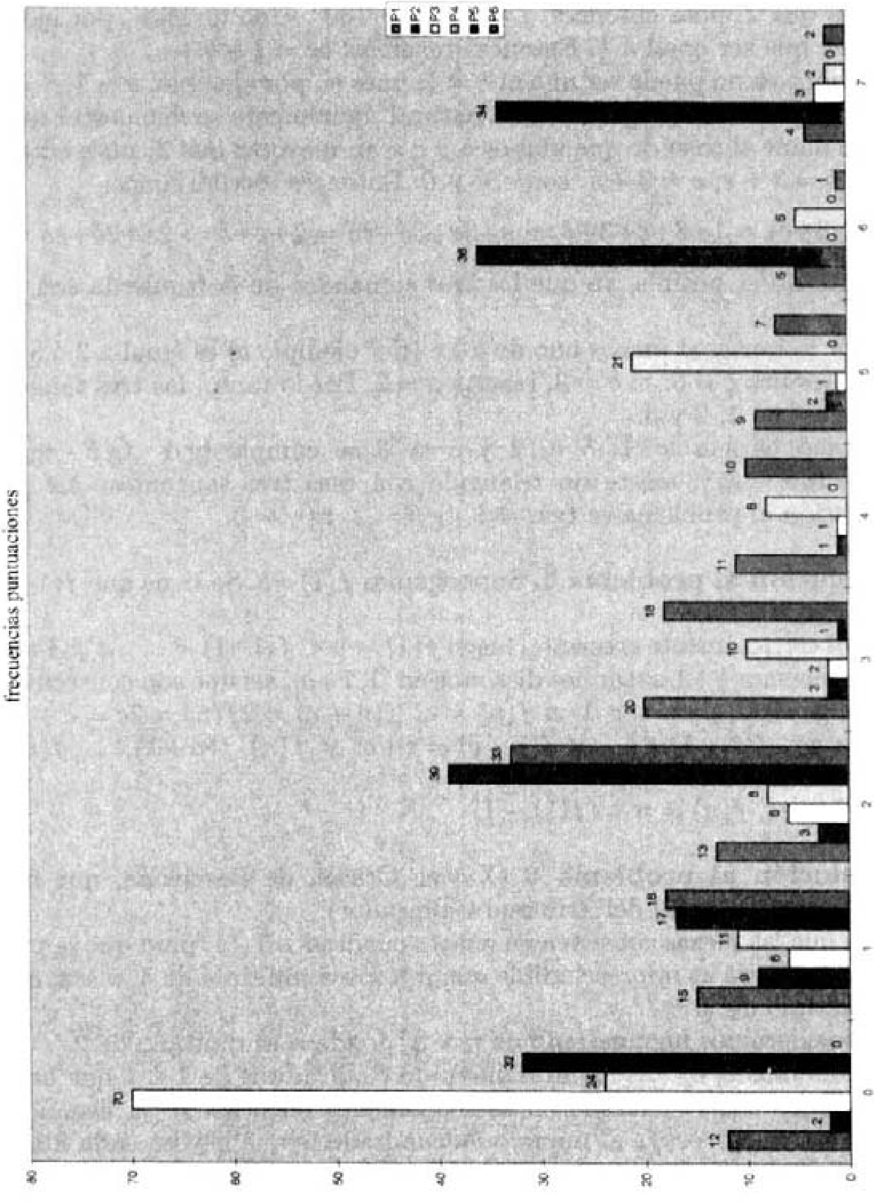

Gráfico 3

Cada vez que se pone una pieza en posición horizontal, el número C permanece invariante, ya que una columna aumenta en 2, y las dos que tiene a los lados aumentan en 1. En cambio, cuando se pone una pieza en posición vertical, C aumenta o disminuye en 2. De esta forma, para que al final se cumpla que $C = 0$, se han de colocar un número par de piezas verticales.

Aplicando el mismo razonamiento a las filas , se llega a que también se han de colocar un número par de piezas horizontales.

Por lo tanto el número total de piezas ha de ser par.

Entonces, $\frac{n \times n}{4}$ es múltiplo de 2, $n \times n$ es múltiplo de 8, y n ha de ser múltiplo de 4.

En este caso, podrá llenarse siempre con piezas de este tipo.

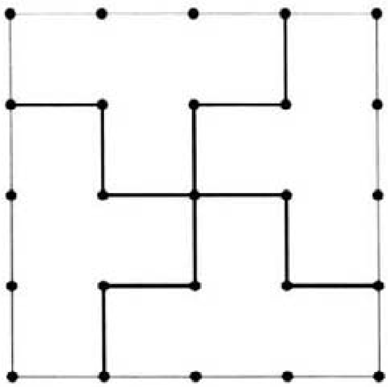

Figura 5

Ganadores

Y por último, los ganadores de esta trigésimo cuarta edición de la Olimpiada Matemática Española. Fueron:

Medallas de Oro

Mario Andrés Montes García, de Salamanca
Ramón José Aliga Varea, de Valencia
David Martín Clavo, de Zaragoza
María Pé Pereira, de Burgos
Beatriz Sanz Merino, de Madrid
Jaime Vinuesa del Río, de Valladolid

Medallas de Plata

Roberto Corral Pérez, de Burgos
Álvaro Navarro Tobar, de Madrid
Juan Mir Pieras, de Baleares
Jorge López Jiménez, de Valencia
José Manuel Ruiz Ruiz de la Villa, de Cantabria
Pedro Recio Uría, de País Vasco

Medallas de Bronce

Hugo Villafañe Roca, de Asturias
Nelo Alberto Maestre Blanco, de Madrid
Isaac Trigo Conde, de Zaragoza
Iñaki Armendáriz Benítez, de Madrid
Carlos Domingo Más, de Valencia
Ángel Faus Tomás, de Cataluña.

Los seis primeros forman el equipo que representará a España en la 39ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se celebrará en Taipei, capital de Taiwan, el próximo mes de Julio.

Este es un equipo poco habitual. Son muy pocas las alumnas que han resultado seleccionadas para formar parte del equipo Nacional. Recuerdo a Cristina Draper (1989) y a la malagueña Raquel (1992). Patricia estuvo en la India en 1996. ¡Y en esta ocasión, son dos!

Y también es un equipo inusitadamente joven. De los 89 participantes, 17 han nacidos después de 1980 (el más joven es de 2º de BUP); tres de los seis Medallas de Oro, Ramón José y Beatriz son de 3º de BUP; María, de 1º de Bachillerato Logse. Y 5 de los 18 premiados, son del 81. Tienen todavía un año más de posible participación. La experiencia que adquieran les será sin duda de gran utilidad: Mario fue ya Medalla de Oro el pasado año, y participó tanto en la Olimpiada Internacional como en la Iberoamericana. También son olímpicos del año pasado David y Jaime, que además han tomado parte en el Kangourou. En cuanto a los más jóvenes, también tienen experiencia previa en Concursos y Olimpiadas: Kangourou, Olimpiada de Básica, Concurso de Problemas de la Puig Adam, Olimpiada de Mayo y Olimpiada del Río de la Plata.

Uno de los objetivos de la Olimpiadaes es favorecer un "encuentro" entre los jóvenes y las Matemáticas; por eso a menudo lo más importante es lo que viene después de la Olimpiada. La de este año ha terminado. Nuestro deseo sería que, para muchos de los participantes, sólo haya sido un comienzo.