La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

44 Olimpiada Internacional de Matemáticas

por

Marco Castrillón y María Gaspar

Después de sus sesiones de trabajo en Alicante y Barcelona, el día 10 de julio, salían rumbo a Tokio Mohamed Blanca Ruiz, Javier Gómez Serrano, Víctor González Alonso, Luis Hernández Corbato, Maite Peña Alcaraz y Daniel Rodrigo López para participar, junto con otros 457 chicos y 30 chicas de todo el mundo, en la 44 Olimpiada Internacional de Matemáticas. Les acompañaba Marco Castrillón, y unos días antes había viajado María Gaspar para incorporarse al Jurado Internacional junto con los Jefes de Delegación de los 82 países participantes.

El Jurado trabajó durante tres días sobre una lista de 27 problemas: seis de álgebra, seis de combinatoria, siete de geometría y ocho de teoría de números. Siempre parece imposible, en las primeras reuniones, que esa especie de mini ONU que es el Jurado pueda ponerse de acuerdo para elegir los seis problemas de la prueba. Milagrosa y afortunadamente, año tras año consigue hacer, si no la mejor elección, al menos una más o menos razonable: variada en contenidos y en grado de dificultad.

Estos han sido los problemas de este año, propuestos por Brasil, Bulgaria, Polonia, Finlandia, Irlanda y Francia respectivamente:

Primer día
Tokio, 13 de julio de 2003

Problema 1

Sea A un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, \dots , 1000000\}$ con 101 elementos exactamente. Demostrar que existen números $t_1, t_2, \dots , t_{100}$ en S tales que los conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots , 100$$

son disjuntos dos a dos.

Problema 2

Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Problema 3

Consideremos un hexágono convexo tal que para cualesquiera dos lados opuestos se verifica la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es igual a $\sqrt{3}/2$ multiplicado por la suma de sus longitudes. Demostrar que todos los ángulos del hexágono son iguales.
Nota: Un hexágono convexo $ABCDEF$ tiene tres parejas de lados opuestos: AB y DE, BC y EF, CD y FA.

Segundo día
Tokio, 14 de julio de 2003

Problema 4
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos vértices están sobre una circunferencia. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde D a las rectas BC, CA y AB respectivamente. Demostrar que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se cortan sobre la recta AC.

Problema 5
Sea n un entero positivo, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 \, .$$

(b) Demostrar que se cumple la igualdad si y sólo si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman una progresión aritmética.

Problema 6
Sea p un número primo. Demostrar que existe un número primo q tal que, para todo entero n, el número $n^p - p$ no es divisible por q.

Una vez elegidos los problemas, queda mucho trabajo antes de las pruebas: decidir el orden en que van a aparecer, acordar la versión definitiva en inglés, idioma de trabajo; aprobar en primer lugar las versiones en los idiomas oficiales (español, francés, alemán y ruso, además del inglés); y, por último, otras aproximadamente cincuenta versiones en los idiomas maternos de los participantes. Las versiones oficiales se proponen y defienden en sesión del Jurado, que las vota o rechaza; las restantes se exponen en paneles antes de su aprobación. Y en ellas aparecen todos los alfabetos y todos los caracteres; pero todo el mundo las mira cuidadosamente –¡cualquier idioma es conocido por al menos dos miembros del Jurado!– no sólo para comprobar que se adaptan a las versiones oficiales, sino también para detectar erratas, ¡todos los años se subsanan algunas! Por último, los organizadores locales tienen que fotocopiar y encarpetar, para que cada estudiante reciba los enunciados en su lengua.

Y por fin, llega el momento de la verdad: las pruebas. Durante la primera media hora de cada día los estudiantes pueden hacer, por escrito, preguntas al Jurado. Decíamos antes que éste no siempre hace la mejor elección: tal ha sido el caso este año con el problema 1 cuya formulación resultó difícil de entender para muchos participantes. Y claro: hemos batido un record de preguntas, ¡91 el primer día! Todas salvo tres –una de ellas, española– sobre el mismo tema. El segundo día tampoco estuvo mal: 69 preguntas. Ya nos esperábamos muchas sobre el doble sumatorio que aparece en el problema 4.

Tras las coordinaciones, el Jurado decidió, en su última reunión, los cortes para las Medallas de Oro, Plata y Bronce. En las bases de la Olimpiada se dice que no más de la mitad de los participantes recibirá medalla; pero esta norma se ha incumplido repetidas veces (por ejemplo, en los últimos años, en Mar del Plata y en Washington). Pues bien, este año, 230 estudiantes (sobre 457) tenían 12 o más puntos, mientras que 210 (46% del total) tenían 13 o más. Tras un largo debate, se decidió ser respetuosos con la norma... lo que le costó la medalla de bronce, entre otros 20 participantes, a Luis Hernández. Además, 26 concursantes (con al menos 36 puntos) recibieron Medalla de Oro, y 69 , con 19 o más puntos, Medalla de Plata. Tres estudiantes, dos vietnamitas y un chino, obtuvieron la puntuación máxima de 42 puntos.

Como anexo se recogen al final de esta sección las estadísticas de resultados.

Entre nuestros chicos, Víctor González Alonso obtuvo 16 puntos y Medalla de Bronce; Luis Hernández Corbato 12 puntos y Mención de Honor por el problema 5 ; Daniel Rodrigo López y Maite Peña Alcaraz 10 puntos y sendas Menciones de Honor (Daniel por el problema 4 y Maite por el 1); Mohamed Blanca Ruiz, 9 puntos y Mención de Honor por el problema 1, y Javier Gómez Serrano obtuvo 2 puntos. En el próximo número de La Gaceta publicaremos sus soluciones de los problemas 1,4 y 5 hechas en la prueba y la del 2, que ya nos ha mandado Luis. Seguimos esperando soluciones a los problemas 3 y 6.

Dani, Luis, Víctor y Javier acaban de comenzar sus estudios de matemáticas; Maite y Mohamed, actualmente en 2° de Bachillerato, tienen todavía un año de posible participación.

En la reunión final del Jurado, se dió la bienvenida a la familia olímpica a Mozambique y a Arabia Saudí que, según la normativa de la IMO, debían asistir como observadores en esta edición antes de su plena incorporación como países participantes a partir del año que viene. Asimismo, durante esta Olimpiada, España ha presentado oficialmente su candidatura como sede de la IMO para el año 2008. Son también candidatos los Países Bajos y Brasil. La elección de la sede se votará el año próximo, durante la 45 Olimpiada que tendrá lugar en Grecia. Las sedes de 2005, 2006 y 2007 están ya adjudicadas a Méjico, Eslovenia y Vietnam respectivamente.

Frecuencias de puntuaciones

puntos	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0	123	117	424	89	194	357
1	18	119	5	31	161	64
2	111	40	0	24	19	6
3	0	93	3	35	6	1
4	0	0	1	1	5	0
5	24	20	0	3	1	1
6	1	1	1	2	4	1
7	180	67	23	272	67	24
media total	3,58	2,30	0,40	4,64	1,61	0,58
media España	4,17	0,67	0	3,33	1,67	0

Resultados de los países participantes

País	**Puntos**	**Oro**	**Plata**	**Bronce**	**Mención**
Albania	23	0	0	0	1
Alemania	112	1	2	1	2
Argentina	91	1	1	2	1
Armenia	61	0	0	3	2
Australia	92	0	2	2	2
Austria	38	0	0	0	3
Azerbaiján	66	0	1	1	3
Bélgica	70	0	1	1	3
Bielorrusia	111	1	2	2	0
Bosnia Herzegovina	61	0	0	2	2
Brasil	92	0	1	3	2
Bulgaria	227	6	0	0	0
Canadá	119	2	0	3	0
China	211	5	1	0	0
Chipre	23	0	0	0	1

País	Puntos	Oro	Plata	Bronce	Mención
Colombia	67	0	0	3	2
Corea	157	2	4	0	0
Croacia	80	0	0	3	3
Cuba (1 estudiante)	14	0	0	1	0
Dinamarca	27	0	0	0	2
Ecuador	11	0	0	0	1
Eslovaquia	77	0	0	4	2
Eslovenia	18	0	0	0	1
España	59	0	0	1	4
Estados Unidos	188	4	2	0	0
Estonia	47	0	0	0	3
Filipinas	9	0	0	0	0
Finlandia	43	0	0	1	2
Francia	95	0	2	2	1
Georgia	86	0	1	2	3
Grecia	88	0	1	4	1
Hong Kong	91	0	2	2	1
Hungría	128	1	3	1	1
India	115	0	4	1	1
Indonesia	70	0	0	2	4
Irán	112	0	3	2	1
Irlanda	21	0	0	0	1
Islandia	33	0	0	1	1
Israel	103	0	2	3	0
Italia	50	0	0	1	4
Japón	131	1	3	2	0
Kazjastán	119	1	2	2	1
Kirzigistán	50	0	0	2	2
Kuwait	8	0	0	0	0
Letonia	50	0	0	1	2
Lituania	49	0	0	2	2
Luxemburgo	25	0	0	1	1
Macao	40	0	0	2	0
Macedonia	54	0	0	2	3
Malasia	26	0	0	0	1
Marruecos	43	0	0	0	5
Méjico	64	0	0	3	1
Moldavia	88	0	1	2	3
Mongolia	93	0	1	3	1
Noruega	62	0	1	0	2
Nueva Zelanda	43	0	0	0	3

País	Puntos	Oro	Plata	Bronce	Mención
Países Bajos	30	0	0	0	0
Paraguay (1 estudiante)	0	0	0	0	0
Perú	37	0	0	1	2
Polonia	102	1	2	0	2
Portugal	22	0	0	0	1
Puerto Rico	23	0	0	1	0
Reino Unido	128	1	2	3	0
República Checa	79	0	1	2	3
Rumanía	143	1	4	1	0
Rusia	167	3	2	1	0
Servia y Montenegro	101	0	3	1	2
Singapur	71	0	0	2	3
Sri Lanka	4	0	0	0	0
Sudáfrica	60	0	0	3	0
Suecia	52	0	0	1	3
Suiza	26	0	0	0	1
Tailandia	111	1	1	3	1
Taiwán	114	1	2	2	1
Trinidad Tobago	33	0	0	0	2
Turkmenistán	37	0	0	1	3
Turquía	133	1	3	1	1
Ucrania	118	1	2	3	0
Uruguay	29	0	0	0	2
Uzbequistán	49	0	1	1	1
Venezuela	10	0	0	0	0
Vietnam	172	2	3	1	0

Solución de algunos de los problemas propuestos en la I.M.O. 2001[1]

por

Mercedes Sánchez Benito

A raíz de la publicación, en esta misma sección, del artículo *Otros problemas de la I.M.O. de Washington 2001* he recibido algunos comentarios, unos de alumnos y otros de profesores interesados en este tipo de problemas, sobre distintas formas de enfocarlos pero sobre todo muchas sugerencias para que en un futuro próximo se publicaran sus soluciones.

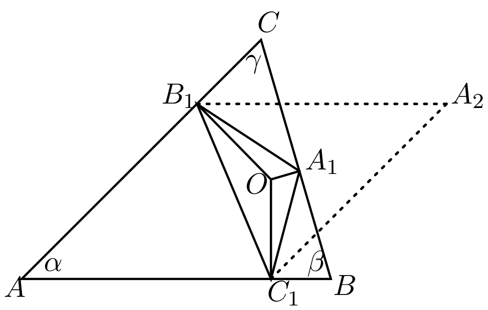
Puesto que no es muy frecuente encontrar este tipo de material en castellano he decidido escribir las soluciones basadas en la propuesta oficial con alguna pequeña variación.

Estoy convencida de que estas soluciones no son las únicas ni siquiera las más bonitas, pero no tengo la menor duda de que muchos de vosotros las mejoraréis.

Primer problema

Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea O un punto interior. El punto A_1 está sobre el lado BC de modo que OA_1 es perpendicular a BC. Se definen B_1 sobre CA y C_1 sobre AB, de forma análoga. Prueba que O es el centro de la circunferencia circunscrita si y sólo si el perímetro del triángulo $A_1B_1C_1$ es mayor o igual que cada uno de los perímetros de los triángulos AB_1C_1, BA_1C_1 y CA_1B_1.

Solución. Sea O el circuncentro del triágulo ABC, y A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente, entonces se tiene que $P_{A_1B_1C_1} = P_{AB_1C_1} = P_{BC_1A_1} = P_{CA_1B_1}$, donde P_{XYZ} representa el perímetro del triángulo XYZ.



[1]Publicados en La Gaceta de la RSME **5.3** (2002), pp. 708–709.

Recíprocamente, supongamos que $P_{A_1B_1C_1} \geq P_{AB_1C_1}, P_{BC_1A_1}, P_{CA_1B_1}$, y entonces llamamos:

$$\begin{array}{lll} \angle CAB = \alpha, & \angle CA_1B_1 = \alpha_1, & \angle BA_1C_1 = \alpha_2, \\ \angle ABC = \beta, & \angle AB_1C_1 = \beta_1, & \angle CB_1A_1 = \beta_2, \\ \angle BCA = \gamma, & \angle BC_1A_1 = \gamma_1, & \angle AC_1B_1 = \gamma_2. \end{array}$$

Construimos A_2, punto de intersección de las rectas paralelas a AB y AC trazadas desde B_1 y C_1 respectivamente, como muestra la figura.

Supongamos que $\gamma_1 \geq \alpha$ y $\beta_2 \geq \alpha$. Si una de esas desigualdades es estricta, entonces A_1 es un punto interior del triángulo $B_1C_1A_2$ y $P_{A_1B_1C_1} < P_{A_2B_1C_1} = P_{AB_1C_1}$, lo que es una contradicción.

Si $\gamma_1 = \alpha$ y $\beta_2 = \alpha$, entonces $A_1 = A_2$ y además $B_1O \perp A_1C_1$ y $C_1O \perp A_1B_1$. Es decir, O es el ortocentro (intersección de las alturas) del triángulo $A_1B_1C_1$ y $OA_1 \perp B_1C_1$.

Por lo tanto $B_1C_1 \parallel BC$. Esto implica que A_1, B_1 y C_1 son los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente; por lo tanto los triángulos $AB_1C_1, A_1B_1C_1, A_1B_1C$ y A_1BC_1 son congruentes. Y se tiene que O es el circuncentro del triángulo ABC. Análogamente se tiene la misma conclusión si $\alpha_1 \geq \beta$ y $\gamma_2 \geq \beta$, o $\beta_1 \geq \gamma$ y $\alpha_2 \geq \gamma$.

Supongamos ahora que no se verifica ninguno de estos casos, es decir que no es verdad que

$$\gamma_1 \geq \alpha \quad \text{y} \quad \beta_2 \geq \alpha,$$

o

$$\alpha_1 \geq \beta \quad \text{y} \quad \gamma_2 \geq \beta,$$

o

$$\beta_1 \geq \gamma \quad \text{y} \quad \alpha_2 \geq \gamma.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\gamma_1 < \alpha$. Entonces $\alpha_2 > \gamma$, ya que $\gamma_1 + \alpha_2 = \pi - \beta = \alpha + \gamma$. Por lo tanto $\beta_1 < \gamma$, lo que implica que $\gamma_2 > \beta$; es decir $\alpha_1 < \beta$, y de aquí se tiene que $\beta_2 > \alpha$.

Conclusión,

$$\gamma_1 < \alpha < \beta_2, \quad \alpha_1 < \beta < \gamma_2, \quad \text{y} \quad \beta_1 < \gamma < \alpha_2.$$

Como AC_1OB_1 y A_1CB_1O son cuadriláteros inscriptibles, se tiene que $\angle AOB_1 = \gamma_2$ (abarcan el mismo arco) y $\angle COB_1 = \alpha_1$. Por lo tanto, $AO = OB_1/\cos\gamma_2 > OB_1/\cos\alpha_1 = CO$.

Del mismo modo, las desigualdades $\gamma_1 < \beta_2$ y $\beta_1 < \alpha_2$ nos llevarían a que $CO > BO$ y $BO > AO$, es decir a una contradicción.

Nota. El mismo argumento sirve para demostrar que O es el circuncentro del triángulo ABC sí y sólo si $P_{A_1B_1C_1} \leq P_{AB_1C_1}, P_{BC_1A_1}, P_{CA_1B_1}$.

Segundo problema

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reales cualesquiera. Prueba la siguiente desigualdad:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Solución. Aplicaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz ,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

para números reales cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Llamando $a_k = x_k/(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2)$ para $k = 1, 2, \cdots, n$, basta probar que

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2 < 1.$$

Para $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2 &= \frac{x_k^2}{\left(1+x_1^2+\cdots+x_k^2\right)^2} \\ &\leq \frac{x_k^2}{\left(1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2\right)\left(1+x_1^2+\cdots+x_k^2\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2\right)} - \frac{1}{\left(1+x_1^2+\cdots+x_k^2\right)}.\end{aligned}$$

Para $k = 1$, un razonamiento análogo nos proporciona la desigualdad

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{1+x_1^2}.$$

Sumando ambas desigualdades se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < 1.$$

Tercer problema

Encuentra todos los enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

siendo $a_0 = 1$ y $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq {a_k}^2(a_k - 1)$ para $k = 1, 2 \ldots, n - 1$.

Solución. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos que satisfacen las condiciones del problema. Entonces $a_k > a_{k-1}$, y por lo tanto $a_k \geq 2$ para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. La desigualdad $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ se puede escribir de la forma

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k+1} - 1} \leq \frac{a_{k-1}}{a_k - 1}.$$

Sumando esas desigualdades para $k = i + 1, i + 2, \ldots, n - 1$, junto con la desigualda $a_{n-1}/a_n < a_{n-1}/(a_n - 1)$, obtenemos

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1} - 1}. \qquad (*)$$

Vamos a determinar $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Utilizando el enunciado y $(*)$, con $i = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{a_1} \leq \frac{99}{100} < \frac{1}{a_1 - 1},$$

es decir $a_1 = 2$. Para $i = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1}\right) < \frac{1}{a_2 - 1},$$

lo que nos dice que $a_2 = 5$. Repitiendo este argumento con $i = 2$ y con $i = 3$ obtenemos

$$\frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{1}{a_3 - 1},$$

de donde $a_3 = 56$, y

$$\frac{1}{a_4} \leq \frac{1}{a_3}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) < \frac{1}{a_4 - 1},$$

lo que implica que $a_4 = 25{\cdot}56^2 = 78400$. Si continuamos con el mismo razonamiento para determinar a_5 encontramos que

$$\frac{1}{a_5} \leq \frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56} - \frac{56}{25{\cdot}56^2}\right) = 0,$$

lo cual es imposible.

Es fácil comprobar que los enteros positivos $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 56$ y $a_4 = 25{\cdot}56^2$ verifican las condiciones del problema. El razonamiento nos muestra claramente que la solución es única.

Cuarto problema

Encuentra todas las n-tuplas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tales que para cada j con $0 \leq j \leq n$, $\quad x_j$ es igual al número de veces que aparece j en la n-tupla.

Solucion. Sea $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una n-tupla que verifica dicha condición. como cada x_j es el número de veces que aparece j, dicha n-tupla está formada por enteros no negativos. Hay que recalcar que $x_0 > 0$ ya que $x_0 = 0$ es imposible.

Supongamos que m sea el número de términos positivos que hay en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como $x_0 = p \geq 1$ implica que $x_p \geq 1$, y por lo tanto $m \geq 1$. Observamos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = m + 1$ ya que la suma cuenta el número total de términos positivos de la n-tupla , y $x_0 > 0$.

Nota. Para cada $j > 0$ que aparezca como algún x_i, la n-tupla será lo suficientemente larga para que esté incluido el término x_j , ya que la n-tupla contiene j valores de i y al menos otro valor, el valor j mismo si $i \neq j$ y el valor 0 si $i = j$.

Puesto que la suma tiene exactamente m términos positivos, $m-1$ de esos términos son igual a 1, uno igual a 2, y el resto son 0. Además sólo x_0 puede ser mayor que 2, es decir para $j > 2$ la posibilidad de que $x_j > 0$ sólo se da si $j = x_0$. En particular, $m \leq 3$.

Por lo tanto tenemos que considerar tres casos. En cada caso, hay que tener en cuenta que $m - 1$ de los términos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son igual a 1, un término es igual a 2, y el resto son 0.

Caso (i): $m = 1$. Tenemos $x_2 = 2$ ya que $x_1 = 2$ es imposible. Por lo tanto $x_0 = 2$ proporciona la n-tupla $(2, 0, 2, 0)$.

Caso (ii): $m = 2$. O bien $x_1 = 2$ o $x_2 = 2$. La primera posibilidad nos proporciona $(1, 2, 1, 0)$ y la segunda nos da $(2, 1, 2, 0, 0)$.

Caso (iii): $m = 3$. En este caso, $x_p > 0$ para algún $p \geq 3$. En este caso, $x_0 = p$ y $x_p = 1$. Entonces $x_1 = 1$ no puede ser, y tiene que ser $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. El resultado es la n-tupla $(p, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0)$.

En resumen, la solución está formada por tres n-tuplas finitas y una familia infinita :

$$(2, 0, 2, 0), \quad (1, 2, 1, 0), \quad (2, 1, 2, 0, 0), \quad (p, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0), \quad p \geq 3.$$

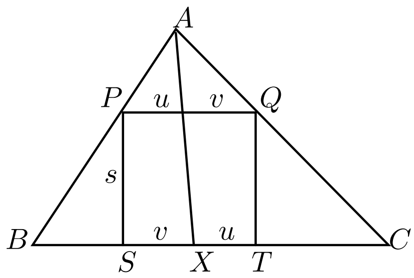
Quinto problema

Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en un triángulo acutángulo ABC, de manera que dos de los vértices del cuadrado están sobre el lado BC, el otro vértice está sobre AB y el otro sobre AC. Los puntos B_1 y C_1 se definen de forma análoga inscribiendo cuadrados con dos vértices sobre los lados AC y AB respectivamente. Prueba que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son concurrentes.

Solución. Sea $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, y $\gamma = \angle BCA$ los ángulos del triángulo ABC. La recta que pasa por A y por A_1 corta al lado BC en X. Análogamente, la recta que pasa por B y por B_1 corta al lado CA en Y, y la recta que pasa por C y por C_1 corta al lado AB en Z. Teniendo en cuenta el recíproco del Teorema de Ceva, basta probar que

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1.$$

Consideremos en primer lugar BX/XC. Supongamos que el cuadrado con centro A_1 tiene lado s, los vértices P y Q sobre los lados AB y AC, respectivamente, y los vértices S y T sobre BC con el vértice S entre B y T. Como AX pasa por el centro del cuadrado $QPST$, si corta al lado PQ del cuadrado en dos segmentos de longitud u y v, entonces corta al lado ST en dos segmentos de longitud v y u como muestra la figura.



Entonces tenemos que

$$\frac{BX}{XC}=\frac{u}{v}=\frac{BX+u}{XC+v}=\frac{BT}{SC}=\frac{BS+s}{TC+s}=\frac{s\cot\beta+s}{s\cot\gamma+s}=\frac{\cot\beta+1}{\cot\gamma+1}.$$

De forma análoga,

$$\frac{CY}{YA}=\frac{\cot\gamma+1}{\cot\alpha+1}\qquad\text{y}\qquad\frac{AZ}{ZB}=\frac{\cot\alpha+1}{\cot\beta+1}.$$

Por lo tanto

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1,$$

Sexto problema

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x+y &= z+u \\ 2xy &= zu \end{cases}$$

Encuentra el mayor valor del número real m tal que $m\le x/y$ para todas las soluciones enteras positivas (x,y,z,u) del sistema, con $x\ge y$.

Solucion. Si elevamos al cuadrado la primera ecuación y le restamos la segunda multiplicada por 4, obtenemos

$$x^2 - 6xy + y^2 = (z-u)^2,$$

y de aquí se tiene que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = \left(\frac{z-u}{y}\right)^2. \qquad (*)$$

La función cuadrática $\omega^2 - 6\omega + 1$ vale 0 para $\omega = 3 \pm 2\sqrt{2}$, y es positiva para $\omega > 3 + 2\sqrt{2}$. Puesto que $x/y \geq 1$ y $(*)$ is un cuadrado, tenemos que $x/y > 3 + 2\sqrt{2}$.

Veamos que x/y está tan cerca de $3 + 2\sqrt{2}$ como se quiera, por lo tanto $m = 3 + 2\sqrt{2}$.

Probaremos esto viendo que el término de $((z-u)/y)^2$ en $(*)$ se puede hacer tan pequeño como quiera.

Primero trataremos de encontrar un método para generar soluciones del sistema. Si p es un primo divisor de z y de u, entonces p es un divisor de x y de y. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que z y u son relativamente primos.

Si elevamos la primera ecuación al cuadrado y le restamos dos ceces la segunda, tenemos que

$$(x-y)^2 = z^2 + u^2.$$

es decir $(z, u, x-y)$ son números pitagóricos , y podemos suponer que u es par. Por lo tanto existen enteros positivos a y b relativamente primos, uno de los cuales es par y el otro impar, tales que

$$z = a^2 - b^2, \qquad u = 2ab, \qquad \text{y} \qquad x - y = a^2 + b^2.$$

Combinando esas ecuaciones con $x + y = z + u$, encontramos que

$$x = a^2 + ab \qquad \text{y} \qquad y = ab - b^2.$$

Observamos que $z - u = a^2 - b^2 - 2ab = (a-b)^2 - 2b^2$.

Si $z - u = 1$, tenemos la ecuación de Pell $1 = (a-b)^2 - 2b^2$, cuyas soluciones elementales son $a - b = 3$, $b = 2$. Sabemos que esta ecuación tiene infinitas soluciuones en enteros positivos $a - b$ y b, y que ambas cantidades se pueden hacer infinitamente grandes. Por lo tanto $y = ab - b^2$ se puede hacer arbitrariamente grande. Por lo tanto el lado derecho de la igualdad $(*)$ se puede hacer arbitrariamente pequeño y el correspondiente valor de x/y puede estar tan próximo a $3 + 2\sqrt{2}$ como se quiera.

Mercedes Sánchez Benito
IES Luis Buñuel, Madrid.
Correo electrónico: `merche_sanchez@mat.ucm.es`