La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

45 Olimpiada Internacional de Matemáticas

por

Mercedes Sánchez Benito

Este año, al igual que los Juegos Olímpicos, la sede de la Olimpiada Matemática Internacional ha sido Atenas.

El equipo español lo han formado, por primera vez en la historia, 3 chicas, María Isabel Cordero Marcos, Elisa Lorenzo García y Maite Peña Alcaraz, y 3 chicos, Francisco Javier Hernández Heras, Joaquim Serra Montoli y Miguel Teixidó Román.

Entre los días 10 y 17 de julio compartimos con otros 86 países participantes la luminosidad de una ciudad, la belleza de un país, la simpatía de un pueblo y el buen hacer matemático requerido en un acontecimiento tan singular como es la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Cada día estuvo dedicado a uno de los excelentes maestros matemáticos que la civilización griega ha proporcionado a la humanidad, y recordando alguna de sus aportaciones más relevantes se proponía "el problema del día" relacionado con alguno de sus trabajos.

El primer día se dedicó a Thales de Mileto ($640-546$ A.C.), el más juicioso de los Siete Sabios de la Antigüedad. Recordando que Thales fue el primero en probar que los ángulos que se oponen a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales, los organizadores propusieron el siguiente problema: En un triángulo ABC, dibujamos la mediana AM y las bisectrices BD y CE que cortan a la mediana AM en los puntos K y L. Si $BK = CL$ probar que el triángulo ABC es isósceles.

El domingo 11 estuvo dedicado a Pitágoras de Samos (580 – 500 A. C.) que fundó la escuela pitagórica donde, entre otras disciplinas, la Aritmética y la Geometría se desarrollaron ampliamente.

El día 12 fue el día de Euclides de Alejandría (330-270 A.C.) el más famoso de los matemáticos de todos los tiempos y el problema del día estuvo relacionado con la razón áurea. El siguiente día estuvo dedicado a Arquímedes de

Siracusa (287 − 212 A.C.) uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos; una vez más el problema del día fue geométrico: sea AB el diámetro de un semicírculo y C un punto del plano, si CB y CD son tangentes y DE es perpendicular a AB probar que AC divide a DE en dos segmentos iguales.

El día 14 estuvo dedicado a Apolonio de Pérgamo (265 − 170 A.C.) llamado por sus contemporáneos el "Gran Geométra"; el problema del día estuvo relacionado con la duplicación del cubo sin las restricciones impuestas por la construcción euclídea.

El día siguiente se dedicó a Diofanto de Alejandría (250), considerado "el padre del álgebra", y el problema del día estuvo relacionado con los primos gemelos. Hypatia de Alejandría (370 − 415) tuvo su día el viernes 16. Y el último día estuvo dedicado a Carathéodory, el matemático griego más famoso de la época moderna.

Antes del viaje a Grecia los estudiantes que formaban el equipo español, se reunieron, primero en Córdoba y después en Barcelona para llevar a cabo unas intensas sesiones de preparación. También estuvieron invitados los estudiantes que resultaron premiados en la fase nacional celebrada en Ciudad Real y que, por razones de edad y escolarización, pueden seguir participando en la Olimpiada. Hay que agradecer el interés y soporte económico de la Universidad de Córdoba y la Universidad Politéctica de Barcelona, pero sobre todo, la labor desinteresada de los profesores que han dedicado muchas horas a la preparación de estos alumnos.

Maite Peña tuvo una medalla de bronce, María Isabel Cordero, Francisco Javier Hernández y Joaquim Serra tuvieron mención de honor; pero todos ellos han sido premiados con la experiencia vivida en Grecia.

Todos hemos disfrutado de la luz cegadora del mar Egeo, de la belleza que se siente al contemplar de cerca los mármoles del Partenon y de la ciudad de Atenas con sus calles abigarradas y coloristas, sus mercados y sus tabernas.

Realmente este año la Olimpiada Internacional se ha celebrado en un lugar muy especial, un lugar cuya esencia la resume Aristófanes, cuando hace decir al dios Hermes "patria es todo lugar en el que las circunstancias resultan favorables". Todos los organizadores hicieron todo lo posible para que las circunstancias nos fueran muy favorables.

He aquí los problemas que se propusieron. Como siempre, cada problema vale 7 puntos y cada sesión se desarrolla en cuatro horas y media.

Primer día, lunes 12 de julio de 2004

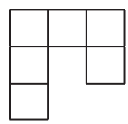
Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. La circunferencia de diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle MON$ se cortan en R. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto en común que pertenece al lado BC.

Problema 2. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2\,P(a+b+c)$$

para todos los números reales a, b, c tales que $ab+bc+ca=0$.

Problema 3. Un *gancho* es una figura formada por seis cuadrados unitarios como se muestra en el diagrama



o cualquiera de las figuras que se obtienen de ésta rotándola y/o reflejándola. Determinar todos los rectángulos $m \times n$ que pueden cubrirse con ganchos de modo que

- el rectángulo se cubre sin huecos y sin superposiciones;
- ninguna parte de ningún gancho sobresale del rectángulo.

Segundo día, martes 13 de julio de 2004

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero. Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reales positivos tales que

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de los lados de un triángulo para todos los i, j, k con $1 \leq i < j < k \leq n$.

Problema 5. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni del ángulo $\angle ABC$ ni del ángulo $\angle CDA$. Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{y} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una misma circunferencia si y sólo si $AP = CP$.

Problema 6. Un entero positivo es *alternante* si, en su representación decimal, en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro es impar.
Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.

Resultados de los países participantes

País	Ptos	O	P	B	MH
Albania	57	0	0	1	1
Alemania	130	0	3	1	2
Arabia Saudí	4	0	0	0	0
Argentina	92	1	0	2	1
Armenia	98	0	0	4	1
Australia	125	1	1	2	1
Austria	55	0	0	1	1
Azerbaiján	72	0	1	0	0
Bélgica	86	0	1	2	1
Bielorrusia	154	0	4	2	0
Bosnia Herzegovina	40	0	0	0	2
Brasil	132	0	2	4	0
Bulgaria	194	3	3	0	0
Canadá	132	1	0	3	2
China	220	6	0	0	0
Chipre	49	0	0	1	1
Colombia	122	0	2	2	0
Corea	166	1	3	2	0
Croacia	89	0	0	3	3
Cuba (1 estudiante)	17	0	0	1	0
Dinamarca	46	0	0	1	0
Ecuador	14	0	0	0	1
Eslovaquia	119	0	3	0	3
Eslovenia	69	0	0	2	2
España	57	0	0	1	3
Estados Unidos	212	5	1	0	0
Estonia	85	0	0	2	3
Filipinas	16	0	0	0	0
Finlandia	49	0	0	1	0
Francia	94	0	0	4	1
Georgia	123	0	0	5	1
Grecia	126	0	2	3	1
Hong Kong	120	0	2	2	2
Hungría	187	2	3	1	0
India	151	0	4	2	0
Indonesia	61	0	0	1	3
Irán	178	1	5	0	0
Irlanda	48	0	0	1	0
Islandia	35	0	0	0	1
Israel	147	1	1	4	0
Italia	69	0	0	2	1
Japón	182	2	4	0	0
Kazjastán	132	2	0	2	0
Kirguistán	63	0	0	1	1
Kuwait	5	0	0	0	0
Letonia	63	0	0	1	2
Lituania	65	0	0	0	5
Luxemburgo	36	0	1	0	1
Macao	86	0	0	2	2
Macedonia	71	0	0	1	4
Malasia	34	0	0	1	1
Marruecos	88	0	0	3	3
Méjico	96	0	0	3	1
Moldavia	140	2	0	4	0
Mongolia	135	0	3	2	0
Mozambique	13	0	0	0	0
Noruega	55	0	0	0	0
Nueva Zelanda	56	0	0	2	0
Países Bajos	53	0	0	0	2
Paraguay	13	0	0	0	1
Perú	49	0	0	2	0
Polonia	142	2	1	1	1
Portugal	26	0	0	0	2
Puerto Rico	43	0	1	0	1
Reino Unido	134	1	1	4	0
República Checa	109	0	2	2	0
Rumanía	176	1	4	1	0
Rusia	205	4	1	1	0
Servia y Montenegro	132	0	2	3	0
Singapur	139	0	3	3	0
Sry Lanka	33	0	0	0	2
Sudáfrica	110	0	3	1	1
Suecia	75	0	0	3	1
Suiza	57	0	0	2	1
Tailandia	99	0	0	4	2
Taiwán	190	3	3	0	0
Trinidad Tobago	29	0	0	0	1
Túnez	31	0	0	0	0
Turkmenistán	52	0	0	2	1
Turquía	118	0	2	3	0
Ucrania	174	1	5	0	0
Uruguay	47	0	0	0	0
Uzbequistán	79	0	0	3	2
Venezuela	15	0	0	0	1
Vietnam	196	4	2	0	0