# No basta con cuatro colores

por

**Hud Hudson**[1]

Reproducimos a continuación el texto *Four Colors Do Not Suffice*, publicado originalmente en el *American Mathematical Monthly* de mayo de 2003. La Gaceta de la RSME desea manifestar su agradecimiento a la MAA y a Hud Hudson por los permisos editoriales para su traducción y publicación.

## 1. La historia

Bienvenidos a la tierra plana de Zenopia:

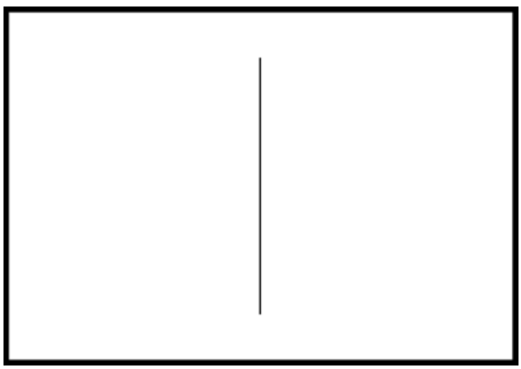

Figura 1.

Zenopia es una isla bidimensional, un país con seis provincias, cada una de las cuales manifiesta un intenso orgullo sobre su perímetro infinito y una encantadora modestia sobre su área finita. Topológicamente, Zenopia es un rectángulo que ni es abierto ni es cerrado (debido a la ausencia de una región rectilínea que va de Norte a Sur justo en el centro de su interior). Sin embargo, los habitantes de Zenopia nunca han puesto en duda la respetabilidad de este tipo de rectángulos, y tampoco deberíamos hacerlo nosotros. Nombremos a la fina tira de espacio que falta en el interior de Zenopia con el sugerente nombre de *Borde*, y representémosla con la línea continua que aparece en la Figura 1.

[1]Hud Hudson es Profesor de Filosofía en la Western Washington University. Es licenciado en Filosofía por la Boise State University y Doctor en Filosofía por la Universidad de Rochester. Sus intereses de investigación incluyen la Metafísica analítica contemporánea, la Historia de la Filosofía Moderna y la Historia de la Religión.

(Recuérdese, sin embargo, que mientras que una línea tiene un grosor, la región Borde no lo tiene. Tales son las desventajas de buscar una representación gráfica adecuada).

La primera (y más antigua) provincia de Zenopia es Rojolandia, en verdad una provincia curiosa. Situada un pelín al Sur y otro poco al Este de la esquina noroeste de Zenopia, Rojolandia comienza su largo y tortuoso camino a través de la mitad occidental del país. La imagen de la Figura 2 puede servir de referencia:

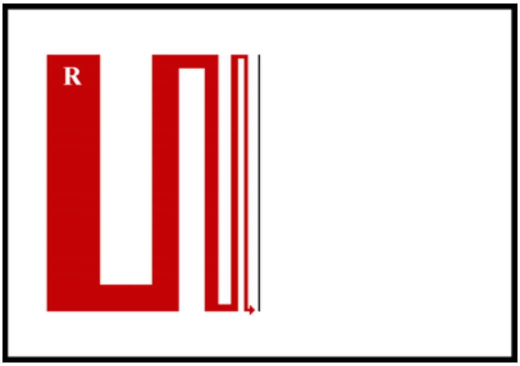


Figura 2.

Como se puede ver, Rojolandia es muy predecible; va hacia el Sur, luego gira al Este, más tarde al Norte, de nuevo al Este, otra vez hacia el Sur ... y continúa describiendo meandros sin fin. Veamos algunas cuestiones interesantes sobre esta provincia. Rojolandia es una región conexa, y su segmento más occidental, que está situado justo a una *kata* (la medida oficial de longitud en Zenopia) del Borde, mide un *ana* de ancho (un *ana*, como todo el mundo sabe, es un quinto de *kata*). El segundo segmento más occidental, ubicado a media *kata* del Borde, tiene una anchura de medio *ana*. Los siguientes segmentos, el tercero, el cuarto y el quinto, se sitúan a un cuarto, un octavo y un dieciseisavo de *kata* del Borde, y miden un cuarto, un octavo y un dieciseisavo de *ana* de ancho, respectivamente. Y así sigue, con esta regularidad tan reconfortante.

La segunda provincia de Zenopia es Negrolandia, una provincia también bastante curiosa. Negrolandia es exactamente igual que Rojolandia, sólo que boca abajo y yendo de Este a Oeste, en lugar de Oeste a Este. Un poquito al Norte y otro poco al Oeste de la esquina sudeste de Zenopia, Negrolandia comienza su propio largo y tortuoso camino a través de la mitad oriental del país. Negrolandia es tan predecible como su provincia gemela, Rojolandia: empieza hacia el Norte, luego gira al Oeste, más tarde al Sur, de nuevo al Oeste, para el Norte ... y sigue describiendo meandros sin fin con tanta pericia como su región hermana. Más aún, al igual que en la occidental Rojolandia, los segmentos que se encuentran a $1/n$ *katas* del Borde miden $1/n$ *anas* de ancho. Tal es así que sus fundadores aseguraban (pese a que nadie fue nunca capaz de recorrer la provincia de punta a punta) que no llegaba a invadir la mitad occidental de Zenopia. Sin embargo, tanto Negrolandia como Rojolandia se acercan arbitrariamente a cada punto de la región que hemos dado en llamar Borde.

Los mapas antiguos —que describían el país antes de la creación y establecimiento de las fronteras de las provincias posteriores— representaban a la isla de Zenopia de la siguiente manera:


Figura 3.

Entonces empezó el lío. Cuatro tribus nativas de Zenopia comenzaron a discutir sobre quién tenía el dominio de la que una vez fue llamada, y con acierto, la tercera provincia de Zenopia: *i.e.*, la provincia que era el complementario de la unión de Negrolandia y Rojolandia, representada en blanco en la Figura 3.

Los Noroccidentales, los Sudoccidentales, los Nororientales y los Sudorientales, todos ellos reclamaban para sí el gobierno de esta provincia, y una larga y cruenta guerra estalló. La consecuencia fue que esta original tercera provincia de Zenopia fue dividida equitativamente entre las cuatro tribus: los Noroccidentales ocuparon Verdilandia Clara;


Figura 4.

los Sudoccidentales, Verdilandia Oscura;

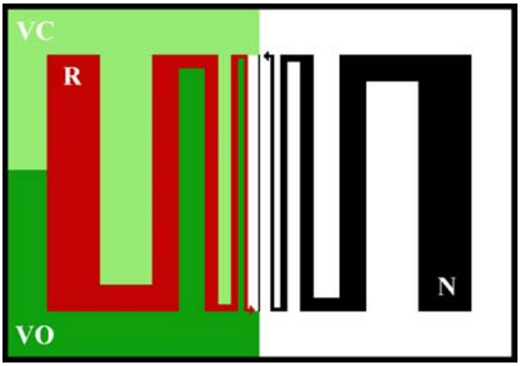


Figura 5.

los Nororientales, Azulandia Oscura;

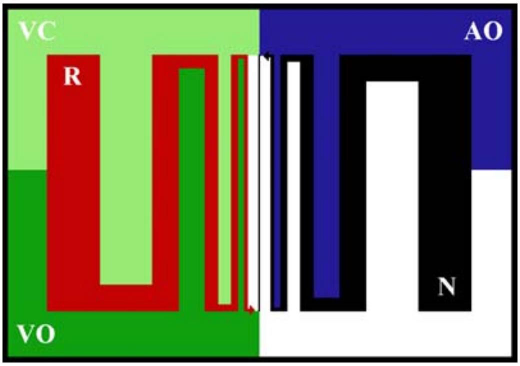


Figura 6.

y los Sudorientales, Azulandia Clara.

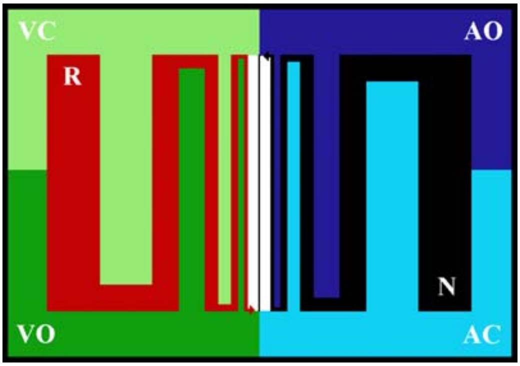


Figura 7.

Cuentan las crónicas que los Noroccidentales y los Nororientales arreglaron sus diferencias bastante pacíficamente y acordaron compartir un segmento justo al norte del Borde y permanecer cada pueblo en su respectiva mitad (Este y Oeste) del país. De la misma manera, los Sudoccidentales y los Sudorientales resolvieron sus desavenencias admirablemente, encontraron un segmento al sur del Borde y pactaron permanecer cada uno en su respectiva mitad (de nuevo, separados al Este y al Oeste). Y ninguno de ellos, al parecer, tuvo nunca reclamación alguna que hacer a Rojolandia o Negrolandia quienes, al permanecer neutrales, ni ganaron ni perdieron un solo pedazo de territorio durante la guerra.

Lamentablemente, los Noroccidentales no se mostraron tan amigables para con sus vecinos los Sudoccidentales, de los que siempre pensaron que habían intentado ocupar mucho más territorio occidental del que les correspondía. Resultó que los Sudoccidentales tenían una opinión semejante de los Noroccidentales, y aunque lucharon por conseguir un equilibrio y una difícil tregua a lo largo de la frontera que los separaba justo a la mitad de la costa occidental, los Noroccidentales ocuparon, con gran placer, tanta región del Sudoeste como les permitió la anchura protectora de la marcha zigzageante de Rojolandia a través de la Zenopia occidental. Esto es, cada vez que Rojolandia giraba hacia el Sur para enseguida volver hacia el Norte, los Noroccidentales reclamaban todo el territorio que quedaba en el hueco resultante. Para no ser menos, los Sudoccidentales reclamaron los huecos dejados por los giros hacia el Norte (seguidos de vuelta hacia el Sur) de Rojolandia. En lo que puede ser calificada de coincidencia de proporciones asombrosas, el sino de los Nororientales y los Sudorientales fue tan semejante que no merece la pena añadir ni un sólo párrafo más a este relato.

Como el lector habrá sin duda advertido, he seguido la convención habitual de la cartografía zenopiana de dejar la región central cercana al Borde sin colorear, con las características flechas marcando las trayectorias de Rojolandia y Negrolandia. Así es el convenio, pero no porque algún punto del país quede sin reclamar —nada más lejos de la realidad: hasta el último punto del país pertenece a una de las provincias, y ninguno de ellos está en disputa—; es sólo que Rojolandia, Negrolandia y sus codiciados huecos se van haciendo tan finos y tan rápidamente ... Pero pintar con colores reales no les importa a los patriotas de Zenopia. Colorear, en abstracto ... ¡ésa es la cuestión!

Así fue como se formaron las seis provincias de Zenopia, cada una de las cuales es una región conexa. Surgen periódicamente discusiones acerca de las fronteras que comparten, sobre todo la cuestión de si dos regiones pueden reclamar simultáneamente un segmento común rectilíneo que las divida (lo que haría que las regiones intersecasen de una manera que todo el mundo juzga intolerable); o bien sobre si una de las dos provincias podría reclamar la posesión exclusiva del segmento común, mientras que su oponente sufriría el humillante sino de verse rodeado por puntos de Zenopia pertenecientes a una provincia enemiga.

Pero sea lo que sea lo que surja de estas discusiones fronterizas, nada es comparable con un resultado de la guerra que es absolutamente pasmoso. El insaciable deseo de los Noroccidentales, Sudoccidentales, Nororientales y Sudorientales por rellenar los huecos tallados por Rojolandia y Negrolandia garantiza que las provincias de Verdilandia Clara, Verdilandia Oscura, Azulandia Clara y Azulandia Oscura también se acercan arbitrariamente a cada punto del Borde.

Con más detalle: llamemos disco abierto en torno a un punto $p$ al conjunto de todos los puntos que distan de $p$ menos que una cierta cantidad dada. Entonces, se verifica que, para cada punto $p$ del Borde y para cualquier disco $D$ centrado en $p$, $D$ tiene intersección no vacía con cada una de las seis provincias, y también con cada uno de los complementarios de las seis provincias. Pero eso es justo lo que significa que un segmento rectilíneo sea una frontera común; con esto basta para considerar tales provincias como adyacentes.

Zenopia, por tanto, no puede ser coloreada con cuatro colores. No bastan cuatro colores para colorear Zenopia de manera que provincias adyacentes lleven colores distintos: se necesitan seis colores. Más aún, se dice que los problemas en Zenopia no han acabado todavía. Se rumorea que un facción minoritaria de los Sudoccidentales planea dividir Verdilandia Oscura declarando la independencia de una nueva pequeña provincia. El plan es simple: se trata de examinar cuidadosamente Rojolandia e ir rodeándola, en cada uno de sus giros, con una nueva región cuya anchura (que se estrecha convenientemente en cada viraje hacia el Este) sea siempre una milésima de la de Rojolandia y tal que, en cada sección horizontal, la distancia a Rojolandia nunca sea mayor que la propia anchura de la nueva franja. Aunque esta hipotética séptima provincia no compartiría necesariamente todo el Borde con sus predecesoras, con seguridad compartirá una cierta subregión (que será a su vez un segmento rectilíneo) del Borde con cada una de las demás. Serían necesarios, entonces, siete colores. Dadas las simetrías que uno puede encontrar en Zenopia, no sería extraño pensar que el número pudiera incrementarse aún más.

## 2. La moraleja de esta historia

¿Tenemos entonces un contraejemplo para la celebrada "conjetura de los cuatro colores"? Bueno, depende de cómo se formule exactamente la conjetura. Lamentablemente, ciertos enunciados que se consideran equivalentes en realidad no lo son. He aquí una formulación representativa (a la que en lo sucesivo nos referiremos como la "versión cartográfica, o de mapas, de la conjetura de los cuatro colores"), tomada del libro de Saaty y Kainen [2, página 4], una muy popular introducción al problema de los cuatro colores:

(C4CM) Bastan cuatro colores para colorear cualquier mapa en el plano o en la esfera de manera que regiones con frontera común reciban colores distintos.

Poco después de presentar la conjetura, Saaty y Kainen nos recuerdan que obtendríamos un grafo dual $D(M)$ al "situar un punto, o *vértice*, en la mitad de cada país de un cierto mapa $M$ y unir parejas de vértices con líneas, o *aristas*, siempre que los países correspondientes tengan frontera en común" [2, pág. 5]. De esta manera, es habitual afirmar, con Saaty y Kaninen, que la conjetura de los cuatro colores en su versión cartográfica (C4CM) "es equivalente a la afirmación de que podemos colorear con cuatro colores los vértices de cierto tipo de grafos; a saber, los que son duales de mapas" [2, pág. 5]. En otras palabras, (C4CM) es equivalente a lo que podríamos llamar "versión de grafos duales de la conjetura de los cuatro colores":

(C4CGD) Bastan cuatro colores para colorear cualquier grafo dual (de un mapa dibujado en el plano o en la esfera) de manera que no haya vértices conectados por aristas que reciban el mismo color.

La estrategia entonces resulta clara: uno intenta probar (C4CM) basándose en que (C4CGD) es cierta y en que (C4CGD) es equivalente a (C4CM). Pero (C4CGD), a su vez, es muchas veces tomada por equivalente a lo que llamaremos "versión de grafos planos de la conjetura de los cuatro colores":

(C4CGP) Bastan cuatro colores para colorear cualquier grafo plano de manera que no haya vértices conectados por aristas que reciban el mismo color.

Saaty y Kainen proporcionan algunas razones para creer que (C4CGP) es equivalente a (C4CGD) cuando escriben que "es interesante señalar que, al intentar colorear con cuatro colores un mapa, no encontraremos obstrucciones locales; no encontraremos cinco regiones mutuamente adyacentes", y "cualquier grafo conexo que pueda ser dibujado en el plano es dual de un cierto mapa ... [más aún] ... por su propia construcción, cualquier grafo dual $D(M)$ tiene la propiedad de ser plano; *i.e.*, podemos representar sus vértices y sus aristas en el plano de manera que las aristas sólo se corten en sus extremos" [2, pág. 5].

Sin embargo, y como acabamos de ver, el método de multiplicación de provincias de Zenopia nos revela una serie de cosas realmente sorprendentes. Por resumir: mientras que (C4CGP) es cierta (véase la famosa prueba en [1]), (C4CGD) y (C4CM) parecen ser falsas. Esto es, incluso si todo grafo plano se puede colorear con cuatro colores, el grafo dual de Zenopia no es plano; antes bien, el grafo dual de Zenopia es el comúnmente llamado grafo completo $K_6$ (un grafo que no es plano) (véase la Figura 8), y ni Zenopia ni su grafo dual $K_6$ se pueden colorear con cuatro colores.

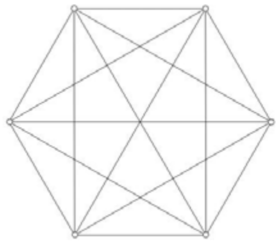

Figura 8. El grafo $K_6$

Para ver por qué el grafo dual de Zenopia es el $K_6$, recordemos una vez más que hay exactamente seis provincias en Zenopia. Así que su grafo dual ha de tener seis vértices. Siempre que dos provincias de Zenopia sean adyacentes a lo largo de una frontera, su grafo dual deberá constar de una arista que una los vértices que representen a esas provincias. Pero elija el lector cualquier pareja de nuestras seis provincias: sea cual sea el par elegido, serán dos provincias adyacentes a lo largo del segmento que hemos llamado Borde en la historia antes relatada. De manera que, para cualquier pareja de provincias, nuestro grafo requerirá una arista que enlace los vértices correspondientes. El grafo resultante es, entonces, el grafo completo (y no plano) $K_6$.

De hecho, reflexionando en torno a Zenopia, obtendríamos una lección que podríamos llamar "la tesis cartográfica de los múltiples colores": para cualquier número natural $n > 4$, es posible construir un grafo completo no-plano $m$ de manera que (i) $m$ tiene $n$ vértices; (ii) no bastan $n - 1$ colores para colorear $m$ de forma que vértices vecinos en el grafo reciban colores distintos, y (iii) $m$ es el grafo dual de un (ciertamente peculiar, pero perfectamente respetable) mapa geográfico.

## REFERENCIAS


[1] K. APPEL AND W. HAKEN: Every planar map is four colorable. *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429–567.

[2] T. L. SAATY AND P. C. KAINEN: *The Four Color Problem: Assaults and Conquests.* McGraw-Hill, New York, 1977.



Hud Hudson
Department of Philosophy
Western Washington University
Bellingham WA 98225
Correo-electrónico: `aristos@cc.wwu.edu`
`http://www.ac.wwu.edu/~aristos/`


Traducción de Pablo Fernández Gallardo