La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, *alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número ...

... presentamos un artículo que es singular por muchas razones. Por un lado, por la procedencia y características variadas de sus autores (profesores de Matemática Aplicada de las Universidades de Sevilla y Politécnica de Madrid, de Computación de Queen's y McGill University, una concertista de piano de la Real Escuela Profesional de Danza de Madrid), incluyendo, entre ellos, la figura –señera en Geometría Discreta y Algorítmica– de Godfried Toussaint, que ha desarrollado, desde hace varios años, una estrecha relación con la pujante escuela española de Geometría Computacional. Por otra lado, por la temática elegida, el ritmo flamenco, a cuyo análisis se quiere contribuir (y permítaseme subrayar este término: contribución) aquí aportando determinadas herramientas matemáticas.

Quisiera, como editor de esta Sección de La Gaceta, dar las gracias a los autores por su original contribución y, también, a los recensores (cuyo nombre, desgraciadamente, no puedo revelar), que han desarrollado una labor crítica y constructiva extraordinaria, en un tema tan alejado, aparentemente, de los conocimientos de la mayoría de los matemáticos de mi personal base de datos.

Unos y otros me permiten constatar con orgullo que en España, hoy, es posible encontrar matemáticos de primer nivel que son capaces de aportar comentarios autorizados sobre temas tan singulares e interesantes como este.

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. recio@matesco.unican.es

Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional

por

José-Miguel Díaz-Báñez, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaport y Godfried T. Toussaint

1. Introducción

La Teoría de la Música y las Matemáticas se han encontrado en multitud de ocasiones a lo largo del desarrollo de ambas y, más recientemente en los aspectos computacionales de ambos campos. No en vano existen revistas especializadas de esta área tales como *Computers and the Humanities*, *Computing in Musicology* o *Computers in Music Research*. En este trabajo presentamos una conexión entre conceptos y herramientas de tales áreas de investigación donde la geometría juega un papel importante. Como ejemplos de esta interrelación de estos campos podemos citar los trabajos [33, 8, 29], entre otros. El concepto de ritmo siempre ha sido de gran atractivo para los matemáticos, quizás porque una de las funciones básicas del ritmo es la de crear estructura y, como tal, susceptible de estudio por las matemáticas. Sin embargo, el concepto de ritmo es rico y polisémico y sus usos y significados cambian mucho con el contexto. Unas veces se confunde con velocidad, otras se asocia a metro musical o compás, en ocasiones lo hallamos como sinónimo de regularidad en la ejecución musical. Dado que este trabajo versa sobre la rítmica del flamenco, y con el fin de ser precisos, vamos a concretar el significado del concepto de ritmo.

Hay dos significados que podemos asignar a la palabra ritmo [30, 38, 39, 43]. En el primero, el concepto de ritmo se entiende contrapuesto a los conceptos de altura de sonido (tanto en la melodía u horizontalmente como en la armonía o verticalmente) y de timbre (color del sonido). Así en este sentido, podríamos hablar del ritmo en *La Consagración de la Primavera*, de Igor Stravinsky. En el segundo, más específico y restringido, ritmo se refiere a un patrón de ataques[2], producibles por cualquier medio acústico, los cuales pueden estar o no sujetos a un metro o asociados a una velocidad particular [38]. Con este sentido podríamos hablar del ritmo de las palmas en la soleá o igualmente del ritmo armónico de un preludio para piano de Chopin (por ejemplo, el preludio *opus* 28, nº 4).

En la tradición musical de Europa occidental, metro musical o compás está muy íntimamente relacionado con ritmo y, de hecho, es conceptualmente anterior. Según [38] de nuevo, la materia prima rítmica es concebida como un flujo inacabable de pulsos igualmente espaciados y no acentuados. El metro

[2]Piénsese como el momento en que se produce la nota, sea cual sea su naturaleza.

musical o compás, entonces, se define como la organización de esos pulsos por medio de acentos distribuidos regularmente. La mayor parte de la música tonal occidental se caracteriza por la recurrencia regular de tales patrones.

Hay que destacar que en el vocabulario flamenco el término compás tiene varios significados distintos del anteriormente definido. Normalmente, compás es una secuencia rítmica que incluye también elementos armónicos y formales propios de cada estilo. Véase [19] para la definición de términos musicales en el flamenco. Con el fin de evitar confusiones, nosotros usaremos la palabra ritmo en su sentido general, patrón rítmico para su sentido específico y compás como sinónimo de metro musical.

Muchos estilos musicales se caracterizan por la presencia de ciertos patrones rítmicos que se repiten a lo largo de la pieza y que tienen muchas funciones tales como ser estabilizadores rítmicos, marcar el fraseo (por ejemplo, en buena parte de la música afrocubana), definir el carácter (tenemos un ejemplo en el tercer movimiento de la sonata para piano de Chopin, *opus* 35), definir el género (en la siciliana, la chacona, la tarantela y otras), etc. Ejemplos de tales patrones rítmicos, llamados *claves* en la tradición africana y otras, abundan en estilos musicales tan dispares como el son cubano, el gahu de Ghana o el fandango del flamenco. Muchas preguntas surgen en torno a estos patrones rítmicos que funcionan como elementos estructurantes (de ahí, como señalamos, su atractivo matemático): ¿qué características tienen esos patrones rítmicos para determinar ciertos estilos musicales?, ¿qué similaridad podemos encontrar entre esos patrones rítmicos? Entonces una pregunta previa: ¿qué medida de similaridad podemos definir entre patrones rítmicos? ¿Puede ser una medida en el sentido matemático? Muchas de estas preguntas han encontrado respuestas en los trabajos de diversos autores. Para las claves binarias y ternarias de géneros musicales pertenecientes a las tradiciones africanas, afrocubanas y brasileñas hay resultados en [45, 46]; para la música flamenca se puede consultar [13, 14]; para la preferencia rítmica y otros problemas, véase [8, 9, 47, 48, 49].

Nosotros vamos a ocuparnos aquí de un tipo de música que no sólo se ha creado y desarrollado en España, sino que actualmente tiene un reconocimiento e impacto internacional desde el punto de vista académico y cultural que se le había negado injustamente a lo largo de la historia. La investigación del flamenco empieza a finales del siglo XIX con los estudios de Machado y Álvarez *Demófilo* [32], que representan un intento de conocimiento y reconocimiento del flamenco que tuvo un eco relativo, pues el flamenco no se consideraba objeto de estudio científico. En las primeras décadas del siglo XX, aparecen una serie de autores (Blas Infante, Cansino Assens y otros), que intentan de nuevo un estudio serio del flamenco. El trabajo de estos autores tuvo continuación en la obra de los autores de la década de los 60 y posteriores [6, 21, 34, 42]. Las obras de este periodo son meritorias y aportan un trabajo básico: se recogen letras y músicas, se transcriben partituras, se hace inventario de intérpretes, se formulan interpretaciones históricas del origen y la evolución del flamenco, etc. Sin embargo, como señala la flamencóloga Cristina Cruces [12] "pecaron de una retórica pseudo-cultista y de un cierto esencialismo". En efecto, muchos de esos estudios no resultan demasiado rigurosos a la luz de los actuales métodos de investigación, mucho más interdisciplinares y objetivos. Véase [10] para un acercamiento al problema de la bibliografía en el flamenco. Es a partir de los años 80 cuando se empiezan a publicar estudios más rigurosos sobre el flamenco (por citar unos pocos, y sin ánimo de ser exhaustivos, y ciñéndonos al aspecto musical principalmente, se pueden ver [11, 12, 20, 26, 28, 31, 18, 19, 36, 40, 41, 44]). Queda aún mucho por hacer, pues "los trabajos musicológicos sobre el flamenco, escasos y dispersos, presentan todavía un carácter *inacabado* sobre el que conviene una reflexión urgente" [12].

La idea de este estudio consiste en construir un análisis que refleje ciertas relaciones entre los estilos flamencos. Indudablemente, hay muchos aspectos en que dichas relaciones podían basarse, dada la riqueza estilística del flamenco. Nosotros nos hemos centrado en el ritmo porque, entre los muchos factores musicales que constituyen el flamenco, sin duda, es de los más sobresalientes. Una manera sencilla de llevar a cabo este análisis sería la de desnudar la música flamenca de letra, armonía y melodía y dejar sólo el ritmo (en su sentido general) como único elemento. Esta simplificación no se basa sólo en la sencillez de análisis, sino que también es consecuencia de las dificultades para formalizar la armonía y sobre todo la melodía. Además, es lógico pensar en el ritmo a la hora de simplificar el estilo por el papel de estabilizadores rítmicos que desempeñan los patrones rítmicos en los distintos cantes flamencos. Apoyándonos en esta idea, hemos realizado un estudio de los patrones rítmicos ternarios de palmas del flamenco. Este estudio está inspirado en el análisis filogenético que se usa habitualmente en Biología. Ese análisis requiere la existencia de una distancia, que está definida sobre el material genético. Normalmente, la distancia consiste en medir cuán diferentes son dos materiales genéticos dados. La distancia da lugar a su vez a una matriz de distancias. A partir de ésta, y gracias a técnicas de Bioinformática [15, 27], se reconstruye un árbol que refleja las relaciones evolutivas entre especies. Nosotros sustituiremos el código genético por ritmos y, en primer lugar, definiremos una distancia entre patrones rítmicos. Existen varias distancias que se pueden usar para medir cuán lejos se encuentran dos patrones rítmicos. En otros contextos, en Fonética [22, 23] o Música [25, 50] por nombrar dos, aparecen varios ejemplos. Nosotros hemos usado dos distancias, la cronotónica y la de permutación dirigida, que captan adecuadamente la idea de lejanía entre patrones rítmicos. Por último, aplicando las herramientas adecuadas obtenemos el árbol filogenético para los patrones rítmicos del flamenco. En [13] y [14] se puede consultar una versión más técnica que la aquí se expone.

Uno de los objetivos de este trabajo es, por una parte, proporcionar al musicólogo flamenco herramientas de análisis, en este caso, del ritmo; y por otro, a partir de las conclusiones que surjan, sugerirle ideas sobre cuestiones musicológicas tan actuales como el estudio sobre las relaciones entre los diferentes estilos, origen y procedencia de los estilos, contraste los existentes árboles genealógicos del cante flamenco, determinación de posibles propiedades de preferencia de estilos, búsqueda de posibles estilos ancestrales, influencias de músicas externas a Andalucía, etc.

2. Algunas nociones sobre los ritmos flamencos

Si existe una clara seña de identidad del flamenco con respecto a otras músicas, ésta es la ejecución de los ritmos con palmas, donde el patrón rítmico subyacente se manifiesta a través de palmas acentuadas. El género flamenco tiene unas características estilísticas, entre las que resaltan los patrones rítmicos de palmas. El flamenco usa predominantemente compases ternarios de 12/8, esto es, compases de 12 pulsos agrupados en grupos de tres. En principio, se tocan las 12 palmas que marca el compás de 12/8 y el patrón rítmico emerge acentuando unas cuantas. En el fandango, por ejemplo, se da un acento (palmada fuerte) seguido de dos silencios (palmada débil) cuatro veces seguidas. Puede verse aquí, a la luz de las definiciones dadas en la introducción, la íntima relación que hay en la música flamenca entre patrón rítmico (ritmo en su sentido restringido) y compás. De hecho, es habitual en el mundo flamenco hablar de "compás" en lugar de patrón rítmico. Además de este patrón, que podemos llamar periódico, existen otros aperiódicos, llamados *de amalgama*. Estos patrones rítmicos se pueden pensar como una combinación de un compás de 3/4 (compuesto por dos acentos fuertes con dos acentos débiles intercalados) y un compás de 6/8 (compuesto por tres acentos fuertes con un acento débil intercalado). Claro es entonces que el juego rítmico reside en la distribución de los acentos y buena parte del atractivo del flamenco descansa en esa distribución. Patrones rítmicos de amalgama son los utilizados en las *soleares*, las *bulerías*, las *alegrías*, las *seguiriyas* o las *guajiras*. Manuales didácticos recientes donde pueden consultarse una clasificación de los estilos flamencos en base al patrón rítmico de palmas son [19, 20] y [36].

Existen estilos flamencos que usan compases binarios de 2/4 o 4/4 (palmadas fuertes cada dos o cada cuatro tiempos). Estos incluyen el *tango* flamenco y sus variantes, tales como la *rumba* y otros. Todos esos estilos binarios del flamenco usan un mismo patrón rítmico, a saber, [1 **2 3 4**] donde los acentos aparecen en letra negrita [20]. Aquí se hace un análisis comparativo sólo sobre los ritmos en compás ternario (véase la figura 1). Los patrones rítmicos ternarios tienen más variedad y riqueza que los binarios. Además, estamos interesados en la filogenia de estos estilos y es lógico estudiar los ternarios solos. Por último, hay autores [37] que llegan a afirmar que los patrones binarios proceden todos de Hispanoamérica y, por tanto, no podrían ofrecer información sobre la evolución de los estilos flamencos anteriores a su incorporación.

A continuación detallamos los patrones rítmicos ternarios del flamenco y alguna de sus posibles notaciones o representaciones. La notación que habitualmente se usa en la didáctica del flamenco es numérica, resaltando los lugares donde se produce un acento (véase la figura 2). Cada patrón rítmico ha sido etiquetado por un estilo de cante que lo usa. Esto no significa ni mucho menos

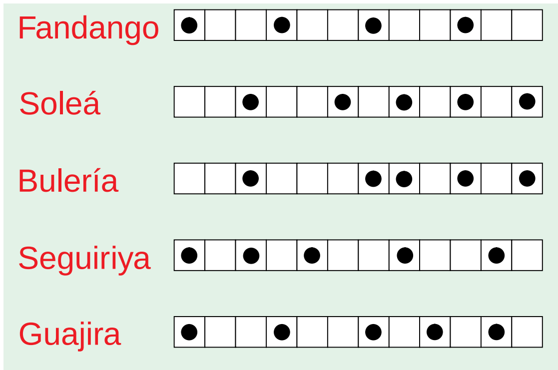

Figura 1: Cinco patrones rítmicos ternarios en compás de 12/8.

[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 9 **10** 11 12] – *fandango*
[1 2 **3** 4 5 **6** 7 **8** 9 **10** 11 **12**] – *soleá*
[1 2 **3** 4 5 6 **7** **8** 9 **10** 11 **12**] – *bulería*
[**1** 2 **3** 4 **5** 6 7 **8** 9 10 **11** 12] – *seguiriya*
[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 **9** 10 **11** 12] – *guajira*

Figura 2: Notación de los patrones rítmicos ternarios del flamenco.

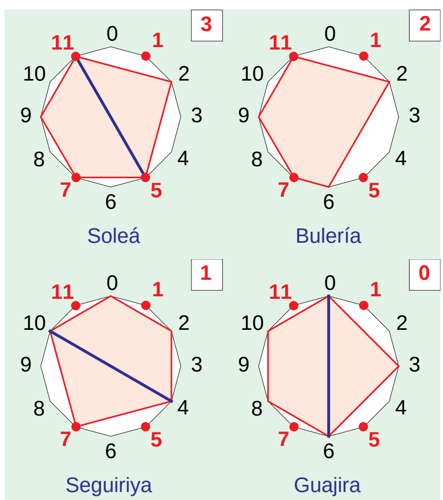

Figura 3: Los cuatro compases aperiódicos ternarios del flamenco.

que cada patrón rítmico sea exclusivo de ese cante. Por ejemplo, el patrón del *fandango* es el de las sevillanas; el de la *soleá* se usa también para las bulerías o alegrías; el de la *bulería* para las bulerías por soleá; el de la *seguiriya* para las serranas o saetas; y, finalmente, el de la *guajira* para las peteneras.

La representación numérica anterior no resulta útil para contabilizar diferencias ni visualizar ciertas propiedades geométricas en las que estamos interesados. Proponemos aquí dos notaciones más ilustrativas como aparecen en las figuras 1 y 3. La figura 1 presenta la notación binaria donde los espacios negros-blancos se identifican con unos-ceros. En la representación como polígonos convexos de la figura 3, el "0" marca la posición en el tiempo en la cual comienza el patrón rítmico y los vértices indican dónde están los acentos. Existen otras notaciones como la *cronotónica* [23], la de histogramas [23] o la *arábica* [51] (por sectores).

3. Medidas de similaridad ritmíca

Como advertimos en la introducción, para construir árboles filogenéticos es necesario contar con una distancia que mida la similaridad rítmica. La distancia debería comportarse de modo que cuanto mayor sea la distancia entre los patrones rítmicos, menor sea la similaridad rítmica. Existen ya en la bibliografía varias distancias definidas entre patrones rítmicos. De hecho, este problema está relacionado con problemas de aproximación de patrones en la teoría de *reconocimiento de formas* [16]. Nosotros usaremos dos distancias que han demostrado funcionar bien en otros estudios sobre el ritmo: la distancia de cronotónica y la distancia de permutación dirigida. La idoneidad de una distancia u otra para el estudio de ritmos es un tema actual de investigación (en [48] se puede consultar un gran número de referencias sobre esta cuestión).

3.1 La distancia cronotónica

La idea de Gustafson (propuesta por primera vez en 1983) se explica mejor con un ejemplo. Consideremos el ritmo de la seguiriya, dado por

$$[\mathbf{1}\ 2\ \mathbf{3}\ 4\ \mathbf{5}\ 6\ 7\ \mathbf{8}\ 9\ 10\ \mathbf{11}\ 12].$$

En esta representación, las duraciones relativas de los intervalos de tiempo no se pueden observar fácilmente. En una visualización de ritmos vía *histogramas* los sucesos importantes, tales como el comienzo, el final y el ataque de las notas, se dibujan a lo largo del eje y [23], lo que da como resultado el *espectro de intervalos adyacentes* del ritmo. En dicha representación la longitud relativa de los intervalos es claramente visible, pero se pierde la información temporal a lo largo del eje x. Para obtener una representación gráfica que posea las ventajas de ambos métodos, Gustafson usa el tiempo en ambas dimensiones. El resultado de esa unión se ilustra en la figura 4, que muestra los cinco patrones rítmicos del flamenco en notación cronotónica. Cada elemento temporal entre sucesos (intervalos) es ahora una caja y ambos ejes x e y representan la longitud temporal del intervalo. Gustafson se refiere a esta representación como elementos temporales representados por cuadrados, o más brevemente TEDAS (*T*emporal *E*lements *D*isplayed *A*s *S*quares, en las siglas inglesas). Las uniones de los cuadrados representadas en la figura 4 se pueden ver como funciones rectilíneas monótonas del tiempo.

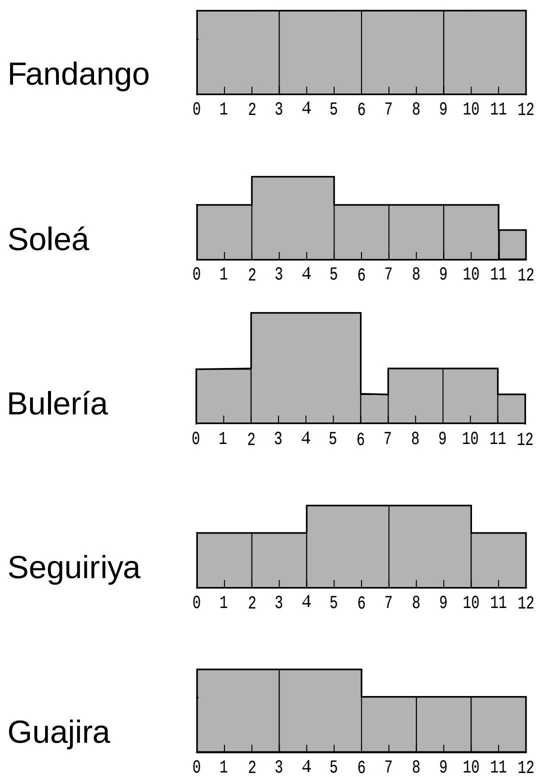

Figura 4: Representación cronotónica de los cinco ritmos flamencos.

Dada la representación cronotónica de dos ritmos, hay un gran número de formas de medir la disimilaridad. En [48] la disimilaridad se mide por el área que queda entre ambas funciones. Utilizaremos esa medida aquí y nos referiremos a ella por el nombre dado en [48]. La matriz de distancias obtenida con esa distancia se muestra en la figura 5.

Matriz de Distancias Cronotónicas

	Soleá	Bulería	Seguiriya	Guajira	Fandango
Soleá	0	6	8	4	10
Bulería		0	12	8	14
Seguiriya			0	8	6
Guajira				0	6
Fandango					
Σ	28	40	34	26	36

Figura 5: Matriz de la distancia cronotónica de los cinco ritmos.

3.2 La distancia de permutación dirigida

Dadas dos secuencias binarias, patrones rítmicos en nuestro caso, la *distancia de Hamming* [24] se define simplemente como el número de espacios en los que no coincide el acento. De esta forma, si tenemos un patrón rítmico representado por un vector n-dimensional $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $x_i = 1$ si el golpe es fuerte y $x_i = 0$ si el golpe es débil, la distancia de Hamming entre dos secuencias X e Y se define como:

$$d_H(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$$

donde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Esta distancia se puede calcular fácilmente en tiempo $O(n)$, aunque no resulta interesante para nuestro objetivo, puesto que puede modificarse sustancialmente un patrón rítmico y la distancia puede no variar.

Con objeto de cubrir esa deficiencia de la distancia de Hamming, se han propuesto muchas variaciones y generalizaciones. A modo de ejemplo, proponemos al lector la *distancia de Hamming borrosa* [4]. La distancia de Hamming borrosa entre dos secuencias binarias n-dimensionales contempla desplazamientos, inserciones y borrados y se puede calcular usando programación dinámica en tiempo $O(n^2)$.

Sin embargo, hablaremos aquí de una distancia de similaridad que lleva consigo un concepto muy simple, la permutación. Una permutación es un intercambio de un ‘uno’ y un ‘cero’ que son adyacentes en una cadena binaria. Intercambiar la posición de elementos en cadenas de números es una operación fundamental en los algoritmos de ordenación [5]. Sin embargo, en la bibliografía de ordenación, una permutación puede ser un intercambio entre elementos no adyacentes. Cuando se requiere que los elementos sean adyacentes, la permutación se llama mini-permutación o permutación primitiva [2]. Aquí llamaremos simplemente permutación al intercambio de dos elementos adyacentes.

La *distancia de permutación* entre dos patrones rítmicos se define como el *mínimo* número de permutaciones que se necesitan para convertir un patrón rítmico en otro. Por ejemplo, el patrón $X = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]$ puede convertirse en el patrón $Y = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ con un mínimo de cuatro permutaciones, a saber, intercambiando la tercera, la quinta, la sexta y la séptima posición con los correspondientes silencios que van detrás de ellos. La distancia de permutación se puede ver como una versión simplificada de la distancia de Hamming borrosa de [4] que resulta cuando sólo se consideran desplazamientos cuyo coste es la longitud de dicho desplazamiento. Esta medida parece más apropiada para un análisis de similaridad entre vectores binarios que la distancia de Hamming o la distancia euclídea [48]. Desde el punto de vista musical es razonable usar esta distancia. El oído humano considera como próximos dos patrones rítmicos si el número de cambios entre acentos es pequeño y si tales cambios ocurren entre acentos adyacentes. Además, es interesante observar que, el compás *bulería* resulta precisamente de la permutación de un *uno* y un *cero* en el compás *soleá*. Un ejemplo de esta distancia aplicada a patrones rítmicos del flamenco se ilustra en la figura 6. Ciertos autores [20, 36] sugieren que ésa es la evolución natural entre ambos patrones rítmicos.

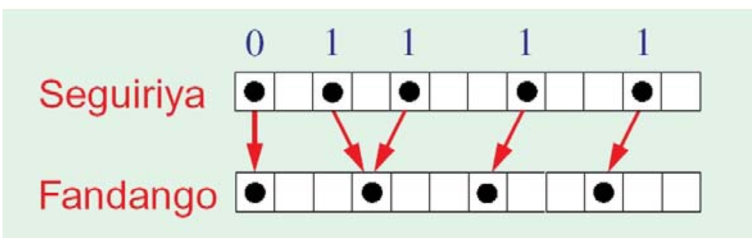

Figura 6: Distancia de permutación entre seguiriya y guajira: $d_P(seguir, guaj) = 4$.

3.3 Computación eficiente de la distancia de permutación

Claramente, la distancia de permutación puede obtenerse calculándose todas las permutaciones posibles. Si un patrón rítmico $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene unos en las primeras $n/2$ posiciones y cero en el resto e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tiene unos en las $n/2$ últimas posiciones y cero en el resto, entonces se requerirían al menos un número cuadrático de permutaciones para obtener la distancia. Sin embargo, este método básico sería muy costoso para vectores n-dimensionales si n es un valor grande.

Un algoritmo mucho más eficiente puede obtenerse si comparamos las distancias de las notas al origen. Lo describimos aquí brevemente. Primero hacemos un barrido de la sucesión binaria y almacenamos un vector con la información del lugar que ocupa cada acento. Por ejemplo, si consideramos $X = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]$ e $Y = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$, entonces almacenamos $U = (u_1, u_2, ..., u_7) = (1, 3, 5, 6, 8, 10, 12)$ para X y $V = (v_1, v_2, ..., v_7) = (1, 3, 4, 6, 7, 9, 11)$ para Y, respectivamente. De esta forma, la diferencia entre u_i y v_i es el número mínimo de permutaciones que tienen que realizarse para alinear ambos acentos. Por tanto, en general, la distancia de permutación entre dos conjuntos de U y V con k notas está dado por:

$$d_P(U, V) = \sum_{i=1}^{k} |u_i - v_i|$$

Calcular U y V a partir de X e Y se puede hacer en tiempo lineal con un simple barrido. Por tanto, en tiempo $O(n)$ podemos calcular $d_{PERM}(U, V)$, lo cual da como consecuencia una gran ganancia sobre el uso del algoritmo básico que considera todas las posibles permutaciones o bien el método de programación dinámica utilizado en el cómputo de la distancia de Hamming borrosa.

El lector se debe estar preguntando a qué viene toda esta discusión sobre la reducción de la complejidad de $O(n^2)$ a $O(n)$ cuando en el caso de los ritmos flamencos tenemos $n = 12$ y la cota cuadrática es computacionalmente aceptable. La razón es que la diferencia de la complejidad resulta crucial cuando estas distancias se pretenden usar en aplicaciones de recuperación de la información musical, donde hay que extraer piezas enteras de una base de datos en la que n puede ser muy grande.

3.4 La distancia de permutación dirigida

La *distancia de permutación dirigida* es una generalización de la distancia de permutación, pensada para tratar la comparación de patrones que no tienen el mismo número de acentos (unos). Por ejemplo, el *fandango*, tiene cuatro acentos en lugar de cinco y, por tanto, esta generalización se hace necesaria. A continuación definimos formalmente esta distancia. Sean X e Y dos sucesiones binarias de longitud n que representan dos patrones. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que X tiene más unos que Y. La distancia de permutación dirigida es el mínimo número de permutaciones necesarias para convertir X en Y bajo las siguientes condiciones:

1. Cada "1" de X tiene que moverse a una posición "1" de Y.

2. Todas las posiciones "1" de Y tienen que recibir al menos un "1" de X.

3. Ningún "1" puede viajar a través de la frontera entre la posición cero y la n-ésima.

Un ejemplo de esta distancia se ilustra en la figura 7.

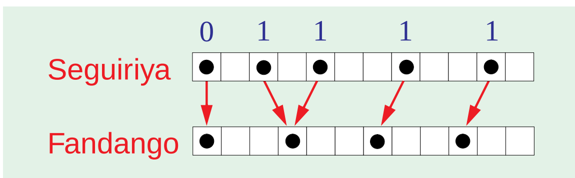

Figura 7: Distancia de permutación dirigida entre seguiriya y fandango. $d_{PD}(seguir, fand) = 4$.

La búsqueda de algoritmos eficientes de computación para la distancia de permutación dirigida se encuentra actualmente bajo investigación. En el caso que nos ocupa, se pueden realizar los cálculos a mano y se obtiene la matriz de distancias en la figura 8.

4. Árboles filogenéticos

Con objeto de estudiar las posibles relaciones genealógicas entre los distintos patrones rítmicos, utilizaremos una técnica común en *análisis filogenético* que nos ayudará a analizar y visualizar el conjunto de datos obtenidos en la matriz de distancias. Esta técnica de análisis de datos se basa en la generación de los llamados *árboles filogenéticos*. Concretamente aquí hablaremos de la técnica llamada *SplitsTree* propuesta en [15, 27].

La técnica está basada en un proceso iterativo de división y que da como resultado una inmersión de un grafo plano con la propiedad de que la distancia

Matriz de Distancias de Permutación Dirigida

	Soleá	Bulería	Seguiriya	Guajira	Fandango
Soleá	0	1	11	7	7
Bulería		0	12	8	8
Seguiriya			0	4	4
Guajira				0	2
Fandango					
Σ	26	29	31	21	21

Figura 8: La matriz de la distancia de permutación dirigida para los cinco patrones rítmicos.

en el dibujo entre dos nodos refleja, tanto como es posible, la verdadera distancia entre los dos patrones rítmicos correspondientes en la matriz de distancias. Este método tiene además la buena propiedad de que produce un grafo y no un árbol cuando la estructura de proximidad subyacente no es intrínsecamente de tipo árbol. De hecho, si la estructura de árbol no coincide con los datos perfectamente, se introducen nuevos nodos con objeto de obtener un mejor ajuste. Pueden visualizarse estos nodos sin etiquetas en la figura 9 y la figura 10, que han sido calculados para la matriz de distancias de permutación dirigida y distancia cronotónica respectivamente.

La interpretación del grafo obtenido es la siguiente. La suma de las longitudes de las aristas del camino más corto entre un patrón y otro es proporcional a la distancia real entre ellos. Los nuevos nodos incorporados (aparecen sin etiqueta) sugieren la existencia de patrones rítmicos “ancestrales” de donde los actuales podrían haber evolucionado. Las aristas se pueden dividir para formar paralelogramos, como se ve en el centro de la figura 9. Los tamaños relativos de estos paralelogramos son proporcionales a su *índice de aislamiento*, que indica cuán significativas son las relaciones de agrupamiento en la matriz de distancias. La herramienta *SplitsTree* también calcula el *índice de descomposición*, una medida de la bondad del ajuste del grafo entero. El ajuste se obtiene dividiendo la suma de todas las distancias aproximadas en el grafo por la suma de todas las distancias originales en la matriz de distancias. Este índice se muestra en la esquina superior izquierda de la figura del *SplitsTree*. En este caso obtenemos un sorprendente ajuste del 100%. Los detalles de la construcción del grafo pueden consultarse en [15].

A continuación, se describen los resultados obtenidos en el grafo *SplitsTree* para las dos distancias. El grafo de la distancia cronotónica sugiere un agrupamiento en tres grupos. Uno está formado por el *fandango* y la *seguiriya*; el segundo, por la *soleá* y *bulería*; y el tercero, en solitario está la *guajira*. El compás *bulería* es el más "alejado" de todos con una suma de distancias igual a 40. En cambio, la *guajira* es el más similar a los demás con una suma igual a 26. Aparecen cuatro nodos sin etiquetas, esto es, de los que no corresponden a ninguno de los patrones rítmicos dados.

El agrupamiento en el grafo de la distancia de permutación dirigida es ligeramente distinto al de la cronotónica. Un primer grupo lo componen *soleá* y *bulería*, otro central, *guajira* y *fandango*, mientras que *seguiriya* permanece en un tercer y solitario grupo. Los patrones rítmicos más similares a los otros son la *guajira* y el *fandango*, que empatan a 21. Es por esto que aparecen en el 'centro' del grafo. Aparecen dos nodos sin etiqueta, cerca de la *guajira* y el *fandango*. También es de destacar que *seguiriya* y *bulería* se encuentran en los extremos del grafo y son los patrones mas 'alejados' de los demás, con un total igual a 31 y 29, respectivamente.

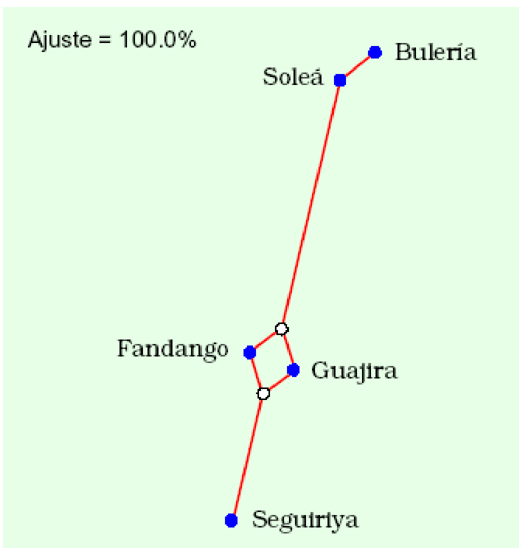

Figura 9: El *SplitsTree* con la distancia de permutación dirigida.

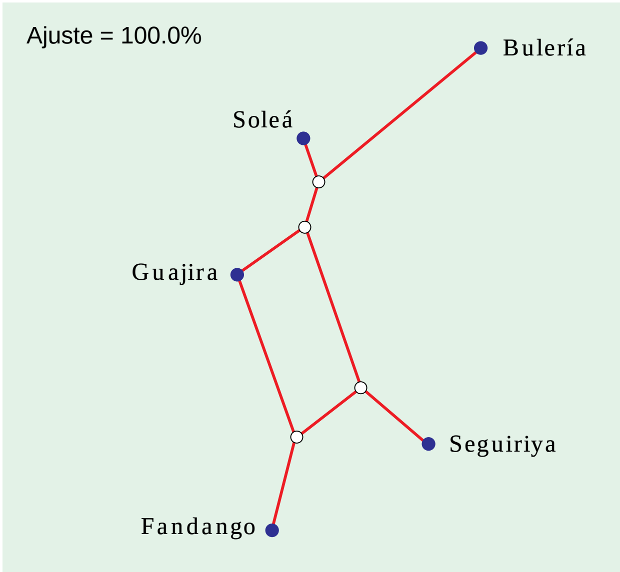

Figura 10: El *SplitsTree* con la distancia cronotónica.

5. Propiedades geométricas de preferencia

Una cuestión que suscita gran curiosidad entre los músicos es la de saber por qué ciertos tipos de ritmos se prefieren a otros en ciertas tradiciones musicales. Por ejemplo, en la tradición musical africana aparecen con mucha frecuencia patrones rítmicos asimétricos y sincopados (con acentos fuera de los pulsos). En un intento de caracterizar esas propiedades de *preferencia* desde un punto de vista geométrico se han introducido dos conceptos nuevos: la *asimetría rítmica* y el *índice de contratiempo*. El primero, la asimetría rítmica, descubierta en [1] y utilizada en [8], [9], es una buena medida de preferencia en los ritmos de Africa Central, según se expone en [48]. El segundo, el índice de contratiempo, ha probado ser una medida de preferencia muy razonable para los ritmos del África del oeste subsahariana [49]. En la tabla de la figura 11 aparecen los datos de estas medidas para los patrones rítmicos del flamenco.

Se dice que un patrón rítmico tiene la propiedad de la *asimetría rítmica* si no contiene dos conjuntos de notas que dividan al patrón (dibujado en un círculo) en dos semicírculos. En la sección 3, figura 3, aparecen las diagonales divisorias que existen para los patrones rítmicos flamencos. (No aparece el fandango porque es totalmente simétrico). Es interesante observar que de los cinco patrones, la *bulería* es el único que tiene la propiedad de la asimetría rítmica. Un detalle interesante es que, a diferencia del resto de los patrones, la *bulería* es el único que contiene intervalos de longitud 1, 2, 3, y 4. Los otros patrones sólo tienen intervalos de longitud 2 y 3.

El índice de contratiempo de un patrón rítmico se define como el número de notas que posee en las posiciones 1, 5, 7, y 11 [49]. Estas posiciones resultan ser las no ocupadas si se consideran las posibles divisiones en espacios iguales del compás de 12/8 usando los divisores de 12 (distintos de 1 y 12). Aparte de la tabla de más abajo, en la figura 3 el índice de contratiempo de cada patrón rítmico se indica en la esquina superior derecha de cada figura. En nuestro caso, se observa que la *guajira* es el único patrón de 5 acentos con un índice de contratiempo igual a cero. La *soleá* es, por otra parte, el estilo flamenco con mayor índice de contratiempo.

Patrón rítmico	Asimetría rítmica	Contratiempo
Fandango	No	0
Soleá	No	3
Bulería	Sí	2
Seguiriya	No	1
Guajira	No	0

Figura 11: Medidas geométricas de preferencia.

6. Conclusiones

El objetivo principal del estudio aquí propuesto para comparar los patrones rítmicos de la música flamenca estaría cubierto si los investigadores interesados en el origen y evolución del flamenco desde un punto de vista científico, hicieran uso de él y lo compaginaran con las herramientas propias de sus respectivas áreas de investigación para obtener conclusiones acerca de las teorías musicológicas existentes y, de esta manera, fomentar debates concernientes a la génesis y evolución de los estilos flamencos. Somos conscientes de que, a la vista del grafo o de la tabla de medidas de preferencia, pocas conclusiones se pueden sacar si no se dispone de más información desde otro punto de vista: musical, literario, antropológico, sociológico, etc. De modo que lo que viene a continuación no son sino preguntas y sugerencias, las cuales, corresponde responder al musicólogo del flamenco.

En primer lugar, observamos el hecho de que la *guajira* aparezca prácticamente en el centro de los patrones rítmicos ternarios indica su cercanía o similitud a los demás estilos. ¿Podría esto interpretarse como la huella de la influencia que han ejercido los otros estilos en dicho patrón rítmico? La *guajira*, como es sabido, es un estilo flamenco de los llamados de ida y vuelta, esto es, que fueron llevados a Sudamérica y, tras una remodelación según los gustos de los músicos sudamericanos, fueron posteriormente incorporados a la música flamenca. ¿Está probada musicalmente dicha influencia en los aspectos rítmicos que aquí tratamos? ¿Hasta qué punto? Remitimos al lector interesado en más información a los trabajos recientes [35, 17].

Teniendo en cuenta la 'reciente' incorporación de la guajira, y fijándonos en el árbol filogenético generado por la distancia de permutación dirigida, cabe pensar que el *fandango* es el más primitivo, dado que es el otro patrón rítmico que se encuentra en el centro. ¿Hay hechos musicológicos que confirman esta teoría, por otra parte, cada vez más extendida dentro del mundo del flamenco? Por ejemplo, en todas las provincias andaluzas se encuentra una modalidad evolucionada del *fandango*. Nos estamos refiriendo a los estilos de *malagueñas*, *granaínas* o *tarantas* etc. Sin ir más lejos, leemos, entre otros, en [20] que "el fandango es la fuente de todos los patrones flamencos".

Un nuevo aspecto que volvería a indicar la importancia genealógica del fandango es la reconstrucción de los patrones rítmicos ancestrales citados en la construcción de los grafos con la herramienta *SplitsTree* y que allí aparecen sin etiqueta. Haciendo uso de la distancia de permutación dirigida, se puede obtener un *hipotético patrón ancestral* que se encuentra justo en el centro del árbol. Actualmente, es un problema abierto el diseño de algoritmos eficientes que reconstruyan los nodos ancestrales. En ocasiones, puede hacerse el cálculo a mano. Para el caso de patrones rítmicos flamencos con la distancia de permutación dirigida, la representación rítmica obtenida es [1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0], que de hecho, se usa en el flamenco como *terminación* o *coletilla* para los fandangos de Huelva [31].

Por otra parte, si eliminamos la *guajira* de nuestro estudio, estilo que hemos dicho parece ser posterior a los demás en el flamenco, el *fandango* y la *soleá* son los nodos que juegan un papel central en el análisis filogenético (con respecto a la distancia de permutación dirigida). ¿Sugeriría esto que además del *fandango* aparece la *soleá* como patrón rítmico primitivo? ¿Se entendería entonces que, de estos patrones primitivos y, tras un proceso evolutivo, fueron apareciendo los demás? Un hecho que respaldaría esta hipótesis puede encontrarse en el reciente uso del patrón rítmico aquí llamado *bulería*, y que proviene de la *soleá* sin más que permutar un acento con un silencio. Por su parte, ya existen teorías que indican que la seguiriya es un estilo incorporado al flamenco a finales del siglo XIX y principios del XX [28].

Finalmente, aventuraremos algunas hipótesis sobre las medidas de preferencia en el flamenco. Es conocida la inclinación de los flamencos llamados "puristas" por los estilos que usan el patrón de la soleá. ¿Podría residir la explicación de este hecho en su alto índice de contratiempo? Por otro lado, también es conocida la popularidad que goza la bulería entre el público flamenco en general. ¿Constituye la propiedad de la asimetría rítmica una posible explicación de ese hecho?

Agradecimientos

Los resultados de este artículo fueron obtenidos durante el *First International Workshop on Computational Music Theory* celebrado bajo el auspicio del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Universitaria de Informática (U.P.M.) en junio de 2003.

Referencias

[1] S. Arom, *African Polyphony and Polyrhythm,* Cambridge University Press, England, 1991.

[2] T. Biedl, T. Chan, E.D. Demaine, R. Flescher, Golin, J.A. King y I. Munro, Fun-sort - or the chaos of unordered binary search, *Discrete Aplied Mathematics*, 38:21-41, 2004.

[3] H.-J. Bandelt, A. Dress; Weak hierarchies associated with similarity measures - an additive clustering technique, *Bulletin of Mathematical Biology*, **51** (1989) 133–166.

[4] A. Bookstein, V.A. Kulyukin, Generalized Hamming distance, *Information Retrieval*, **5** (2002) 4, 353–375.

[5] N.G. de Bruijn, Sorting by means of swapping, *Discrete Mathematics*, **9** (1974) 333–339.

[6] J.M. Caballero-Bonald, *Luces y sombras del flamenco*, editorial Lumen, 1988.

[7] D.M. Cano, *Cante y baile flamencos,* Everest, León, 1983.

[8] M. Chemillier, Ethnomusicology, ethnomathematics. The logic underlying orally transmitted artistic practices, *Mathematics and Music*, editado por G. Assayag, H. G. Feichtinger y J. F. Rodrigues, pág. 161-183, Springer-Verlag, 2002.

[9] M. Chemillier y C. Truchet, Computation of words satisfying the 'rhythmic oddity property' (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters*, 86:255-261, 2003.

[10] C. Cruces, *La bibliografía flamenca, a debate*, Centro Andaluz de Flamenco, Jerez de la Frontera, 1998.

[11] C. Cruces, *El Flamenco*, en *Gran Enciclopedia Andaluza del siglo XXI, Conocer Andalucía*, vol. 6, editado por G. Cano, editorial Tartessos, Sevilla, 2000.

[12] C. Cruces (editora), *Historia del Flamenco*, editorial Tartessos, Sevilla, 2002.

[13] J.M. Díaz-Báñez, G. Farigu, F. Gómez, D. Rappaport, G. T. Toussaint, El Compás Flamenco: A Phylogenetic Analysis, *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science,* Winfield, Kansas, 61-70, julio de 2004.

[14] J.M. Díaz-Báñez, G. Farigu, F. Gómez, D. Rappaport, G. T. Toussaint, Análisis filogenético del compás flamenco, ponencia invitada en el *XXXII Congreso Internacional de Arte Flamenco,* Mairena del Alcor, Sevilla, septiembre de 2004.

[15] A. Dress, D. Huson y V. Moulton, Analysing and visualizing sequence and distance data using *SplitsTree*, *Discrete Aplied Mathematics*, 71:95-109, 1996.

[16] R. Duda, P. Hart y D. Stork; *Pattern Classification*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2001.

[17] V. Eli y M. Alfonso, *La música entre Cuba y España*, Ed. Fundación Autor, 1999.

[18] L. Fernández, El flamenco en las aulas de música: de la transmisión oral a la sistematización de su estudio, *Música y Educación*, vo. 45, 2001.

[19] L. Fernández, *Teoría musical del flamenco,* Acordes Concert, 2004.

[20] J.M. Gamboa, *Cante por cante: discolibro didáctico de flamenco*, New Atlantis Music, Alia Discos, Madrid, 2002.

[21] A. González Climent, *Flamencología*, editoral La Posada, Ayuntamiento de Córdoba, 1989, reedición de la obra de 1956.

[22] K. Gustafson, A new method for displaying speech rhythm, with illustrations from some Nordic languages, *Nordic Prosody IV,* editado por K. Gregersen y H. Basboll, pág. 105-114, Odense University Press, 1987.

[23] K. Gustafson, The graphical representation of rhythm, en (PROPH) *Progress Report from Oxford Phonetics*, volumen 3, pág. 6-26, Universidad de Oxford, 1988.

[24] R.W. Hamming, Coding and Information Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.

[25] L. Hofmann-Engl, Rhythmic similarity: A theoretical and empirical approach, *Actas de la Seventh International Conference on Music Perception and Cognition,* editado por C. Stevens, D. Burnham, G. McPherson, E. Schubert y J. Renwick, pág. 564-567, Sidney, Australia, 2002.

[26] A. Hurtado y D. Hurtado, *La voz de la tierra*, Consejería de Cultura, Junta de Andalucía, Sevilla, 2002.

[27] D.H. Huson, *SplitsTree*: Analyzing and visualizing evolutionary data, *Bioinformatics*, 14:68-73, 1998.

[28] J.M. Hernández-Jaramillo, *La Música Preflamenca*, Consejería de Relaciones Institucionales, Junta de Andalucía, Sevilla, 2002.

[29] M. Keith, *From Polychords to Pólya: Adventures in Musical Combinatorics*, Vinculum Press, 1991.

[30] M. Kennedy (editor), *The Oxford Dictionary of Music,* Oxford University Press, 1998.

[31] C.H. Keyser, *Introduction to Flamenco: Rhythmic Foundation and Accompaniment*, Santa Bárbara, California, 1993.

[32] A. Machado, y Álvarez *Demófilo*, *Colección de cantes flamencos recogidos y anotados*, Cultura Hispánica, Madrid, 1975, reedición de la obra de 1881.

[33] O. Maidín, A geometrical algorithm for melodic distance, *Computing in Musicology*, 11:65-72, 1998.

[34] R. Molina y A. Mairena; *Mundo y formas del cante flamenco*, Ed. Revista de Occidente, Madrid, 1963.

[35] F. Nuñez, *La música entre Cuba y España: la ida y la vuelta*, Ed. Fundación Autor, 1998.

[36] F. Nuñez, *Comprende el flamenco. Discolibro didáctico de flamenco*, Acordes Concert, 2003.

[37] J.L. Ortiz Nuevo y F. Nuñez, *Rabia del placer. El nacimiento del tango y su desembarco en España*, Edita Diputacion De Sevilla, Sevilla, 1999.

[38] D. Randel (editor), *The Harvard Dictionary of Music*, Harvard University Press, 1986.

[39] D. Randel, (editor), *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, Akal, 1986.

[40] M. Ríos Ruiz, *El gran libro del flamenco*, editorial Calambur, 2002.

[41] J. Romero, *La otra historia del flamenco: la tradición semítico musical de Andalucía*, Centro Andaluz de Flamenco, Sevilla, 1996.

[42] H. Rossy, *Teoría del cante jondo*, Punt Groc and Associats, Breda, Barcelona, 1966.

[43] S. Sadie (editor), *Diccionario Akal/Grove de música*, Akal, 1988.

[44] P. Sánchez, *Cante y cantaores de triana*, Bienal de flamenco, Ayto de Sevilla, 2004.

[45] G.T. Toussaint, A mathematical analysis of African, Brazilian, and Cuban *clave* rhythms, en las actas *BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, pág. 157-168, Towson University, Towson, MD, 2002.

[46] G.T. Toussaint, Classification and phylogenetic analysis of African ternary rhythm timelines, en las actas *BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, pág. 25-36, Universidad de Granada, Granada, 2003.

[47] G.T. Toussaint, Algorithmic, geometric, and combinatorial problems in computational music theory, *actas de los X Encuentros de Geometría Computacional,* pp. 101-107, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003.

[48] G.T. Toussaint, A comparison of rhythmic similarity measures. *Proc. 5th International Conference on Music Information Retrieval*, pág. 242-245, Universitat Pompeu y Fabra, Barcelona, 2004.

[49] G.T. Toussaint, A mathematical measure of preference in African rhythm. En *Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society*, volumen 25, pág. 248, Phoenix, Arizona, enero de 2004. American Mathematical Society.

[50] R. Typke, P. Giannopoulos, R.C. Veltkamp, F. Wiering, R. van Oostrun, Unsing transportation distances for measuring melodic similarity, *Proc. 4th International Conference on Music Information Retrieval*, pp. 107–114 Baltimore, USA, 2003.

[51] O. Wright, *The Modal System of Arab and Persian Music*, Oxford University Press, England, 1978.

José-Miguel Díaz-Báñez
Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla
Correo electrónico: `dbanez@us.es`
Giovanna Farigu
Concertista de piano
Real Escuela Profesional de Danza de Madrid
`giovanna.f@wanadoo.es`
Francisco Gómez
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Madrid
Correo electrónico: `fmartin@eui.upm.es`
David Rappaport
School of Computing
Queen's University
Correo electrónico: `daver@cs.queensu.ca`
Godfried T. Toussaint
School of Computer Science
McGill University
Correo electrónico: `godfried@cs.mcgill.ca`