Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Laurent Schwartz, el matemático que quería cambiar el mundo

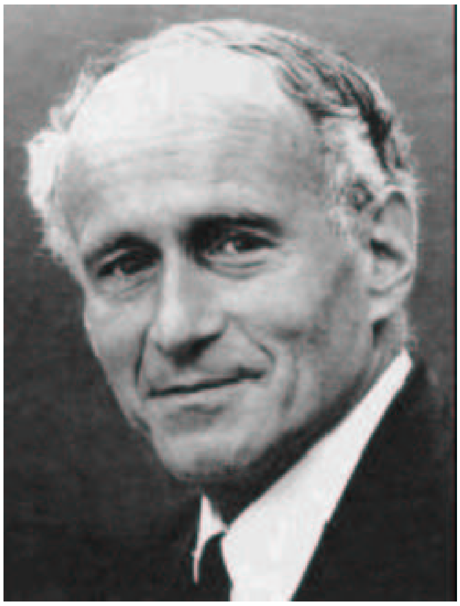
por

Fernando Bombal

El 4 de julio de 2002 falleció, a los 87 años de edad, Laurent Schwartz, uno de los más respetados y prestigiosos matemáticos de nuestro tiempo. En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Harvard (Cambridge, Massachusets) en 1950, le fue concedida la Medalla Fields por su creación de las distribuciones. El 30 de Agosto de 1950, en el acto de presentación de las medallas Fields, Harald Bohr describía el artículo de Schwartz *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, aparecido en los Anales de la Universidad de Grenoble en 1948, como un trabajo :

> *...which certainly will stand as one of the classical mathematical papers of our times. [...] I think that every reader of his cited paper, like myself, will have felt a considerable amount of pleasant excitement, on seeing the wonderful harmony of the whole structure of the calculus to which the theory leads and on understanding how essential an advance in application may mean to many parts of higher analysis, such as spectral theory, potential theory, and indeed the whole theory of linear partial differential equations [...] The simplification obtained, and not least the easy justification of different symbolic operations often used in an illegitimate way by the technicians, is of such striking nature that it seems more than a utopian thought that elements of the theory of Schwartz distributions may find their place even in the more elementary courses of the calculus in Universities and Technical Schools.* ([2])

La contribución de Schwartz a la sistematización y desarrollo de la teoría de distribuciones, sería suficiente para otorgarle un lugar de privilegio entre



los matemáticos del siglo XX. Pero su actividad matemática (que comentaremos más adelante) no se ha limitado a esta tarea, inmensa de por sí, sino que ha producido también importantes contribuciones en áreas como Análisis Funcional, Teoría de la Medida, Ecuaciones en Derivadas Parciales o Teoría de la Probabilidad.

Además, Schwartz fue un brillante expositor y excelente pedagogo, y se preocupó durante toda su vida de los problemas de la Educación y la Enseñanza. En los años 1980, sobre todo tras su jubilación como Profesor de la Facultad de Ciencias de París y de la Escuela Politécnica en 1983, participó mucho más activamente en la reforma de las enseñanzas universitarias. Fue nombrado Presidente del Comité Nacional para la evaluación de las Universidades (1985-1989), elaborando una serie de informes para el gobierno en los que insistía sobre la necesidad de una selección más rigurosa en la admisión de los estudiantes y la conveniencia de que los profesores universitarios realizaran investigación. Miembro de la Academia de Ciencias de París desde 1975, poseía numerosos premios y distinciones, tanto nacionales como internacionales.

Pese a su inmensa obra de creación matemática, Schwartz no tiene nada que ver con el estereotipo del sabio distraído, aislado en su torre de marfil. Por el contrario, ha sido un hombre profundamente comprometido con los problemas de su tiempo. Apasionado defensor de los derechos humanos, anticolonialista e internacionalista, defendió públicamente sus ideas, desde la guerra de Argelia a la del Vietnam, pasando por la invasión rusa de Afganistán, lo que le valió no pocos sinsabores y dificultades. En los años 1970, contribuyó en gran medida a la liberación de investigadores prisioneros en la Unión Soviética, Chile, Bolivia o Checoslovaquia. (Véase el Capítulo XIII de [10] para una información más detallada).

Entomólogo aficionado, entusiasta de las mariposas (otro de sus grandes amores), no desdeñaba aprovechar las invitaciones que le hacían de países tropicales para impartir cursos o conferencias, para conseguir ejemplares para su colección que, tras más de 30 viajes a los trópicos, contaba con más de 20.000 ejemplares.

La noticia de su muerte mereció la atención de artículos en periódicos tan importantes como *Le Monde* y *Liberation* (10 de Julio de 2002), *The Guardian* (7 de Agosto de 2002), *Washington Post* (18 de Agosto, 2002) o publicaciones como *Sciences & Avenir*, o *Iniciativa Socialista* (Agosto 2002), etc.

Un breve recorrido por la vida de L. Schwartz

De las 200 entradas que aparecen en la página web de MathSciNet bajo el nombre de Laurent Schwartz, la última corresponde a la traducción al inglés de su autobiografía *Un Mathématicien aux prises avec le siècle* ([10]; véase también la magnífica reseña aparecida en La Gaceta [5]) Es este un libro apasionante, de lectura absolutamente recomendable. Con un estilo claro y ameno, a lo largo de sus 528 páginas, Schwartz nos lleva de la mano para realizar un recorrido por su vida y, a través de sus experiencias, asomarnos a algunos de los acontecimientos de los que fue testigo de excepción y, a veces, protagonista: su contacto con las ideas comunistas al ingresar en la *École Normale Superieur*; su posterior desengaño por la actuación de Stalin y su adhesión al trostkismo después, para abandonarlo definitivamente en 1947; su experiencia vital como judío en la Francia ocupada; sus vivencias como investigador y formador de investigadores; sus actividades por la reforma de la enseñanza universitaria en Francia; su dedicación a la lucha por los derechos humanos a lo largo de toda su vida, etc. Y todo ello trufado con detalles personales, anécdotas e historias sobre su vida y sobre muchas de las personas que conoció a lo largo de ella, formando así un brillante y atractivo mosaico. Su lectura ha sido la principal fuente de información para la redacción de las siguientes líneas.

Laurent Schwartz nació en Paris, en 1915, en el seno de una familia de profunda tradición judía, aunque ni sus padres ni el propio Schwartz fueran practicantes. Su padre era médico cirujano y, seguramente, un hombre de gran valía y fuerza de voluntad, pues, a pesar del virulento antisemitismo dominante en la época, consiguió ser el primer cirujano judío de los hospitales de París en 1907. Su madre, 16 años más joven que su padre, era una gran amante de la naturaleza, y supo transmitir este amor a sus tres hijos. Uno de sus tíos, Robert Debré, fue un famoso pediatra y co-fundador de la Unicef. Otro tío, Jacques Debré, era profesor de matemáticas. Y Jacques Hadamard, uno de los mejores matemáticos de la época, era su tío-abuelo materno. Con estos antecedentes, parecería evidente que Schwartz estaba predestinado a dedicarse a las matemáticas. Pero la verdad es que esto no resultó tan claro al principio.

La infancia de Schwartz está marcada por sus estancias en la finca que adquirieron sus padres en 1926 en Autouillet, un pueblecito cercano a París. Allí desarrolló su amor por la Naturaleza en general y las mariposas en particular. A lo largo de su autobiografía, Schwartz se refiere reiteradamente a Autouillet como su particular "Jardín del Edén", su contacto con el Paraíso, y también su refugio para disfrutar y trabajar.

En sus años escolares, Schwartz destacó en latín, literatura y también en matemáticas. Durante algún tiempo se contempló en su familia la posibilidad de que se dedicara a las humanidades. Fueron finalmente los consejos de su profesor de literatura y de su tío Robert Debré los que inclinaron la balanza a favor del bachillerato de matemáticas. Schwartz se sintió fascinado por la Geometría, y eso a pesar de ser un "cretino topográfico", según sus propias palabras, sin ninguna visión geométrica ni sentido de la orientación.

Durante su preparación para el ingreso en la École Normale Supérieur (ENS) se enamoró de Marie-Hélène Lévy, hija del famoso matemático Paul Lévy, profesor a la sazón en la École Polytechnique (EP). Aunque sus familias se conocían desde hacía 3 generaciones, los dos jóvenes no se habían relacionado demasiado. La madre de Schwartz le aconsejó esperar un tiempo. Pero al volverla a encontrar en la ENS como compañera, Schwartz se convenció de la profundidad de sus sentimientos, y se declaró a través de su madre (era tremendamente tímido). Se comprometieron en abril de 1935 y decidieron casarse en diciembre del mismo año. Desgraciadamente, en octubre de 1935, Marie Hélène contrajo una tuberculosis pulmonar extremadamente grave y tuvo que ingresar en un sanatorio en Passy. Contra la previsión de los médicos, extremadamente pesimistas, tras 18 meses de separación, Marie-Hélène fue dada de alta. Por entonces, Schwartz estaba realizando el servicio militar (obligatorio) como oficial en el Servicio de artillería antiaérea. Tras el curso de preparación y como consecuencia de su poca capacidad para la vida militar, fue destinado a uno de los lugares menos solicitados, Laon, cerca de la frontera belga. Aprovechando el periodo de estabilidad, la pareja decidió casarse en mayo de 1938. Tuvieron dos hijos: Marc André, que murió en 1971, y Claudine, profesora de Matemáticas en Grenoble.

La ENS de la calle de Ulm, creada por la Convención en 1794, ha sido siempre un centro de excelencia y un vivero de ilustres científicos en diversas disciplinas. Cuando Schwartz ingresó en ella, en 1934, el grupo más importante de egresados era el de los matemáticos. En el Capítulo II de [10], describe su entusiasmo y deslumbramiento por la vida en la École, y también un cierto sentimiento de frustración. La ciencia francesa en general, y las matemáticas en particular, había ido cayendo en el adocenamiento y la apatía. La Primera Guerra Mundial había diezmado toda una generación de jóvenes. La vida científica francesa parecía funcionar al ralentí. Como contrapartida, Schwartz resalta el desarrollo científico prodigioso de la ciencia alemana, ignorado por el chauvinismo francés de la época. Entre otros ejemplos flagrantes, Schwartz cita el caso de un seminario Hadamard celebrado en 1924, en el que quedó claro que ningún matemático francés asistente, ni siquiera los más reputados, sabía si el espacio L^2 de las funciones cuyo cuadrado es integrable Lebesgue, era o no completo (lo que había sido demostrado en 1907 por Fischer y Riesz). Lo sorprendente del caso es que entre los asistentes figuraba un joven matemático polaco, Stefan Banach, que había presentado en 1920 su Tesis sobre la noción de espacio normado completo ("espacio de Banach") entre cuyos primeros y más ilustres ejemplos se encuentra L^2. ¡Por supuesto, Banach, que sabía perfectamente la respuesta, no dijo una palabra, sin duda intimidado por el auditorio!

Esta sensación de frustración era compartida por otros jóvenes matemáticos franceses. Por ejemplo, Jean Dieudonné narra que la matemática oficial francesa de la época ignoraba todo lo relativo a temas como la teoría espectral de Hilbert-Riesz, la representación de grupos o la teoría de Lie. Esta percepción de la atonía y paralización de la matemática francesa, que había sido líder de la matemática mundial, fue sin duda una de las razones determinantes para la creación del colectivo Bourbaki, fundado por André Weil, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, Jean Delsarte, René de Possel, Jean Leray y Szolem Mandelbrojt en 1935, y al que más tarde se unió Schwartz. Creado con la idea inicial de redactar una serie de textos que sustituyeran a los que se utilizaban en las Universidades francesas, el grupo Bourbaki se convirtió en un eficaz revulsivo y, finalmente, fue responsable de una profunda labor de actualización y renovación de la matemática.

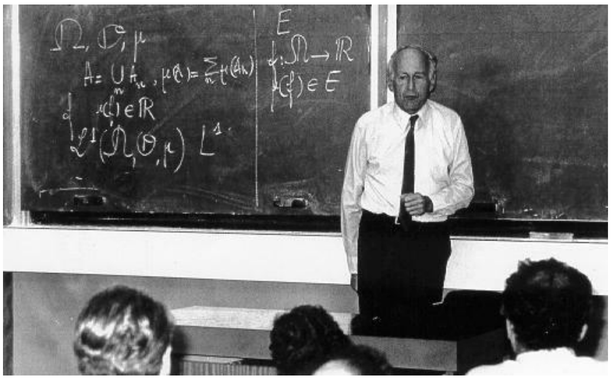
Los años en la ENS fueron también importantes para el compromiso político de Schwartz. Anticolonialista por convicción, comenzó a leer en profundidad literatura política y económica. Pronto se percató de que la política de no intervención practicada por el gobierno de Léon Blum era totalmente ineficaz frente al avance del nazismo. Dentro del ambiente izquierdista de l'École, se sintió primero atraído por las ideas comunistas, pero, conmocionado por las purgas realizadas por Stalin en 1936, se volvió hacia las ideas de Trotski sobre la "Revolución Mundial" y se convirtió en un trotskista militante, colaborando intensamente con este partido durante toda la ocupación alemana, con gran riesgo personal. Desencantado de los resultados, abandonó definitivamente el partido en 1947, aunque siguió participando activamente en política.

En junio de 1937, Schwartz concluyó brillantemente sus estudios en la ENS (se graduó segundo, tras su buen amigo G. Choquet, otro excelente matemático) y, como ya hemos dicho, decidió realizar su servicio militar obligatorio. El comienzo de la Segunda Guerra Mundial prolongó su servicio activo durante otro año. Finalmente, en agosto de 1940, tras la derrota francesa, fue desmovilizado y se trasladó con su mujer a Toulouse, en la Francia bajo el régimen de Vichy, donde vivían sus padres. Solicitó (y obtuvo) un puesto en la recién creada Caisse Nationale des Sciences, un instituto de investigación, aunque a partir de 1942 y hasta el final de la guerra, su salario provenía de una "Ayuda a la Investigación Científica", fundada por Michelín. Por aquel entonces, según palabras de Schwartz, Toulouse era un desierto científico. Aprovechando una visita a Toulouse de Henri Cartan y Jean Delsarte, su esposa Marie-Hélène y él decidieron entrevistarse con ellos. Cartan les animó a instalarse en Clermont-Ferrand, ya de por sí una buena Universidad, pero que, además, contaba con el añadido de la Facultad de Ciencias de Strasburgo, que se había establecido allí tras la ocupación alemana. Así, en 1940 los Schwartz se trasladaron a Clermont-Ferrand, lo que supuso para ambos un verdadero renacimiento a la vida matemática. Allí Schwartz entra en contacto con el núcleo "duro" del grupo Bourbaki y es invitado a participar en sus reuniones como "cobaya" (se integró plenamente en 1942). Bourbaki fue para Schwartz una revelación y ejerció en él una profunda influencia. La claridad de su lenguaje, el rigor en la redacción, la utilización sistemática de las estructuras matemáticas, le fascinaron. En su larga disgresión sobre Bourbaki en [10] (págs. 158-177), cuenta sus impresiones sobre el grupo, su peculiar manera de funcionar y también muestra algunos ejemplos de los errores que solían encontrarse en los libros de texto al uso. Citando un comentario de André Weil sobre la escuela italiana de geometría algebraica, escribe: *Para ellos* [los integrantes de la escuela] *resulta una adición interesante, a continuación de un teorema, proponer un contraejemplo.* O, citando una frase concreta de uno de los libros utilizados habitualmente: *La noción de variedad es difícil de definir. Sea V una variedad ...* Todas estas deficiencias desaparecieron radicalmente con Bourbaki. Por supuesto, Schwartz también es consciente de los errores que se cometieron por y, sobre todo, en nombre de Bourbaki, a los que también dedica algunas páginas. En todo caso, Schwartz siempre ha reconocido que el contacto con el grupo Bourbaki fue fundamental en su carrera. Así, en [9] dice: *La recontre de N. Bourbaki m'a initié à des idées toute nouvelles aprés ma formation d'analyste classique ... Le cours d'analyse fonctionnelle de J. Dieudonné a été à l'origine de ma thèse.*

Schwartz venía trabajando desde hacía algún tiempo sobre un problema clásico de aproximación de funciones. El curso impartido por Dieudonné sobre Espacios Vectoriales Topológicos le puso en contacto con una serie de nuevas y potentes herramientas, lo que le permitió comenzar a obtener resultados interesantes. Dieudonné se mostró entusiasmado y le propuso continuar con estos trabajos, como tema de tesis doctoral. Presionado por su director, que era consciente del peligro que corría Schwartz al ser judío, especialmente tras la ocupación de la Francia de Vichy por los alemanes, Schwartz defendió su tesis doctoral, titulada Études de Sommes d'Exponentielles Reelles en 1942 (publicada a su cargo, como era habitual, en la Librería Hermann. Apareció en 1943). En su Tesis se pone ya de manifiesto uno de los rasgos característicos de las matemáticas de Schwartz: la utilización de un marco abstracto y herramientas procedentes del Análisis Funcional para resolver problemas clásicos. Esta idea, como él mismo reconoció, fue fundamental en la creación de la teoría de distribuciones.

Tanto Schwartz como su esposa, mantuvieron una gran actividad política, colaborando con los grupos trotskistas durante toda la ocupación alemana, aunque posteriormente Schwartz criticó duramente la actuación de estos grupos: "Durante la guerra fueron los comunistas y otros grupos más moderados –de derecha o de izquierda– quienes hicieron lo que había que hacer, y nosotros los que nos quedamos paralizados". ([10], p. 185). En todo caso, su situación personal se hizo cada día más precaria, lo que le obligó a abandonar toda actividad matemática oficial. Además, Marie-Hélène quedó encinta a mediados de 1942. Fichados por la policía, la prioridad era proteger sus vidas y la de su hijo. Tras el nacimiento de su hijo Marc André, decidieron cambiar su identidad y huir a la zona ocupada por los italianos, donde suponían que la persecución contra los judíos sería menos terrible Las páginas que dedica Schwartz a sus recuerdos de esa época son estremecedoras, describiendo la angustia de la vida cotidiana bajo la amenaza constante de caer en alguna de las redadas de la brigada antijudía y ser deportado. Y eso que, como dice Schwartz, ([10], pág. 203) *... Mis padres eran ateos; yo también lo era y nunca me sentí verdaderamente judío ... El poder ser deportado como judío por el mero hecho de estar circuncidado, me parecía verdaderamente absurdo ...* Y, sin embargo, así ocurrió con muchos de sus compatriotas.

Con la falsa identidad de Laurent-Marie Sélimartin (nombre elegido por la semejanza de firmas), los Schwartz huyeron a un pueblecito en las proximidades de Grenoble, donde permanecieron hasta la liberación de la zona por el ejército americano, en agosto de 1944. Nombrado profesor de la Universidad de Grenoble en octubre de 1944, se trasladó al año siguiente a la Facultad de Ciencias de Nancy, a instancias de Dieudonné y Delsarte, iniciando un periodo de siete fructíferos años. Durante ese tiempo, Nancy se convirtió en uno de los mejores centros matemáticos de Francia, lo que propició la venida de estudiantes brillantes procedentes de todo el país. En particular, Schwartz dirigió los estudios de doctorado de matemáticos de la talla de Jean Pierre Kahane, François Bruhat, Bernard Malgrange, Jacques-Louis Lions (el fundador en Francia de la matemática aplicada moderna, según su director) o Alexander Grothendieck, uno de los más brillantes e influyentes matemáticos del siglo XX, también ganador de una Medalla Fields (véase [1]). El descubrimiento de la Teoría de Distribuciones, del que hablaremos más adelante, le supuso a Schwartz un rápido reconocimiento internacional, acrecentado por la concesión de la Medalla Fields en 1950. Por iniciativa de Denjoy, fue nombrado profesor de la Facultad de Ciencias de Paris en 1952. También allí tuvo ocasión Schwartz de formar a brillantes investigadores, entre los que se encuentran André Martineau y François Treves (a quien, por cierto, transmitió asimismo la afición por las mariposas). En 1958, Paul Lévy se jubiló como profesor en la École Polytechnique que, a diferencia de la Universidad, continuaba en un estado de atonía deplorable. Ni Schwartz, ni ninguno de los universitarios de renombre, presentaron su candidatura a la plaza. Sin embargo, unos días antes de que se acabara el plazo, Schwartz recibió la visita de dos destacados miembros de



la EP, que le pidieron encarecidamente que se presentara al puesto y emprendiera una serie de enérgicas reformas para revitalizar la institución. Con muy poco entusiasmo, Schwartz aceptó y fue nombrado profesor de Análisis de la Escuela Politécnica en 1959. Desde ese momento, emprendió una intensa labor de modernización de la EP, empezando por los programas de enseñanza (su monumental *Cours d'Analyse* tiene su origen en este empeño) y continuando con el profesorado y las tareas de gestión.

Otro de los objetivos de Schwartz fue que se retomara la tradición de formar investigadores en la EP. La resistencia a los cambios fue grande. Desde su fundación, la EP tenía una organización para-militar (de hecho, el director es un general; eso puede quizá explicar que hasta 1972 no se admitieran alumnas en la EP). Pero la mayor oposición la encontró Schwartz entre sus colegas académicos de todas las disciplinas. No obstante, poco a poco la situación fue evolucionando. A ello contribuyó no poco la incorporación de nuevos profesores, como J. Neveu o J.L. Lions primero, y después A. Guillardet, M. Demazure o Ch. Goulaouic. También, en 1966, Schwartz consiguió que se aprobara la creación del Centre de Mathématiques de la EP, que se convirtió pronto en un importante centro de investigación. Los Seminarios de Análisis Funcional (con el nombre de Séminaire Schwartz o, más tarde, Séminaire Maurey-Schwartz) y los de Ecuaciones Diferenciales (Séminaire Goulaouic-Schwartz) alcanzaron pronto un gran nivel, participando en ellos con asiduidad renombrados especialistas de todo el mundo.

A partir de 1969, Schwartz abandonó su puesto en la universidad para dedicarse a tiempo completo a la Politécnica. Allí permaneció hasta su jubilación en 1980, aunque continuó en activo otros tres años en la universidad de Paris VII y como director del Centro Matemático de la Escuela Politécnica. Impulsor y presidente del Comité Nacional de Evaluación de 1985 a 1989, continuó defendiendo sus ideas sobre la enseñanza universitaria y la investigación. Miembro de la Academia de Ciencias de París desde 1975, recibió numerosas distinciones científicas, nacionales e internacionales, a lo largo de su vida (véase [9]).

En cuanto a su actividad política, la retomó inmediatamente después de la liberación de Grenoble, en Agosto de 1944, y continuó en ella a lo largo de toda su vida. Tras una fracasada participación como candidato del partido Trotskista en las elecciones legislativas de 1945 y 1946, se fue alejando progresivamente del mismo para romper definitivamente su militancia en 1947. Desde entonces, su único compromiso político fue la defensa de los derechos humanos. No obstante, su militancia previa le persiguió durante largo tiempo. Así, por ejemplo, en el verano de 1949 Marshall Stone, a la sazón director del departamento de matemáticas de Chicago quiso aprovechar un viaje de Schwartz a la universidad de Vancouver, para invitarle a visitar su Universidad. Schwartz aceptó y solicitó el preceptivo visado de entrada a Estados Unidos. Ante la falta de noticias, Stone hizo averiguaciones al más alto nivel y, finalmente, obtuvo una respuesta: el visado sería denegado, ya que Laurent Schwartz era un *peligroso comunista*. Por la misma razón estuvo a punto de peligrar su participación en el Congreso de Harvard de 1950, para recibir su Medalla Fields. Sólo tras seis meses de intensas gestiones internacionales, el Departamento de Estado de los Estados Unidos aceptó, como un favor especial, otorgar un visado provisional de entrada a Schwartz (¡con prohibición expresa de viajar por el resto del país!).

Schwartz participó activamente en apoyo de la descolonización francesa de Vietnam (1954), Tunez y Marruecos (1956), y se involucró intensamente en el conflicto argelino. Horrorizado por la espiral de terrorismo y represión y el uso sistemático de la tortura por las fuerzas francesas (que conoció de primera mano, en la persona de uno de sus alumnos de tercer ciclo, Maurice Audin, torturado y muerto en extrañas circunstancias), escribió un famoso artículo en *L'Express* contra la práctica de la tortura por el gobierno. En 1960, fue uno de los 121 intelectuales franceses firmantes, junto a Jean-Paul Sartre y Simone de Beauvoir, de un famoso manifiesto en el que se defendía el derecho moral de la juventud francesa a negarse a participar como soldados en la guerra de Argelia. Como consecuencia, Schwartz fue fulminantemente cesado como profesor en la EP por el Ministro de Defensa. Tras una serie de apelaciones y contra apelaciones, el puesto de Schwartz continuaba vacante, pues nadie lo solicitaba. Schwartz pasó el curso académico 1962-63 en Nueva York y, finalmente, se alcanzó un acuerdo con el ministerio para que se le admitiera de nuevo en su puesto, tras una solicitud expresa. Cubierto el trámite, Schwartz se reincorporó a la EP en el curso 1963-64.

La actividad política de Schwartz se incrementó durante la guerra del Vietnam, a la que dedica el capítulo más extenso de su autobiografía. Fue miembro del tribunal Russell (creado para oír y examinar la evidencia de crímenes de guerra contra la población civil en Vietnam) y Presidente del *International Bureau for Afghanistan*, fundado en 1979, a raíz de la invasión soviética de Afganistán. Tras la retirada de las tropas de la URSS, Schwartz continuó luchando contra la represión de intelectuales, sobre todo matemáticos, en la Unión Soviética y otros países.

La Teoría de las Distribuciones

La contribución matemática más conocida de Schwartz es la creación de la Teoría de Distribuciones. Por ello, y porque esta teoría es uno de los grandes desarrollos matemáticos del siglo XX, vamos a dedicar esta sección a describir someramente su contenido y las aportaciones de Schwartz. El lector interesado podrá encontrar más información en [3] y, sobre todo, en [6].

Antecedentes

Los modelos fundamentales de la Física matemática vienen regidos por ecuaciones diferenciales y, por tanto, son aplicables solamente (al menos en principio) a fenómenos en los que las variables físicas involucradas sean funciones suficientemente regulares del espacio y el tiempo. Si bien esto no produce ninguna discrepancia con los datos observables en los fenómenos estáticos (descritos usualmente por ecuaciones elípticas), no sucede lo mismo cuando se estudian fenómenos dinámicos (regidos generalmente por ecuaciones hiperbólicas): en este caso, las variables físicas exhiben a menudo discontinuidades esenciales en la práctica. Así, por ejemplo, una cuerda de violín pulsada en su punto medio, vibra inicialmente de acuerdo con una ley de la forma

$$u(x,t) = 2 - \frac{1}{2}(|x-t-1| + |x+t-1|),$$

para una elección adecuada de las unidades y del sistema de referencia. La derivada del desplazamiento es, por tanto, discontinua en $x = 1 \pm t$. Como la ecuación de ondas, que rige el movimiento de la cuerda, es de orden 2 (esencialmente, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$), la función anterior no puede considerarse como solución de la misma, en el sentido habitual.

En otro orden de cosas, las hipótesis para la validez de muchos teoremas son difíciles de comprobar en la práctica. Puede decirse que, desde el comienzo del cálculo diferencial, aparece la conveniencia de extender estas nociones, de manera que las operaciones fundamentales del análisis se puedan realizar siempre y sin hipótesis complicadas de validez. Así surge la idea de obtener una *noción generalizada de diferenciación*, que extienda la habitual y permita derivar funciones que no son derivables en sentido ordinario. Ésta, junto con la noción paralela de *solución generalizada* de una ecuación diferencial (E.D.), es el primer origen de la teoría de distribuciones (véase el prólogo de [8]).

Históricamente, la primera noción de solución generalizada de una E.D. es la de considerar como tal una función que sea límite (en algún sentido) de una sucesión de soluciones clásicas. El método ya fue anticipado por L. Euler en

1765, durante su larga polémica con J.L. D'Alembert sobre la solución de la ecuación de la cuerda vibrante (es decir, la ecuación de ondas unidimensional). A lo largo del primer tercio del siglo XX, este método fue utilizado por diversos autores para introducir soluciones generalizadas de E.D. concretas, usando distintas nociones de convergencia en la definición. Así, en 1926, N. Wiener emplea la convergencia en L^2 de una sucesión de soluciones clásicas; J. Leray (1934) usa la convergencia débil o en norma en L^2; S. Sobolev (1935) emplea la convergencia en L^1; K. O. Friedrichs (1939) utilizó la convergencia en la norma $\|f\|_2 + \|f'\|_2$; L. Schwartz (en 1944, inmediatamente antes de definir las distribuciones) empleó la convergencia uniforme sobre compactos, etc.

Otra manera de extender la noción de solución de una E.D. es generalizar la noción de derivada y definir como solución a una función cuyas derivadas generalizadas satisfagan la E.D. Entre los primeros trabajos en esta dirección, puede citarse la noción de *derivada simétrica* de B. Riemann, introducida y utilizada sistemáticamente en su *Habilitatioarbeit* sobre series trigonométricas, en 1854. Posteriormente, podemos citar la extensión realizada por U. Dini (1878), sustituyendo simplemente el límite ordinario en la definición de derivada por los límites superior e inferior, a la derecha y a la izquierda, en cada punto. En el mismo orden de ideas está la de sustituir una expresión diferencial compuesta de varios operadores, lo que involucra un paso al límite para cada uno, por un sólo paso al límite. Por ejemplo, G. C. Evans sustituyó en 1913 el operador

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u$$

por

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y)}{h^2}.$$

Variaciones de estos métodos fueron usados también por H. Petrini (1908) y N. Wiener (1927).

La aparición de la integración de Lebesgue, originó, por otro lado, la noción de *derivada en casi todo punto*.

Las distintas nociones de derivada generalizada de una función fueron utilizadas sistemáticamente en el contexto de la teoría de la medida (teorema fundamental del cálculo) y el cálculo de variaciones, lo que condujo de manera natural a la aparición en este ámbito de los precursores de los que después se llamaron *espacios de Sobolev*, es decir, espacios de funciones absolutamente continuas tales que ellas y sus derivadas hasta un cierto orden (¡definidas en casi todo punto!), estén en L^p (Beppo-Levi, Tonelli, Nikodym, etc.).

Pero el método más utilizado para extender la noción de solución de una E.D. (A) de orden n, consiste en encontrar otra ecuación o condición (B) que, para funciones de clase n sea equivalente a la original, *pero que tenga sentido para funciones más generales.* Los objetos que satisfagan (B) se llamarán entonces *soluciones generalizadas* de (A). En general, la nueva condición (B)

se obtiene por alguna forma de integración por partes. Por ello, a menudo la condición a satisfacer por las soluciones generalizadas es de la forma "la condición (B) se cumple para todos los objetos de una cierta clase" (objetos de prueba u *objetos test*).

El primero en sacar provecho a estas ideas fue el Profesor de Harvard M. Bôcher en sus estudios sobre la noción de *función armónica generalizada* (es decir, solución generalizada de la ecuación $\Delta u := \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$) en un dominio acotado Ω (1905). Usando la fórmula de Green

$$\int\int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$

Bôcher observó que, tomando $v = 1$, si u es armónica en Ω entonces $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, *condición en la que sólo aparecen las derivadas primeras de* u. Bôcher definió entonces una función armónica generalizada en Ω como una función de clase 1 en Ω que verifica

$$\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

para todo círculo $D \subset \Omega$. Como el propio Bôcher se encargó de probar, toda función armónica generalizada es una función armónica en sentido clásico. (De hecho, toda *distribución* solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es una función armónica clásica). Las ideas de Bôcher fueron continuadas por su colega G.C. Evans y empleadas también por distintos autores para definir soluciones generalizadas de E.D.

Finalmente, otro método muy relacionado con el anterior es el llamado *método de las funciones test*, y es el método básico de la teoría de distribuciones de Schwartz. Consiste en multiplicar la E.D. a estudiar, por ejemplo $P(D)u = 0$, por una función test suficientemente regular, con soporte compacto, en un cierto dominio, y el resultado se integra por partes:

$$\langle P(D)u, \varphi\rangle := \int P(D)u \cdot \varphi = 0 = \int u \cdot P(D)\varphi = \langle u, P(D)\varphi\rangle, \ \forall\varphi.$$

De esta forma, el operador diferencial se transfiere a la función test y la ecuación integro-diferencial resultante, que ha de verificarse para todas las funciones test, no presupone ninguna regularidad de la solución. Es un método muy relacionado con el anterior y su origen está en el estudio de las ecuaciones hipérbólicas. Anticipado por Lagrange en 1761 (véase, por ejemplo, [3], pág. 31), fue formulado explícitamente por N. Wiener (1926) y después por J. Leray, S. Sobolev y R. Courant (de hecho, la primera aparición de una solución generalizada de una E.D. en un libro de texto, tiene lugar en la edición de 1937 del clásico *Methoden der Mathematischen Physik*, de R. Courant y D. Hilbert).

El otro antecedente principal del origen de las distribuciones está relacionado con el anterior: Los ingenieros, físicos y técnicos venían usando desde el siglo XIX diferentes *cálculos operacionales* para resolver fácilmente diversos tipos de ecuaciones funcionales. Estos cálculos, que adolecen de falta de rigor matemático, conducen en muchos casos a resultados satisfactorios. Herramienta fundamental en ellos es el uso de ciertas *funciones singulares*, como la ubicua "función" δ que, aunque introducida explícitamente por G. R. Kirchoff en su tratamiento de la ecuación de ondas en un trabajo publicado en 1882, realmente aparece más o menos maquillada a lo largo de la historia, en conexión con distintos temas: series de Fourier (Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822), funciones de Green, etc. Más significativa es la utilización de la función δ por parte de físicos e ingenieros. Así, el ingeniero eléctrico O. Heaviside desarrolló, a finales del siglo XIX, un cálculo operacional de difícil justificación matemática, basado en razonamientos experimentales y que alcanzó una gran difusión en el primer tercio del siglo XX. En este cálculo, la función δ aparece como *función impulso unidad*, derivada de la función $H(t)$, que vale 0 si $t < 0$ y 1 si $t \geq 0$. Como explica Heaviside:

> ... Como H es 0 antes de 0 y constante después, H' es cero, excepto en $t = 0$, donde es infinita. Pero su suma total es H. Esto es, *H' es una función de t enteramente concentrada en $t = 0$, de suma total 1 ...*

(Lo que propugna Heaviside es la validez del teorema fundamental del cálculo para H', es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} H' = 1$). La función H aparece de modo natural en la modelización de todo fenómeno físico que comience en un momento dado. Por ejemplo, la intensidad $I(t)$ que recorre un cierto circuito eléctrico vale 0 antes de cerrar el circuito (digamos, para $t < 0$) y toma un valor > 0, determinado por las leyes que rigen el circuito, cuando empieza a circular la corriente. Usualmente $I(t)$ y otras magnitudes significativas se supone que verifican un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en general, lineales y con coeficientes constantes), con soluciones válidas para todo valor de t. Pero las magnitudes que realmente deben satisfacer a este sistema son de la forma $H(t)I(t)$, de donde el interés en definir $H'(t)$. En el cálculo de Heaviside la H' aparecía como un término intermedio en las operaciones, y desaparecía en los resultados finales. Pero en los intentos posteriores de tratar con rigor el cálculo operacional en términos de la transformada de Laplace, el papel de la δ fue tomando mayor protagonismo.

Pero quizá el mayor responsable de la popularización de la δ y sus variantes fue P. A. M. Dirac, en su intento de unificar los formalismos matricial y ondulatorio de la mecánica cuántica. Dirac representó los estados de un sistema mecánico por vectores, y los observables por operadores lineales. En sus razonamientos, Dirac suponía que en el espacio vectorial de estados, se podía elegir siempre una base formada por los autovectores de un operador correspondiente a algún observable. Pero, desde el punto de vista físico, los operadores más interesantes poseen un espectro continuo, por lo que la base correspondiente de autovectores, (ψ_p), será, en general infinita (en palabras de Dirac: *... el número total de estados independientes es infinito, e igual al número de puntos de una línea*), y la expresión de cualquier estado (vector) en términos de la base tomará la forma $\psi = \int a_p \psi_p \, dp$ (en lugar de una suma). Pero cuando, por ejemplo, se quiere representar de esta forma uno de los autovectores ψ_q, surge un problema, pues se tiene que escribir $\psi_q = \int \delta(p-q)\psi_p \, dp$, donde *"la función impropia δ está definida por*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p)\, dp = 1, \quad \delta(p) = 0 \text{ para } p \neq 0\text{"}.$$

La representación de operadores en este caso se hacía en términos de una "matriz continua", (α_{pq}), en la forma

$$\alpha(\psi_q) = \int \psi_p \alpha_{pq}\, dp.$$

Pero entonces, por ejemplo, el operador de multiplicación por una constante $c \neq 0$, requería utilizar un núcleo de la forma $\alpha_{pq} = c\delta(p-q)$, que Dirac interpretaba como el análogo continuo de la matriz identidad (esta fue seguramente la razón de que Dirac designara esta función por δ; no por "Dirac", sino por "Kronecker"). Dirac dio también *"ciertas propiedades elementales de δ que se deducen de la definición o, al menos, no son inconsistentes".* Entre ellas:

$$\delta(-x) = \delta(x) \ ; \ x\delta(x) = 0 \ ; \ -\delta'(x) = \delta'(-x) \ ; \ x\delta'(x) = -\delta(x) \ ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a) \ ; \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\, dx = -f'(a).$$

En posteriores ediciones de su obra *Principios de la Mecánica Cuántica* fue añadiendo nuevas propiedades, como

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \ ; \ \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

En la tercera edición de su libro, Dirac mencionó *la forma alternativa de definir la δ* como la derivada de la función H.

El libro de Dirac se convirtió en un clásico y con él se generalizó el uso de las funciones singulares entre los físicos. En la tercera edición, Dirac se acerca mucho a la definición funcional de δ, cuando dice:

Aunque una función impropia no tiene un valor bien definido, cuando aparece como factor en un integrando, la integral sí que tiene un valor bien definido. En la teoría cuántica, siempre que aparece una función singular, en último término será usada dentro de una integral. Por tanto, sería posible desarrollar la teoría de modo que las funciones singulares aparecieran únicamente como integrandos, y así se podrían eliminar. El uso de funciones singulares, por tanto, no supone ninguna pérdida de rigor de la teoría, sino que, simplemente, es una notación conveniente ... De hecho, cualquier ecuación en la que aparece la función δ puede convertirse en otra equivalente, pero generalmente más complicada, en la que δ no aparece.

No nos dice Dirac la forma de hacer la transcripción, pero la presentación intuitiva que hace de la δ, como límite impropio de funciones ordinarias, sugiere que el *método riguroso* consistiría en efectuar los cálculos con las aproximaciones de δ, y luego pasar al límite en el resultado final. Parece haber evidencias claras de que muchos matemáticos desarrollaron o utilizaron distintas teorías como una forma de hacer precisos los *argumentos* que usaban la δ, pero no para fundamentar rigurosamente la función δ misma. Probablemente porque estaban tan convencidos de su ilegitimidad, que ni siquiera lo intentaban.

Otro tipo de funciones singulares o *funciones generalizadas* surge en la Teoría de series y trasformadas de Fourier. La razón es que para la existencia de la integral de Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}\,dx$, f debe ser, al menos, integrable y, por tanto, decrecer adecuadamente en el infinito. Esta restricción es un gran inconveniente en las aplicaciones, y sería deseable encontrar generalizaciones de la transformada de Fourier (con sus mismas propiedades funcionales) que permitieran aplicarla a funciones acotadas o más generales. Una referencia a algunos intentos en esta dirección, aparece en la introducción de [8], llegando a decir Schwartz que *... Pour l'intégrale de Fourier, l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée.* De hecho, algunas de las soluciones encontradas por autores como Carleman, Beurling y, sobre todo, Bochner, son muy próximas a las distribuciones de Schwartz. Una exposición más detallada de estos desarrollos puede verse en el Capítulo 3 de [6].

Pues bien, la teoría de distribuciones trata de estudiar y resolver la mayor parte de los problemas señalados anteriormente. Las distribuciones constituyen un conjunto que se asemeja mucho al universo matemático ideal de los físicos e ingenieros, en el que "todo vale": las funciones son siempre derivables, las series pueden derivarse o integrarse término a término, etc. Este universo contiene, por un lado, a las funciones (localmente integrables) y, por otro, a las distintas *funciones singulares*, como la δ y sus derivadas. A Schwartz se debe el lúcido análisis que le condujo a la creación de una teoría sistemática, coherente y muy potente, aplicable a la solución de muy diversos problemas.

La contribución de L. Schwartz

En su autobiografía científica ([9]), Schwartz cuenta que al final de la guerra, aislado como estaba en Grenoble, desarrolló una teoría completa de la dualidad en espacios funcionales generales, *... théorie que m'a paru alors sans application et que j'ai gardée pour moi. Elle devait être la clef de la théorie des distributions.* Schwartz generalizó la teoría de dualidad de los espacios de Banach a los espacios de Fréchet, definiendo el dual fuerte, caracterizando la reflexividad, los conjuntos acotados, etc. Los ejemplos más importantes de este tipo de espacios que conocía Schwartz eran los espacios de funciones holomorfas con la topología compacto-abierta usual y el espacio $C^\infty([0,1])$ de las funciones de clase infinito en $[0,1]$ con la topología de la convergencia uniforme de todas las derivadas. Este trabajo en análisis funcional no se publicó nunca, pero fue fundamental en el descubrimiento, casi instantáneo, de las distribuciones. El empuje decisivo lo proporcionó la lectura de un artículo de G. Choquet y J. Deny, titulado *Sur quelques propriétés des moyennes characteristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques.* En él se caracterizaban las funciones continuas f sobre $\mathbb{R}^n$ tales que el subespacio vectorial engendrado por $f \circ S$, cuando S recorre todas las semejanzas de $\mathbb{R}^n$, no es denso en el espacio de todas las funciones continuas. Estas funciones resultan ser las poliarmónicas, es decir, aquellas que cumplen $\Delta^k f = 0$ para algún natural k. Como estas funciones no son, a priori, derivables, los autores introducían una definición generalizada de función poliarmónica, a través de ciertas medias iteradas. Schwartz trató de generalizar el resultado, sustituyendo las semejanzas por traslaciones y homotecias. El resultado que obtuvo era similar, pero en lugar de una potencia del laplaciano aparecía un operador diferencial con coeficientes constantes arbitrario, de modo que la condición que debía cumplir ahora la función f es $P(D)f = \sum a_p D^p f = 0$. Schwartz tuvo que definir entonces la noción de solución generalizada del operador $P(D)$ y optó, esencialmente, por tomar como tal el límite uniforme sobre compactos de soluciones ordinarias. Posteriormente, probó que toda solución generalizada (en su sentido) de la ecuación de Laplace, era una solución ordinaria, mientras que existían soluciones generalizadas de la ecuación de ondas, que no eran soluciones ordinarias.

A raíz de este trabajo, Schwartz continuó pensando en la derivación generalizada. Le parecía frustrante poder definir la solución generalizada de un operador diferencial sin haber dado un sentido a las derivadas (generalizadas) $D^p f$. Y de repente, durante lo que Schwartz llamó *la plus belle nuit de ma vie* ([10], p. 246), surgió la gran idea: ¡para encontrar soluciones generalizadas de E.D.s, había que generalizar la noción de función! Analizando su demostración, se dio cuenta de que las soluciones generalizadas que había introducido, aparecían siempre en convolución con una función infinitamente diferenciable con soporte compacto. Esto le llevó a introducir un nuevo objeto, que llamó *operador de convolución*: lo definió como un operador lineal $\mathbf{T}$ del espacio $\mathcal{D}$ de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$, con soporte compacto, en $\mathcal{E}$, el espacio de las funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, con la propiedad de conmutar con la convolución:

$$\mathbf{T} \cdot (\varphi * \psi) = (\mathbf{T} \cdot \varphi) * \psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Además, $\mathbf{T}$ debería verificar alguna condición de continuidad para topologías adecuadas en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$. Este último espacio tenía una estructura bien conocida de espacio de Frechet, con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y cada una de sus derivadas. Pero sobre $\mathcal{D}$ Schwartz fue incapaz, en ese momento, de encontrar una topología que indujera la noción de convergencia secuencial que necesitaba, a saber: una sucesión (ϕ_n) converge a 0 en $\mathcal{D}$ si y sólo si todas las ϕ_n se anulan fuera de un mismo compacto, y convergen uniformemente a 0, junto con cada una de sus derivadas. En consecuencia, Schwartz impuso como condición de continuidad que los operadores transformaran sucesiones convergente a 0 en $\mathcal{D}$ (en el sentido anterior) en sucesiones convergentes a 0 en $\mathcal{E}$.

Schwartz observó que toda función continua f se podía identificar con el operador $\mathcal{D} \ni \varphi \mapsto f * \varphi$, y la "función" δ de Heaviside y Dirac se podía interpretar como el operador $\mathcal{D} \ni \varphi \mapsto \delta \cdot \varphi := \varphi$. Naturalmente, Schwartz abordó la cuestión de definir la derivada de un operador, lo que hizo por la fórmula:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{T}\right) \cdot \varphi := \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi,$$

que generaliza la fórmula $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi * \varphi = \psi * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$. La primitiva de un operador se define de manera obvia, así como la convolución de dos operadores. El producto de un operador por una función de $\mathcal{D}$, sin embargo, le ocasionó algunas dificultades.

Como hemos dicho, Schwartz desarrolló estos conceptos y varios teoremas sobre sus operadores en una noche de octubre de 1944. En los seis meses siguientes continuó trabajando sobre el mismo tema. Alrededor de febrero de 1945, comenzó a desarrollar una teoría de trasformadas de Fourier para sus operadores, pero se encontró con grandes dificultades. Intentó resolverlas durante varios meses. Por fin un día, de repente, se percató de que todos sus problemas se resolvían fácilmente si definía las funciones generalizadas no como operadores, sino como *funcionales* secuencialmente continuos sobre $\mathcal{D}$. A estos nuevos objetos los llamó *distribuciones* y a su conjunto lo designó por $\mathcal{D}'$. Como los elementos de $\mathcal{D}$ son muy regulares, la mayor parte de las operaciones usuales del análisis transforman $\mathcal{D}$ en sí mismo (con la excepción importante de la transformada de Fourier), y además *son continuas para la noción de convergencia secuencial introducida*. Por transposición, se obtienen operadores de $\mathcal{D}'$ en sí mismo, que con toda propiedad puede considerarse como la extensión a las distribuciones de las operaciones originales. Más aún, $\mathcal{D}$ está contenido en muchos de los espacios funcionales usuales, y es *denso* en ellos para sus topologías naturales (por ejemplo, los espacios L^p, $1 \leq p < \infty$, los espacios de Fréchet $\mathcal{E}^m$ $(0 \leq m \leq \infty)$ de las funciones de clase m sobre $\mathbb{R}^n$, con la noción de convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y cada una de sus m derivadas, etc.). Por tanto, de nuevo por transposición, los *duales* de esos espacios de pueden identificar con subespacios del espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$. Como ya hemos dicho, toda función localmente integrable f se puede identificar a una distribución $T_f \in \mathcal{D}'$ por la fórmula $T_f(\varphi) := \int f\varphi,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}$.

En cuanto a la transformación de Fourier $\mathcal{F}$, un famoso teorema de Paley y Wiener muestra que la única función $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{D}$ es la idénticamente nula. Por ello, Schwartz tuvo que introducir nuevos espacios de funciones *test* para extender la transformada de Fourier a las distribuciones. Así surgió el espacio $\mathcal{S}$, de las funciones de decrecimiento rápido en el infinito. Dotando a $\mathcal{S}$ de una topología natural de espacio de Fréchet, resulta que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}$ en sí mismo y $\mathcal{D}$ es *denso* en $\mathcal{S}$. Por tanto, el dual $\mathcal{S}'$ se puede identificar a un subespacio de las distribuciones (las *distribuciones temperadas*) y el operador transpuesto $\mathcal{F}^t$ puede considerarse como la extensión de la transformada de Fourier a las distribuciones de $\mathcal{S}'$. Señalemos que $\mathcal{S}'$ es muy grande: contiene a todos los L^p, $1 \leq p \leq \infty$, pero también a los polinomios, a la δ y sus derivadas, etc.

Según sus propias afirmaciones, la definición “correcta” de distribución le fue sugerida a Schwartz por los dos hechos siguientes:

1) Su trabajo anterior sobre la dualidad de espacios de Fréchet.

2) Su conocimiento, a través del grupo Bourbaki, de la teoría de medidas de Radon, en particular la δ, que podían representarse como funcionales sobre un espacio de las funciones continuas con soporte compacto.

Durante la primavera de 1945, Schwartz desarrolló su nueva teoría de distribuciones. Si en la teoría de operadores de convolución su trabajo sobre análisis funcional abstracto había jugado un papel importante, en la nueva teoría desempeñaba un lugar mucho más destacado. Y la influencia era recíproca. Por ejemplo, el concepto de *límite inductivo* de espacios de Fréchet se originó en la teoría de distribuciones. Schwartz sabía muy bien que la convergencia secuencial que había definido en $\mathcal{D}$ no podía obtenerse a partir de una topología de Fréchet en el espacio. Por tanto, él trató de definir sólo un sistema adecuado de conjuntos acotados (*bornología*) que le permitieran, por dualidad, definir una topología en $\mathcal{D}'$, el espacio de distribuciones. Cuando Dieudonné conoció la descripción de $\mathcal{D}$, la relacionó con la teoría abstracta de límites inductivos de espacios topológicos. En 1949 apareció un trabajo conjunto de Dieudonné y Schwartz, *La dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{LF})$ en el que iniciaba la teoría de límites inductivos de espacios localmente convexos, probando en un marco abstracto los principales teoremas que Schwartz había demostrado en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$.

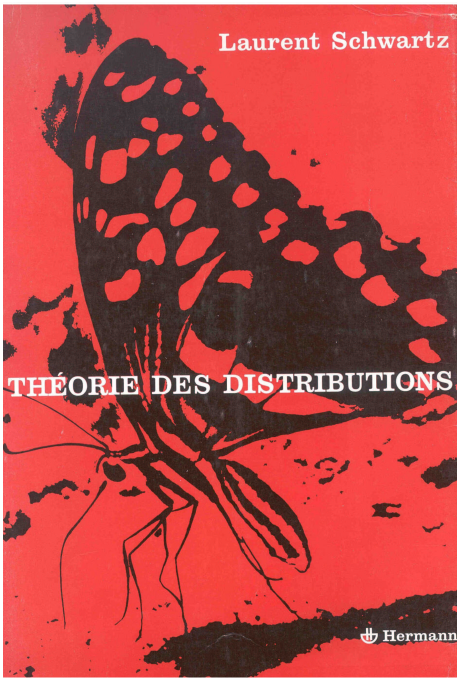
Gracias a su trabajo previo en análisis funcional, Schwartz desarrolló su teoría tan rápidamente que pudo dar un curso sobre ella en el invierno 1945-46, en el *Collège de France* de París.

Aparte de sus conocimientos sobre soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales (origen de su interés en el tema), Schwartz no tenía información, en 1944, de la mayor parte de los resultados que hemos citado anteriormente, como precedentes de las distribuciones: el cálculo de Heaviside, las funciones singulares de la mecánica cuántica, los trabajos de Bochner y Carleman sobre generalizaciones de la transformada de Fourier, etc. Tampoco sabía nada de un importante trabajo, aparecido en 1936, de S. Sobolev, que tenía muchos puntos de contacto con su teoría. En efecto, en ese trabajo, titulado *Méthode nouvelle á résoudre le probléme de Cauchy pour les equations linéaires hyperboliques normales*, Sobolev aborda el problema de Cauchy para una E.D. en derivadas parciales de orden 2, hiperbólica. Para su solución, introduce el espacio de las funciones de clase s (suficientemente grande) de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y el espacio fundamental de funcionales, Z_s, como los funcionales lineales secuencialmente continuos, en el mismo sentido que Schwartz (es decir, ¡las distribuciones de Schwartz para $s = \infty$!). Identifica las funciones localmente integrables con funcionales, define el operador de derivación de la forma usual, etc., lo que le permite extender el operador diferencial a Z_s y tratar de resolver el problema de Cauchy en este espacio. En lugar de eso, Sobolev introdujo ciertos espacios intermedios de funciones, lo que le permitió obtener condiciones para que existieran soluciones clásicas del problema tratado. Sobolev no continuó el estudio de los espacios funcionales. En sus trabajos posteriores se mantuvo siempre dentro de los conceptos tradicionales de función, aunque sí usó sistemáticamente la noción de diferenciación generalizada (de funciones), lo que le llevó a introducir los espacios funcionales que hoy conocemos por su nombre:

$$W_m^p = \{f \in L^p : D^\alpha f \in L^p \text{ para } |\alpha| \leq m\},$$

donde la derivada $D^\alpha f$ ha de entenderse en el sentido de las distribuciones. En 1938 anunció sus famosos *teoremas de inmersión* que fueron (y son) ampliamente utilizados. En resumen, la diferenciación generalizada de Sobolev influyó de forma importante en la utilización de los espacios de Sobolev en la teoría de E.D., pero los funcionales de Sobolev (las *distribuciones*) no volvieron a ser utilizados hasta su redescubrimiento por Schwartz.

Así pues Sobolev, como Schwartz, quería generalizar el concepto de función y algunas operaciones clásicas y construir un conjunto más amplio donde cierto problema pudiera resolverse más fácilmente. Los métodos inicialmente usados por Sobolev y Schwartz son análogos: funcionales (sobre los mismos espacios) y transposición. Desde este punto de vista, puede decirse que Sobolev inventó las distribuciones. Sin embargo, Sobolev creó estos objetos como herramienta para resolver un problema concreto, y no volvió a ocuparse de ellos en general. Por contra, Schwartz desarrolló una teoría completa, versátil y muy potente, aplicable y aplicada por él mismo a la solución de muchos problemas diferentes. Además, introdujo una serie de nociones que ni se esbozan en el trabajo de Sobolev: las distribuciones temperadas, el soporte de una distribución, las transformaciones de Fourier y Laplace de distribuciones, la interpretación de



la δ y las funciones singulares de los físicos como distribuciones, así como las partes finitas de Hadamard, los productos tensoriales y la convolución, etc. Así que podemos decir que, si bien Sobolev inventó las distribuciones, Schwartz creó la *Teoría de distribuciones* como cuerpo de doctrina.

Schwartz escribió cuatro artículos sobre la teoría de distribuciones antes de la publicación de su monografía *Théorie des Distributions*, aparecida en dos volúmenes en 1950/51, y que pronto se convirtió en la referencia estándar sobre el tema. La reedición de 1966 contenía dos nuevos capítulos, uno sobre la Transformación de Laplace y otro sobre las Corrientes.

La obra matemática de Laurent Schwartz

Como hemos dicho ya, la obra matemática de Schwartz abarca muchos más aspectos que la Teoría de Distribuciones. Y nada mejor que tener al propio Schwartz como guía para conocer su obra, quien, en [9], divide su labor de investigación en cinco grandes apartados:

- I. *Polinomios, sumas de exponenciales, funciones semi-periódicas, análisis y síntesis armónica.*

Aquí incluye Schwartz su Tesis y algunos de sus primeros trabajos. En todos ellos se estudian problemas de aproximación en espacio funcionales. Así, en su Tesis Schwartz aborda el problema siguiente. Un famoso teorema de Ch. H. Müntz generaliza el teorema de Weierstrass probando que toda función real continua en $[0,1]$ se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales finitas de los monomios $\{t^{\lambda_n} : \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$ números reales con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty\}$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge. La pregunta a la que responde Schwartz en su Tesis es *¿qué funciones se pueden aproximar por los polinomios precedentes si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ *converge?* El Teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias jugaron un papel importante en la solución.

El resto de los trabajos de este apartado trata problemas similares: caracterizar cuándo un cierto subespacio de un espacio funcional contiene algunos elementos distinguidos y, en el caso de la síntesis armónica, probar que el subespacio vectorial cerrado generado por los elementos distinguidos coincide con el espacio de partida. Particularmente interesante, por los trabajos posteriores que originó, fue el problema de la síntesis armónica en el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones temperadas que, via la transformación de Fourier, se traslada a interesantes problemas de anillos de funciones diferenciables. Esto llevó a Schwartz a ponerse en contacto con H. Whitney (la primera vez, aprovechando un Congreso en Nancy en junio de 1947), con un intercambio científico fructífero para ambos. En relación con estos temas, hay que destacar los trabajos de B. Malgrange y J. C. Tougeron, recogidos algunos de ellos en las conocidas monografías *Ideals of differentiable functions* (B. Malgrange, Tata Institute, Oxford University Press, 1967) y *Les Idéaux de fonctions différentiables* (J. C. Tougeron, Springer, 1972).

- II. *La Teoría de Distribuciones.*

Es probablemente la obra más emblemática de Schwartz. A ella hemos hemos dedicado toda la Sección anterior.

- III. *Análisis funcional, distribuciones vectoriales y teorema de los núcleos.*

Ya hemos comentado la importancia que tuvo para la creación de la teoría de distribuciones los conocimientos de Schwartz de Análisis Funcional. Pero los instrumentos necesarios para desarrollar la teoría, eran insuficientes. Y Schwartz contribuyó no poco a su creación. Ya hemos comentado el famoso trabajo con J. Dieudonné de 1949, en el que estableció la teoría de límites inductivos de espacios de Fréchet, esencial para el conocimiento del espacio $\mathcal{D}$ y su dual. La aparición de este trabajo estimuló el desarrollo de la teoría de espacios localmente convexos (e.l.c.). Probablemente se debe a Schwartz y Dieudonné la idea de clasificar los e.l.c. según su comportamiento frente a algunos teoremas *clásicos* o propiedades importantes de los espacios normados. Así, los e.l.c. para los que se cumple el teorema de Banach-Steinhaus, se llaman *tonelados*; los e.l.c. tales que toda aplicación lineal acotada sobre ellos, es continua, se llaman *bornológicos*; aquellos en los que se cumple cierta versión del Teorema de la Aplicación abierta, se llaman *espacios de Pták*, etc. Lo cierto es que esta clasificación apareció en el *Livre 5* de los *Éléments de Mathématique* de Bourbaki, titulado *Espacios Vectoriales Topológicos*, una de las primeras monografías sobre el tema y de gran influencia posterior.

También se debe a Schwartz una extensión a los espacios de Fréchet de la teoría clásica de Riesz sobre perturbaciones compactas de la identidad en espacios de Banach, así como un teorema de la gráfica boreliana, que extiende el clásico teorema de la gráfica cerrada, demostrado por Banach para F-espacios, pero que no era aplicable a los espacios de distribuciones. Este resultado fue extendido posteriormente por De Wilde, quien introdujo los espacios que llevan su nombre, como el marco más adecuado para desarrollar un teorema del tipo "gráfica cerrada" más general.

Finalmente, queremos citar en este apartado uno de los grandes éxitos de la teoría de distribuciones: el descubrimiento en 1950 por Schwartz del *teorema de los núcleos*. Desde los trabajos de Hilbert y Riesz, se sabía que los operadores en un espacio funcional dado (por ejemplo, L_2), definidos por un "núcleo funcional" $K(x,y)$, es decir, de la forma $T_K(f)(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$, tenían propiedades especialmente agradables, pero que, desafortunadamente, estos operadores no agotaban todos los posibles (de hecho, la identidad en L_2 no puede expresarse así; esta es una de las dificultades que aparecieron al tratar de formalizar la mecánica cuántica. Dirac intentó justificar que los *observables* venían siempre dados por operadores de este tipo, admitiendo, eso sí, funciones singulares como núcleos). Sin embargo, fue Schwartz quien consiguió demostrar que prácticamente todos los operadores que aparecen en Análisis, se pueden representar por un "núcleo distribucional". Concretamente, si U, V son abiertos en sendos espacios euclídeos, $\mathcal{D}(U)$ el espacio de funciones de clase infinito, con soporte compacto contenido en U, $\mathcal{D}'(V)$ el espacio de las distribuciones (es decir, el dual de $\mathcal{D}(V)$) sobre V, *cualquier* operador lineal continuo $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ tiene asociado un "núcleo distribucional" $K \in \mathcal{D}'(U \times V)$ de modo que para todo par de funciones $u \in \mathcal{D}(U), v \in \mathcal{D}(V)$, se tiene $\langle T(u), v\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle$ o, en forma simbólica,

$$T(u) = \int K(x,y)u(x)\,dx.$$

Si ahora E es un espacio de funciones sobre U y F otro sobre V, usualmente se tiene la relación $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$, y $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$, con lo que cualquier operador lineal continuo $S : E \to F$ da lugar, por composición, a un $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$, y, por tanto, viene definido por un núcleo distribucional.

En su Tesis, A. Grothendieck (a quien ya hemos citado), otro de los grandes responsables del tremendo desarrollo de la teoría de e.l.c. en la década de 1950-1960, abordó el problema de descubrir la razón de por qué se verificaba el teorema de los núcleos en el espacio $\mathcal{D}$ y no, por ejemplo, en L_2.

El resultado fue una monografía, *Produits tensorielles topologiques et espaces nucléaires*, publicada en las *Memorias de la American Mathematical Society* en 1953. Esta obra, de difícil lectura, contiene una tremenda cantidad de ideas seminales, que motivaron muchos de los desarrollos posteriores de la teoría de e.l.c. y de los espacios de Banach. En ella se aísla la clase de e.l.c. para los que el teorema de los núcleos se cumple: los *espacios nucleares*. La mayor parte de los espacios de funciones que aparecen en la teoría de distribuciones, son nucleares. Sin embargo, ¡los únicos espacios normados nucleares, son los de dimensión finita! Los espacios nucleares también mostraron su importancia en la teoría de probabilidades y en la teoría de la medida.

La impronta de Grothendieck se dejó notar durante mucho tiempo, y no sólo en Análisis Funcional (recordemos sus trabajos fundamentales sobre Geometría Algebraica, etc.). Sus ideas y métodos de trabajo abrieron nuevas perspectivas y líneas de investigación que sigue ocupando a los especialistas. Pero su enumeración resultaría demasiado técnica y prolija y, en todo caso, remitimos al lector interesado a [1].

- IV. *Física Teórica.*

Era inevitable que Schwartz estudiara algunas aplicaciones de la teoría de distribuciones a la Física. Sus contribuciones más importantes en esta dirección están recogidas en la monografía *Application of distributions to the theory of elementary particles in Quantum mechanics* (Gordon and Breach, New York, 1968), traducido posteriormente al francés.

- V. *Teoría de la integración, probabilidades, probabilidades cilíndricas y aplicaciones radonificantes.*

Schwartz siempre ha manifestado su reconocimiento y admiración hacia su suegro, el gran probabilista Paul Levy, y la influencia que ejerció sobre él. Por ello, la teoría de la medida e integración es un tema recurrente en su actividad investigadora. De hecho, a partir de 1964, estos temas son los que acapararon su atención de forma prioritaria. Y también en ellos Schwartz ha dejado su impronta. Su obra *Radon Measures on arbitrary topological spaces and Cylindrical measures*, publicada por el Tata Institute of Fundamental Research de Bombay y Oxford University Press en 1973, establece un puente entre la teoría de la medida conjuntista, como función de conjunto numerablemente aditiva sobre una sigma álgebra, y la teoría de medidas de Radon de Bourbaki (heredera de los trabajos previos de H. Cartan y A. Weil), definidas como formas lineales no negativas sobre el espacio $\mathcal{K}(X)$ de las funciones continuas con soporte compacto sobre el espacio topológico localmente compacto X. Además, esta nueva teoría de medidas de Radon en espacios arbitrarios, permite desarrollar una teoría consistente de probabilidades cilíndricas en espacios localmente convexos. Estos objetos surgen al tratar de construir funciones de conjunto en el espacio E "pegando" probabilidades definidas sobre espacios de dimensión finita (por ejemplo, a partir de medidas gausianas n-dimensionales, obtener una cierta "medida" en el espacio total). En general, se obtiene una función de conjunto sobre un *álgebra* de subconjuntos de E, los *conjuntos cilíndricos*, que no puede extenderse a una medida numerablemente aditiva. Introducidas por I. Segal, L. Gross y la escuela soviética de probabilidades (J. V. Prohorov, V.V. Sazonov, R. A. Minlos, etc.), a ellos se deben los primeros resultados detacables. La teoría de Schwartz proporciona un marco general que incluye la mayoría de los resultados clásicos, clarificando el papel de los distintos tipos de operadores que aparecían en los mismos (nucleares, de Hilbert-Schmidt, etc.) y desarrollando una teoría completamente nueva: la de los *operadores radonificantes*. Esencialmente, un operador T de un espacio de Banach E en otro F es *radonificante* (de un cierto orden p) si trasforma probabilidades cilíndricas sobre E (de tipo p) en medidas de Radon sobre F (de orden p). Estos operadores generalizan los operadores p-sumantes (y, como demostró el propio Schwartz, coinciden en el caso $1 < p < \infty$, aunque el resultado no es trivial.) La teoría tiene estrechas relaciones con la geometría de Espacios de Banach, como se pone de manifiesto en la memoria *Geometry and Probability in Banach spaces*, aparecida en 1981 como volumen No. 852 de la colección *Lecture Notes in Mathematics*, que recoge una serie de Conferencias dictadas por Schwartz en Berkely en 1978.

El interés científico de Schwartz en sus últimos años se fue decantando más y más hacia las probabilidades. Obtuvo importantes resultados sobre desintegración de medidas, con aplicaciones a la teoría de martingalas y supermartingalas (con valores escalares o medidas), a los procesos de Markov, etc. También estudió las semi-martingalas con valores en una variedad diferencial o una variedad analítica, y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

CONCLUSIÓN

Yo soy un matemático; las matemáticas han llenado mi vida... Así comienza Schwartz su autobiografía y, probablemente, ésta haya sido la característica esencial de su vida. En otro lugar, dice: *... siempre he querido cambiar el mundo. He consagrado una gran parte de mi vida a la política, adoptando la "carrera" de intelectual comprometido. Pero las matemáticas han seguido siendo primordiales ... Muchas veces he hecho política por sentido del deber, pero la política no me interesa: mis tres pasiones son la investigación, la enseñanza y la entomología.*

Como escribe Luis M. Sáenz ([11]), *... la vida de Laurent Schwartz causa envidia –por ser una vida plena– y asombro, ya que no podemos dejar de preguntarnos ¿es posible que una persona pueda hacer tantas cosas y hacerlas tan bien?* A lo largo de esta breve reseña, esperamos haber despertado en el lector esta sensación. Creemos que Laurent Schwartz ha sido un gran hombre, en todos los sentidos del término. Su personalidad y su compromiso ético han hecho de él un referente de intelectual comprometido con su tiempo. Con su muerte no sólo desaparece un excelente matemático, sino un magnífico ejemplar de ser humano.

Bibliografía

[1] L. Alonso y A. Jeremías, La obra de Alexander Grothendieck, La Gaceta de la RSME, Vol. **4**, N. 3 (2001), 623-638.

[2] H. Bohr, Address of Professor Harald Bohr, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1950. Cambridge, Massachusets, U.S.A., Vol. I*, 127-134. American Mathematical Society, 1952.

[3] F. Bombal, *Los orígenes de la Teoría de Distribuciones,* Seminario de Historia de la Matemática, I. Universidad Complutense, Madrid, 1991.

[4] K. Chandrasekharan, The Autobiography of Laurent Schwartz, *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. **45**, N. 9 (1998), 1141-1147.

[5] J. Hernández, Matemático, entomólogo, persona decente. Laurent Schwartz, un mathématicien aux prises avec le siècle, La Gaceta de la RSME, Vol. **2**, N. 2 (1999), 319-326.

[6] J. Lützen, *The Prehistory of the Theory of Distributions,* Springer-Verlag, 1982.

[7] M. Monastyrsky, *Modern Mathematics in the light of the Fields Medals,* A. K. Peters, Ltd. Wellesley, Mass., 1996.

[8] L. Schwartz, *Théorie des Distributions,* Tercera Edición, Hermann, París, 1966.

[9] L. Schwartz, *Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz,* Mathematical Analysis and Applications, Part A, 1-25. Col. Advances in Mathematics, Supplementary Studies. Ed. by L. Nachbin. Academic Press, 1981.

[10] L. Schwartz, *Un Mathématicien aux prises avec le siècle,* Éd. Odile Jacob, 1997

[11] L. M. Sáenz, Memorias de Laurent Schwartz (Pasión por saber, pasión por vivir), *Iniciativa Socialista*, **46**, Junio 1997.

Fernando Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense, 28040 Madrid.
Correo electrónico: `bombal@mat.ucm.es`