A un siglo del descubrimiento de *"EL MÉTODO"* de Arquímedes por Heiberg

por

Pedro Miguel González Urbaneja

Hace ahora cien años, el brillante helenista e historiador científico J.L. Heiberg, con gran perspicacia y sagacidad, descubre, en novelescas circunstancias, y exhuma, tras una formidable labor de arqueología matemática, un palimpsesto que contenía la obra perdida de Arquímedes *"EL MÉTODO"*, un tratado singular en el que el científico de Siracusa revela a la comunidad matemática alejandrina, en carta dirigida a Eratóstenes, el método mecánico de investigación que utilizaba en sus descubrimientos y que había omitido en todos los restantes escritos científicos. Al contener la vía heurística de la investigación geométrica de Arquímedes, previa a la demostración por exhaución, el hallazgo de Heiberg ha sido, quizá, el suceso reciente más importante para el conocimiento de la Geometría griega.

Considero que hubo en aquel siciliano [Arquímedes]
más inteligencia que la que parece que
haya podido producir la naturaleza humana.
Cicerón, *De Republica*, I,14.

La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea
que en un poeta que inventa [...].
De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes
el que más merece figurar al lado de Homero.
D'Alembert, *Discurso preliminar de la Enciclopedia.*
Orbis, Barcelona, 1984. p.63.

Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas,
parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de
Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad.
E. Torricelli, *Opera geometrica*, Florencia, 1644, Proemio.

Arquímedes es reconocido, con sorprendente unanimidad, por su genialidad y originalidad, como el más importante de los matemáticos de la antigüedad. Sus principales obras fueron impresas y traducidas al latín por vez primera entre 1503 y 1588, ejerciendo una decisiva influencia sobre la especulación científica de esa época. En la centuria siguiente Stevin, Galileo, Cavalieri, Kepler, Torricelli, Fermat, Wallis y Barrow y otros, reconocerán la inmensa deuda con el *"sobrehumano Arquímedes"*, cuya obra, pródiga en asombrosos resultados y modelo de exposición rigurosa, desarrolla una concepción matemático experimental que está en la raíz de una tradición científica –llamada después *Filosofía Natural* y mucho más tarde *Física Matemática*– que, retomada por Galileo, establece las bases de la Revolución Científica del siglo XVII, y en particular constituye un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva Física como para la invención del Cálculo Infinitesimal. Así lo señala A. Koiré (en *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*, Siglo XXI, Madrid, 1971. p.44):

> *"Son la maduración y la asimilación de la obra de Arquímedes las que sirven de base a la revolución científica que se realizará en el siglo XVII".*

Euclides y Arquímedes, las dos figuras más importantes de la Matemática griega, se sitúan en el siglo III a.C. Si a Euclides le cabe el gran mérito de la compilación, ordenación y sistematización de la Geometría griega elemental en *Los Elementos*, así como la instauración de un estilo de presentación, a Arquímedes se le considera como el investigador por excelencia, con una ingente contribución al engrandecimiento del patrimonio matemático de su época, en una triple vertiente: la de la propia ampliación considerable de los conocimientos matemáticos euclídeos, la consolidación del impecable procedimiento demostrativo, y, lo que desde el punto de vista heurístico es todavía más importante, la aplicación de una metodología nueva aplicada al descubrimiento matemático.

En la actividad investigadora de Arquímedes se aúnan los aspectos científicos con los técnicos en una síntesis armónica que, elevándose a las más altas cotas del rigor, produjo extraordinarios resultados al complementar la investigación teórica con las aplicaciones prácticas. Arquímedes no descarta ningún procedimiento técnico extraído de la Mecánica y de la Geometría del mundo sensible sino que aprovecha cuanto habían desdeñado o proscrito los platónicos –lo infinitesimal, lo mecánico, lo operativo...–, y todo lo que le ofrece la realidad, por irregular y corpórea que sea, como elementos de una investigación objetiva precedente, a la que sigue, bajo un espíritu de rigor euclidiano, la convalidación apodíctica de todo cuanto en la fase inventiva anterior ha intuido. Arquímedes lleva por tanto una doble actividad como matemático, la inventiva y la demostrativa, pero en sus grandes tratados clásicos sólo da cuenta de la segunda, produciendo una gran admiración sus magníficos resultados matemáticos, pero también una gran perplejidad, ante la ocultación del camino seguido en la investigación. Sólo en una obra, *El Método relativo a los teoremas mecánicos* (cuyo largo título indicaremos por *EL MÉTODO*), Arquímedes, de una forma totalmente diferente a los esquemas metodológicos euclídeos, con una brillante conjunción de la Mecánica y la Geometría, revela de forma heurística, en una comunicación a Eratóstenes, las vías y los procedimientos mecánicos que utilizaba en sus descubrimientos matemáticos. Desgraciadamente la obra de Arquímedes desapareció, siendo recuperada por J.L. Heiberg en 1906, de modo que aunque se intuía que Arquímedes utilizaba un método singular y original en su investigación, permaneció oculto durante siglos.

Los escritos de Arquímedes son densas memorias científicas en las que se asumen, sin mencionarlos explícitamente, todos los resultados matemáticos concebidos anteriormente. Todos los escritos de Arquímedes son originales que transcienden considerablemente la Matemática anterior y tienen la estructura euclídea de empezar postulando las hipótesis, a las que siguen las proposiciones impecablemente demostradas, con una ocultación (salvo precisamente en *EL MÉTODO*), que parece deliberada, del proceso inventivo.

Exceptuando ciertas obras menores (*El Stomachion*, *El Libro de los Lemas* y *El Problema de los bueyes*), en los restantes tratados Arquímedes demuestra importantes resultados sobre la determinación de áreas, volúmenes y centros de gravedad, que actualmente se obtienen con el Cálculo Integral. La secuencia lógica y cronológica de los escritos de Arquímedes no es fácil de establecer. Enumeraremos y describiremos muy sucintamente el contenido de las obras referentes a los temas mencionados según el orden propuesto por J.L. Heiberg.

1. *Sobre la Esfera y el Cilindro*: resultados sobre la esfera, el cono y el cilindro, en particular la legendaria propiedad de la razón de 2 a 3 entre la esfera y el cilindro circunscrito, tanto en superficie total como en volumen.

2. *Sobre la Medida del Círculo*: resultados sobre la equivalencia entre el círculo y el triángulo de base la circunferencia del círculo y altura el radio (es decir, reducción de la cuadratura del círculo a la rectificación de la circunferencia), y cálculo aproximado de la razón entre la circunferencia y el diámetro (valor aproximado del número π).

3. *Sobre Conoides y Esferoides*: resultados sobre la razón entre segmentos de elipsoides, paraboloides e hiperboloides de revolución y los conos de igual base y eje.

4. *Sobre las Espirales*: resultados sobre el área encerrada por las espiras de "*La Espiral de Arquímedes*" y rectificación de un arco de la circunferencia mediante esta curva.

5. *Sobre el Equilibrio de los Planos*: resultados sobre el centro de gravedad de figuras poligonales, del segmento de parábola y del trapecio parabólico. Aunque es un tratado de Estática, formalmente sigue la línea euclídea con definiciones, postulados y demostraciones en los que además de conceptos geométricos se utilizan el peso y el centro de gravedad de figuras. En este escrito Arquímedes formula la famosa *"Ley de la palanca"*.

6. *Sobre la Cuadratura de la Parábola*: resultados sobre la cuadratura de un segmento de parábola, primero mediante recursos de Estática extraídos

de *Sobre el Equilibrio de los Planos* y después mediante consideraciones geométricas.

7. *Sobre los Cuerpos Flotantes*: resultados sobre la posición de equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución parcialmente sumergido en un fluido. En este tratado, elaborado también a la manera euclídea, aparece el famoso *"Principio de Arquímedes"* de la Hidrostática.
8. *El Método relativo a los teoremas mecánicos* donde Arquímedes pone de manifiesto el procedimiento heurístico seguido en el descubrimiento de los anteriores resultados.

Los resultados relacionados anteriormente son demostrados en general por Arquímedes mediante el método de exhaución, ideado por Eudoxo de Cnido. Este método obliga a conocer previamente el resultado a demostrar, es decir carece de valor heurístico, no sirve para encontrar nuevas verdades sino sólo para demostrar aquellas de las cuales ya se tiene un conocimiento previo. El método de exhaución es pues un método de demostración y no de descubrimiento, precisando ser complementado a priori con otro método, ya sea analítico o mecánico, para descubrir los resultados. Siendo esto así, surge de forma natural la pregunta acerca de cómo conocía y obtenía Arquímedes los magníficos resultados que luego demostraba con un rigor absoluto, porque en ninguno de los tratados clásicos mencionados Arquímedes sugiere lo más mínimo al respecto. Cabe decir que en los casos sencillos, Arquímedes puede haber llegado intuitivamente a los resultados por vía inductiva. Por ejemplo, relacionando un polígono con el cuadrado construido sobre el diámetro de su círculo circunscrito, sabiendo que las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados están en razón como los cuadrados correspondientes aludidos [*Euclides* XII.1], razonando inductivamente resulta plausible que la misma razón se mantenga para los propios círculos. Así se aventuraría un resultado [*Euclides* XII.2] –ya conocido por Hipócrates de Quíos–, que el método de exhaución –aplicado por Eudoxo– confirmaría plenamente a posteriori. Pero el alcance de la intuición tiene sus límites:

- ¿Cómo se puede intuir que "la superficie de la esfera es cuatro veces un círculo máximo"?
- ¿Cómo se puede inducir que "el área de la primera vuelta de la espiral es un tercio del primer círculo"?
- ¿Cómo se puede augurar que "el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito de la misma base y altura sobre el eje"?
- ¿Cómo se puede vaticinar que "el volumen del segmento de paraboloide de revolución es tres medios el del cono de igual base y altura"?

Ante estos sorprendentes descubrimientos, no es extraño que muchos matemáticos creyeran, a lo largo de los siglos, que Arquímedes disponía de un método milagroso, la piedra filosofal del descubrimiento matemático. Cuando en el Renacimiento y siglos posteriores tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego y en particular se difunde un entusiasta interés por las obras de Arquímedes, todos los estudiosos, impresionados por estos trabajos, se plantean las anteriores preguntas, sintetizadas en la formulación de la siguiente:

- ¿Cómo había alcanzado Arquímedes sus impresionantes resultados sobre cuadraturas y cubaturas, que luego demostraba rigurosamente mediante el método de exhaución?

Como bien señaló Galileo, en la práctica de la investigación científica, y en particular en la investigación matemática, siempre existe un dualismo metódico, dos momentos distintos y consecutivos en el proceder, la fase de la invención, intuitiva, no rigurosa y cargada de hipótesis, sugerencias, analogías, argumentos plausibles y razonamientos informales, es el *"ars inveniendi"* o vía del descubrimiento; y la fase apodíctica, donde se impone el rigor, el *"ars disserendi"* o vía de la demostración. De ambas vías que son complementarias en la investigación científica, *¿dónde está en Arquímedes el primer camino?*

Ignorada por todos la forma en que Arquímedes había alcanzado sus descubrimientos, muchos matemáticos albergaron la sospecha de que el genio de Siracusa disponía de un método especial que aplicaba en sus investigaciones, una vía de descubrimiento que no surge ante el lector de sus obras y que parece haber ocultado premeditadamente para la posteridad, *"por audacia perniciosa"*, como diría Descartes en la *Regla IV* de sus *Reglas para la dirección del Espíritu*. Así, por ejemplo, Torricelli manifiesta:

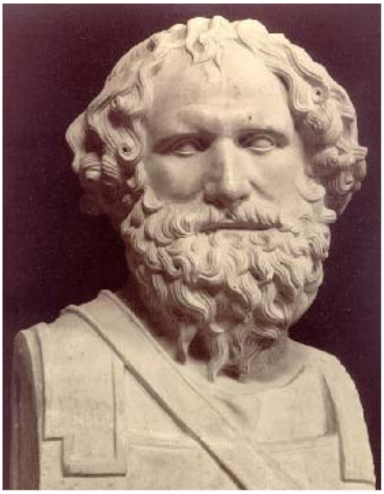
> *"Los geómetras antiguos empleaban en sus demostraciones un método diferente al seguido en la fase inventiva y procedían así, entre otras razones, para ocultar el secreto del arte".*

También Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las *Obras* de Arquímedes, publicada en Oxford en 1676, escribía:

> *"Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación".*

Asimismo Barrow, que se encargó también de una edición en latín de las *Obras* de Arquímedes, que se publicó en Londres en 1675, se manifestaba en estos términos:

> *"Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba estudiadamente".*



Izquierda: Busto de Arquímedes. Museo Nacional de Nápoles. Es uno de los iconos más conocidos de Arquímedes.
Derecha: Sello de correo italiano de 2/5/1983 que reproduce el mismo busto junto a un tornillo hidráulico ideado por Arquímedes.

Efectivamente Arquímedes poseía un método de investigación, que plasmó en su obra *EL MÉTODO*, en la que mediante procedimientos reconocidos por él mismo como no rigurosos, descubría sus famosos teoremas matemáticos. Pero fueron los avatares históricos y no su voluntad, quien lo dejó oculto para la posteridad.

Las vicisitudes históricas de EL MÉTODO y la reconstrucción de Heiberg

Antes de su recuperación en 1906, no se tenían más que informaciones bastante vagas sobre *EL MÉTODO* de Arquímedes. Suidas, un escritor del siglo X, alude a la obra, y sostiene que Teodosio de Trípoli, autor de *Las Esféricas*, había escrito un comentario al respecto. También Herón, en el siglo I a.C., había hablado de ella –haciendo alusión a tres proposiciones– en su *Métrica*, pero también este escrito se perdió, y no fue redescubierto, según Heath, hasta 1896 por H. Schöne de Constantinopla (aunque un fragmento de la *Métrica* había sido anteriormente recuperado en 1894 por P. Tannery). Por todo ello sobre el real contenido de la obra de Arquímedes circularon las más variadas hipótesis, hasta que, como vamos a ver, la perspicacia del historiador de la ciencia danés J.L. Heiberg, Profesor de la Universidad de Copenhague, editor de las obras de Arquímedes y Apolonio y uno de los helenistas más competentes de Europa, cerró con éxito el asunto.

Schöne había visto atraída su atención por una cita efectuada en 1899 por el paleógrafo griego P. Kerameus –autor de un voluminoso catálogo de los manuscritos del Patriarcado griego de Jerusalén–, de un palimpsesto conservado en la colección de manuscritos de la Biblioteca del Monasterio de Saint-Savas en Palestina, donde se aludían a la presencia de algunas conocidas obras de Arquímedes. Estas citas llegaron a los oídos de Heiberg, quien, confirmando que se trataba de pasajes conocidos de Arquímedes, sospechó que podría contener otros trabajos del científico. El intento de obtener el palimpsesto por vía diplomática no dio resultado, lo que incitó a Heiberg, en el verano de 1906, a trasladarse a Constantinopla, adonde, mientras tanto, había sido trasladado el manuscrito. Heiberg relataría poco más tarde que N. Tsoukaladakis, el bibliotecario del priorato del Phanar (el metochion del claustro del Santo Sepulcro de Jerusalén), tuvo la amabilidad de facilitarle el acceso al manuscrito para estudiar el preciado documento e intentar transcribirlo. En el examen Heiberg advirtió que el palimpsesto, aunque muy mutilado, era el más completo de todos los manuscritos existentes sobre obras de Arquímedes, y además, aparecían en él textos nuevos que exigían para su estudio mucho más tiempo del disponible, por lo que sin hacer más estudios de momento, fotografió el manuscrito para estudiarlo con tranquilidad.

El excepcional documento contenía:

A. Partes considerables de algunos tratados de Arquímedes ya conocidos en su totalidad (*Sobre la Esfera y el Cilindro*, *Sobre la Medida del Círculo*, *Sobre las Espirales* y *Sobre el Equilibrio de los Planos*).

B. La mayor parte del texto griego del tratado *Sobre los Cuerpos Flotantes* del que no se disponía más que de una traducción latina medieval realizada a través del árabe.

C. El prefacio y dos proposiciones de un tratado completamente inédito, el *Stomachion*, una especie de puzzle geométrico recreativo.

D. El texto igualmente inédito del tratado *El método sobre los teoremas mecánicos*.

No aparece en cambio ninguna huella de los tratados *Sobre Conoides y Esferoides* y *Sobre la Cuadratura de la Parábola*.

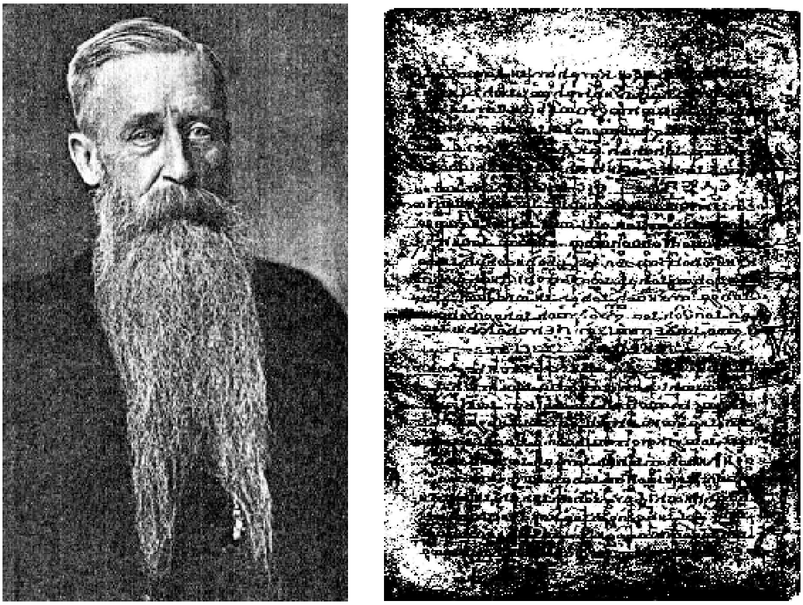
Heiberg se propuso utilizar todos estos materiales para la nueva edición de sus *Archimedis Opera Omnia*, que tenía en preparación, pero en atención a la impaciencia de los estudiosos publicó en la revista *Hermes* (vol. XLII, Berlín, 1907) –utilizando las notas y las fotografías que había tomado– el texto griego de *EL MÉTODO*, junto con una reproducción en facsímil de uno de los folios del palimpsesto; acompañando, además, notas y comentarios acerca de las vicisitudes en torno a la obtención del palimpsesto, así como sobre las características y el estado en que se encontraba el documento, con el título: *Eine neue Archimedeshandschrift –Un nuevo manuscrito de Arquímedes–*.

Portada de edición de Heiberg de las Obras de Arquímedes, *Archimedes Opera Omnia* (Leipzig, 1910-1913), que incluye *El Método sobre los teoremas mecánicos.*

De acuerdo con la descripción de Heiberg, el palimpsesto constaba de 185 hojas, de las cuales 177 eran de pergamino y las últimas de la 178 a la 185 eran de papel del siglo XVI. A primera vista sobresalía una escritura superior, que debía ser de los siglos XII-XIII (XIII-XIV según Kerameus). Se trataba de un devocionario con oficios litúrgicos o eucologio, escrito sobre textos que reproducen algunos fragmentos de obras de Arquímedes, en una tinta marrón claro. Es decir, el amanuense que escribió el eucologio aprovechó un material anterior, pero por fortuna no raspó la escritura original, sino que antes de escribir encima se limitó a lavarla. Heiberg, proveyéndose de una potente lupa, consiguió leer las 177 hojas de pergamino, de las que 29 (los folios 7-13, 23-26, 51-54, 73-80, 83-86, 151-152) habían sido completamente lavadas, no conservandose huella alguna de la escritura original, 14 tenían otro tipo de letra y en algunas había palabras ilegibles. Continúa Heiberg diciendo que los escritos tienen letra bonita y minúscula del siglo X, a dos columnas de 24,4 cms. de altura por 6,8 cms. de anchura y alrededor de 35 líneas por columna; las letras iniciales de cada fragmento son grandes y retiradas saliendo del borde; los titulares son mayúsculas; la escritura no es regular en general y contiene muchas abreviaturas y expresiones taquigráficas, de modo que el amanuense domina un sistema de abreviaturas y otro taquigráfico, utilizando ambos de forma caprichosa. Falta con frecuencia la iota suscrita, aunque los acentos y espíritus constan en general; no así los signos de puntuación que suelen faltar. En el documento aparecen figuras geométricas con letras, pero son dibujadas a la ligera, nunca completadas y sólo esbozadas. El folio 41^{r} es el más claro, por ello es el único que reproduce Heiberg en facsímil. El amanuense del escrito superior había cambiado el orden de los folios y los había puesto en una sucesión arbitraria; había separado las hojas de folio pequeño del manuscrito originario y las había plegado en dos para pasar de folio a cuartilla, perdiendo líneas y cambiando la dirección de las mismas.

A partir de estos detalles justo es ponderar el mérito poco común de la publicación de Heiberg. El sabio danés tuvo que descifrar con lupa, letra por letra, un texto muy poco legible, reconstruir figuras semiborradas y restablecer el orden profundamente variado de las hojas.

Además, Heiberg tuvo que rectificar, en concisas notas, un gran número de errores manifiestos, introducidos por el copista, así como indicar sumaria-



Izquierda: Imagen venerable de Johan Ludving Heiberg (1854-1928).
Derecha: Página 41^{r} del palimpsesto encontrado por Heiberg con la obra *El Método sobre los teoremas mecánicos* (*Eine neue Archimedeshandschrift*) en la revista *Hermes*, vol. XLII, Berlín, 1907.

mente en qué orden de ideas se pueden colmar las pequeñas y grandes lagunas que aparecen en el texto. A este respecto comenta J.L. Heiberg que el modo de pensar de Arquímedes está tan claro que es posible rellenar las lagunas con seguridad casi absoluta, y además, uno puede, a través de presunciones, completar demostraciones matemáticas que se habían perdido.

La publicación de Heiberg comienza con una introducción erudita y acaba con un comentario, donde resalta el elevado interés científico, heurístico e histórico del nuevo tratado, *El método sobre los teoremas mecánicos*, pondera su importancia como obra metodológica, la sitúa cronológicamente en la obra y en el pensamiento de Arquímedes y aporta conclusiones muy interesantes de carácter histórico y didáctico sobre la manera de trabajar de Arquímedes y sus predecesores.

La exhumación de la obra perdida de Arquímedes *El método sobre los teoremas mecánicos*, fruto de la labor investigadora de Heiberg y comentadora de otros historiadores de la ciencia (H.G. Zeuthen, T. Reinach, E. Rufini, P. Ver Eecke, F. Vera, J. Babini, ...,) es probablemente el descubrimiento más importante de los últimos tiempos para el conocimiento de la Historia de la Geometría griega en general y del genio de Arquímedes en particular.

Resultados de *EL MÉTODO* de Arquímedes obtenidos por el método mecánico

I. Determinación de la cuadratura del segmento parabólico, obteniendo que el área del mismo es cuatro tercios del triángulo de igual base y altura.

II. Determinación de la equivalencia de la esfera con el cuádruplo del cono (resp. con los dos tercios del cilindro) de base el círculo máximo de la esfera y de altura el radio (resp. el diámetro), de donde se intuye que la superficie de la esfera equivale a cuatro de sus círculos máximos, ya que, como todo círculo equivale al triángulo cuya base es igual a la circunferencia y la altura es igual al radio (*Sobre la Medida del Círculo*, Prop.1) se debe suponer que toda esfera equivale a un cono cuya base es equivalente a la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio.

III. Determinación de análogas equivalencias que en la Proposición II, entre un elipsoide de revolución, un cono y un cilindro.

IV. Determinación de la equivalencia entre un segmento de paraboloide de revolución, de base perpendicular al eje, y los tres medios del cono de igual base y eje que el segmento.

V. Determinación del centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución.

VI. Determinación del centro de gravedad de un hemisferio.

VII. Determinación de la razón entre un segmento esférico y el cono de igual base y altura.

VIII. Determinación de la razón entre un segmento de elipsoide de revolución y el cono de igual base y altura.

IX. Determinación del centro de gravedad de un segmento esférico.

X. Determinación del centro de gravedad de un segmento de elipsoide de revolución.

XI. Determinación del volumen y centro de gravedad de un segmento de hiperboloide de revolución.

XII-XIII. Determinación de la equivalencia de la uña cilíndrica y la sexta parte de todo el prisma circunscrito al cilindro.

XIV. Determinación mecánico-geométrica del volumen de la uña cilíndrica.

XV. Determinación geométrica (por el método de exhaución) del volumen de la uña cilíndrica.

XVI. Determinación mecánica de la equivalencia de la bóveda cilíndrica y los dos tercios del cubo correspondiente.

Las vicisitudes del palimpsesto de Arquímedes no acabaron con el trabajo de Heiberg, ya que entre 1907 y 1930 se desconoce su ubicación, y se cree que pudo haber sido robado. Durante este periodo, quizá después de 1929, un falsificador de cuadros copia en pan de oro, en cuatro páginas del libro que contiene los manuscritos, retratos medievales de ángeles, seguramente con la intención de que al embellecer el documento se incrementaría su precio, ignorante –es de suponer–, de su contenido en obras de Arquímedes. Hacia 1930 un coleccionista de antigüedades francés viaja a Estambul y compra el manuscrito a un negociante local. Se especula que el nuevo propietario intentó sin éxito venderlo a la Biblioteca Nacional de París y a la Biblioteca Británica de Londres, de modo que, a partir de entonces y durante varias décadas se desconoce su paradero.

En 1971 el profesor de Clásicas de Oxford, Nigel G. Wilson, examina una hoja de un viejo manuscrito de la Biblioteca de la Universidad de Cambridge y la identifica como una página del desaparecido manuscrito de Arquímedes, que Heiberg había fotografiado y trascrito hacía 65 años. Wilson incluso conjetura que cuando el erudito alemán Constantine Tischendorf describe en un libro de viajes de 1846 el *"haber visto un palimpsesto que trata de Matemáticas"*, en la Biblioteca del Patriarcado griego en Constantinopla, se trataba del palimpsesto de Arquímedes; y es más, además de verlo, lo mutiló, *"como un vándalo"* –dice Wilson–, arrancando una página para examinarla, ya que su albacea vendió la citada hoja, en 1876, a la Biblioteca de la Universidad de Cambridge, donde se conserva y está catalogada como *Cambridge University library. Ms. Add. 1879.23.* La hoja en cuestión, a la que le falta la mitad, conserva, con algunas lagunas, parte de las Proposiciones 35 a 37 del Libro I de *Sobre la Esfera y el Cilindro.*

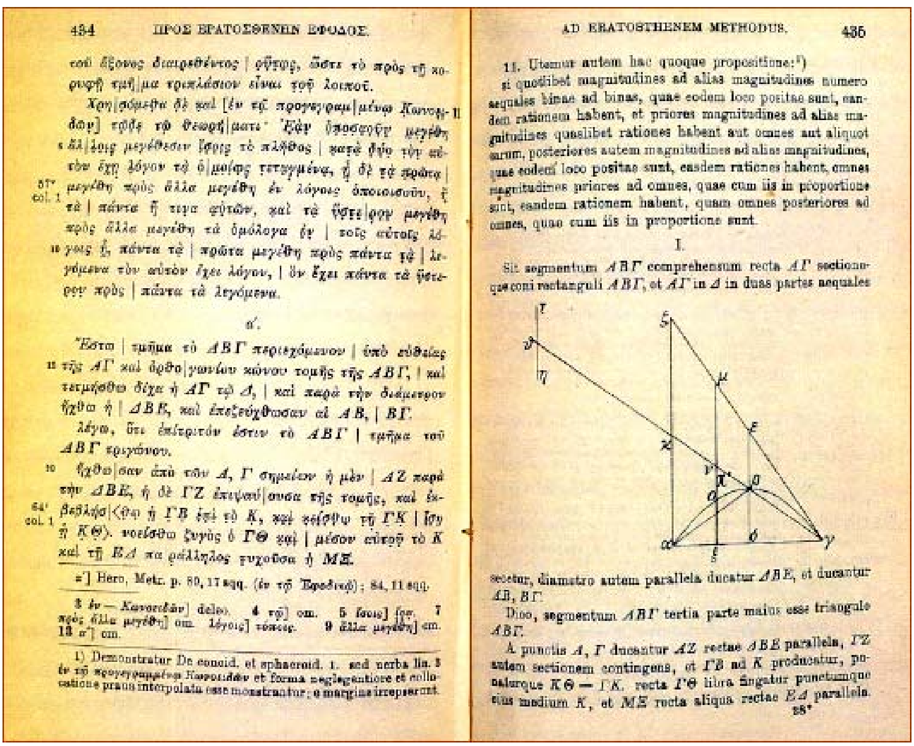
Después de varios estudios y averiguaciones, realizados a partir de 1991, los dueños franceses del manuscrito consiguen sacarlo a subasta, el 28 de octubre de 1998, en la casa Christie de Nueva York, al precio de dos millones de dólares. El día anterior de la venta, tanto el gobierno griego como el patriarcado griego emitieron un requerimiento en un desesperado intento de parar la subasta, argumentando que el documento había sido robado. La demanda fue desestimada y la venta se llevó a efecto. De la investigación realizada por los tribunales resultaba que el manuscrito estaba en poder de la colección privada francesa al menos desde 1960, aunque los propietarios aducían que pertenecía a su familia desde 1920. El documento es adquirido por un comprador desconocido.

A partir de las informaciones, la descripción y las fotografías que hizo Heiberg, comparando con su estado presente, se sabe que el manuscrito se ha deteriorado de forma considerable, a lo largo del siglo XX. Además de la interpolación de los ángeles, le faltan diversas hojas y otras están afectadas de forma severa por el moho, de modo que en bastantes áreas el texto ha desaparecido de forma irremediable.

Algunos de estos datos son suministrados por el propio Wilson en el artículo: “Archimedes: The Palimpsest and Tradition”, *Byzantinische Zeitschrift*, **92** (1999) 89–101.

En la actualidad, el manuscrito pertenece a los fondos del Walters Art Museum de Baltimore, donde un equipo de expertos y eruditos lo limpian, restauran y digitalizan con la última y más refinada tecnología, en un magnífico proyecto de paleografía matemática que se piensa concluir en el próximo año 2007, y que se coronará con una nueva y grandiosa edición completa de las Obras de Arquímedes, que se cree, mejorará notablemente las ahora existentes.

Información sobre este proceso va apareciendo en la página web:
`http://www.archimedespalimpsest.org/scholarship_wilson1.html`
y siguientes, en un artículo titulado: *The Archimedes Palimpsest: A Progress Report, by Nigel Wilson of Lincoln College Oxford.*



434 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 435

11. Utemur autem hac quoque propositione:[1])
si quolibet magnitudines ad alias magnitudines numero aequales binae ad binas, quae eodem loco positae sunt, eandem rationem habent, et priores magnitudines ad alias magnitudines quaslibet rationes habent aut omnes aut aliquot earum, posteriores autem magnitudines ad alias magnitudines, quae eodem loco positae sunt, easdem rationes habent, omnes magnitudines priores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt, eandem rationem habent, quam omnes posteriores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt.

I.

Sit segmentum $AB\Gamma$ comprehensum recta $A\Gamma$ sectioneque coni rectanguli $AB\Gamma$, et $A\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, diametro autem parallela ducatur ΔBE, et ducantur AB, $B\Gamma$.

Dico, segmentum $AB\Gamma$ tertia parte maius esse triangulo $AB\Gamma$.

A punctis A, Γ ducantur AZ rectae ΔBE parallela, ΓZ autem sectionem contingens, et ΓB ad K producatur, ponaturque $K\Theta = \Gamma K$. recta $\Gamma\Theta$ libra fingatur punctumque eius medium K, et ME recta aliqua rectae $E\Delta$ parallela.

28*

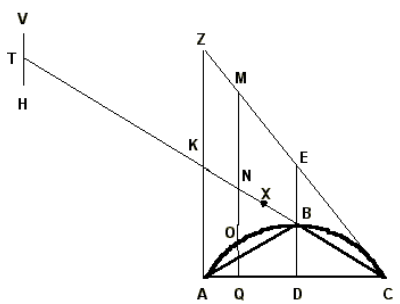
La Cuadratura de un segmento parabólico en *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg.

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES DIRIGIDO A ERATÓSTENES

Proposición i: **Cuadratura del segmento parabólico**

Sea ABC un segmento parabólico comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo (parábola); divídase AC por la mitad en D y trácese la recta DBE paralela al diámetro de la parábola, y uniendo B con A y B con C, trácense las rectas AB y BC.
El segmento parabólico ABC es cuatro tercios del triángulo ABC.

Trácense por los puntos A y C la recta AZ paralela a DBE y la CZ tangente al segmento parabólico en C; prolónguese CB hasta T y sea KT igual a CK. Considérese CT como una palanca, siendo K su punto medio, y sea MQ una recta paralela a ED.
Puesto que CBA es una parábola y que CZ es tangente a ella *"la subtangente relativa a un punto de la parábola es doble de la abcisa de este punto"*, es decir EB es igual a BD.
De la semejanza de los triángulos ZKC, MNC y EBC, así como KAC, NQC y BDC se deduce [*Euclides* VI.4] las igualdades de segmentos: $MN = NQ$ y $ZK = KA$ al ser $EB = BD$.



Aplicando una relación conocida que Arquímedes había demostrado en la Proposición V de *Sobre la Cuadratura de la Parábola* resulta que $CA/AQ = MQ/QO$, y siendo semejantes los triángulos ACK y QCN se tiene: $CA/AQ = CK/KN$, pero al ser iguales los segmentos CK y TK, resulta la igualdad de razones $TK/KN = MQ/QO$, relación geométrica básica para aplicar el método mecánico de la palanca.
En efecto, puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MQ, por ser MN igual que NQ, si tomamos la recta VH igual a QO de manera que su centro de gravedad sea el punto T, es decir, de modo que sea VT igual que TH, la recta VTH estará en equilibrio con la recta MQ *"que permanece en su lugar"*, por estar TN dividida por el punto K en partes que están en razón inversa a los pesos VH y MQ [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.6], y por lo tanto K es el centro de gravedad del conjunto de ambos pesos.
Análogamente si en el triángulo AZC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, éstas, *"permaneciendo en su lugar"*, estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por segmento parabólico y trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K.

Ahora bien, las rectas trazadas en el triángulo AZC *"componen"* el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en segmento parabólico del mismo modo que OQ *"componen"* el segmento parabólico ABC; por lo tanto el triángulo AZC, *"permaneciendo en su lugar"*, estará en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K.

Divídase ahora CK por el punto X de manera que sea CK sea el triple de KX, el punto X será entonces el centro de gravedad del triángulo AZC [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.14], y puesto que el triángulo AZC, *"permaneciendo en su lugar"* está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC, trasladado con centro de gravedad en T, y que X es el centro de gravedad del triángulo AZC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a KX. Ahora bien, siendo TK triple de KX, el triángulo AZC será triple del segmento parabólico ABC. Además, el triángulo AZC es cuádruple del triángulo ABC, ya que ZK es igual que KA y KA es doble de BD al ser AD igual que DC, luego el segmento parabólico ABC equivale a cuatro tercios del triángulo ABC.

Diversas versiones de EL MÉTODO de Arquímedes

A. Poco después de la primera publicación de Heiberg en la revista *Hermes* del texto griego de *EL MÉTODO*, en 1906, el mismo Heiberg y el historiador de la ciencia H.G. Zeuthen publicaron el 27 de junio de 1907 en el volumen VII de la *Bibliotheca Mathematica* de Teubner, págs. 321–363, en Leipzig, la primera traducción a lengua vernácula, al alemán, de la obra de Arquímedes, con el título *Eine neue Schrift des Archimedes* (*Un nuevo escrito de Arquímedes*), con una introducción erudita y un comentario de contenido histórico y matemático de Zeuthen. En esta traducción se conservan las figuras originales del primer texto de Heiberg y en particular la tipografía de las letras en griego.

B. Mientras tanto, T. Reinach tenía prácticamente ultimada una traducción al francés de la obra de Arquímedes, que creía que sería la primera traducción del texto griego. Aunque se le adelantó el propio Heiberg y Zeuthen, Reinach continuó la empresa porque según sus palabras *"todos los sabios franceses que se interesan en la historia de las Matemáticas no saben alemán y además porque el Señor Zeuthen se ha contentado con traducir literalmente lo que subsiste del texto original, mientras que yo me he esforzado en llenar, al menos por el sentido, todas las lagunas grandes o pequeñas"*. Reinach publica su traducción en París en los números de 30 de noviembre y 15 de diciembre del tomo XVIII de la *Revue général des Sciences pures et appliquées*, con el título

Un traité de Géométrie inédit d'Archimède (Restitution d'après un manuscrit récemment découvert). En la traducción de Reinach se conserva la tipografía griega en las letras de las figuras, pero las relaciones geométricas se expresan mediante los símbolos del Álgebra ordinaria actual. Las notas, sobre todo las de carácter matemático, son abundantes y facilitan la intelección del texto de Arquímedes. A esta traducción acompaña una breve introducción de carácter matemático, así como una sucinta nota preliminar de índole histórica en la que el autor sitúa a Arquímedes como verdadero precursor de Newton y Leibniz en la gestación del Cálculo Infinitesimal. Un resumen de la traducción de Reinach publicó poco después en ruso la *Sociedad Mathesis* de Odessa y en inglés *The Monist* de Chicago.

C. Heiberg termina de publicar en 1913 la segunda edición de su *Archimedis Opera Omnia*, donde en el volumen II aparecerá una nueva versión bilingüe en griego y en latín de la obra de Arquímedes. Por la autoridad conferida por Heiberg, esta publicación se debe considerar como la *Editio Princeps* de la obra de Arquímedes (aunque sea posterior a la primera publicación de 1906 en la revista *Hermes*) y por ende es a partir de ella que se debe realizar cualquier nueva traducción.

D. El célebre historiador de la matemática griega T.L. Heath publica en 1912 en *Cambridge University Press* una versión en inglés de *EL MÉTODO* de Arquímedes con el título *The Method of Archimedes recently discovered by Heiberg (a supplement to the works of Archimedes, 1897).* La traducción de Heath tiene muy pocas notas, hace una trascripción latina de la tipografía de las letras de las figuras, sustituye el lenguaje retórico por los símbolos algebraicos y sólo reconstruye algunas lagunas del texto griego original. También está acompañada de una breve nota introductoria de carácter histórico y matemático. Esta traducción también se incorporó a *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes*, editado por Heath en Dover Publications (New York, 1953). Hay una edición más actual de Dover Publications (New York, 2002).

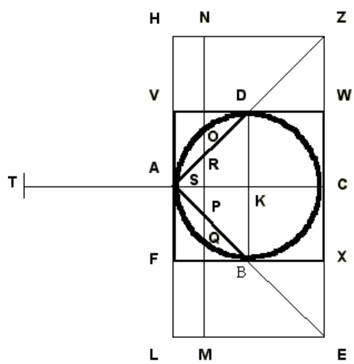
E. El ingeniero y matemático francés editor de las obras de la mayor parte de los más importantes matemáticos griegos Paul Ver Eecke, publica (Vaillant-Carmanne S.A, editeur, Lieja, 1921) una traducción al francés de *EL MÉTODO* de Arquímedes, que incorpora a sus *Oeuvres complètes d'Archimède.* El texto, que conserva el lenguaje retórico original de Arquímedes, tiene abundantes y generosas notas de carácter histórico y matemático.

F. El matemático italiano Enrico Rufini publica en 1926 en Casa Editrice Alberto Stock de Roma una obra muy completa sobre *EL MÉTODO* de Arquímedes prologada por F. Enriques y titulada *Il MÉTODO d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità.* Esta traducción al italiano lleva una interesante introducción histórica sobre el desarrollo del Análisis Infinitesimal hasta Arquímedes. E. Rufini utiliza un lenguaje totalmente algebraico y transcribe al latín la tipografía griega de las figuras. Hay una nueva edición de Feltrinelli, Milán, 1961.

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES DIRIGIDO A ERATÓSTENES

Proposición II: **Cubatura de la esfera**

Toda esfera es cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al radio de la esfera; a su vez el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, es igual a vez y media la esfera.



Sea una esfera cuyo círculo máximo sea $ABCD$, siendo AC y BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo $ABCD$; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A. Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo $ABCD$ en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera $ABCD$ según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR.

De la geometría de la figura Arquímedes va obteniendo:

$$AQ^2 = AC \cdot AS[\textit{Euclides}\ \text{III.31}], AQ^2 = QS^2 + SP^2[\textit{Euclides}\ \text{I.47}].$$

$$MS \cdot SP = AC \cdot AS = AQ^2 = QS^2 + SP^2.$$

$$AT/AS = MS/SP = MS^2/MS \cdot SP = MS^2/(QS^2 + SP^2).$$

Sean ahora $c(MN)$, $c(QO)$, $c(PR)$ los círculos de diámetro MN, QO, PR, respectivamente.

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} = \frac{MN^2}{QO^2 + PR^2} = \frac{c(MN)}{c(QO) + c(PR)}[\textit{Euclides}\ \text{XII.2}]$$

relación geométrica básica para emprender el método mecánico de la palanca:

el círculo $c(MN)$ del cilindro, *"permaneciendo en su lugar"* estará en equilibrio respecto del punto A (fulcro de la palanca) con los círculos $c(QO)$, $c(PR)$ trasladados y colocados sobre el punto T, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T.

Realizando el mismo proceso para todas las paralelas MN a EZ y los círculos que se obtienen sobre la esfera, el cilindro y el cono, resulta que *"llenados"* con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono, el cilindro, *"permaneciendo en su lugar"*, estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera y el cono juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto T, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T. De aquí aplicando la Ley de la Palanca [*Sobre el Equilibrio de los Planos* I.6 y I.7] resulta que: *"la razón del cilindro a la esfera y el cono juntos, será la misma que la razón de AT a AK"*.

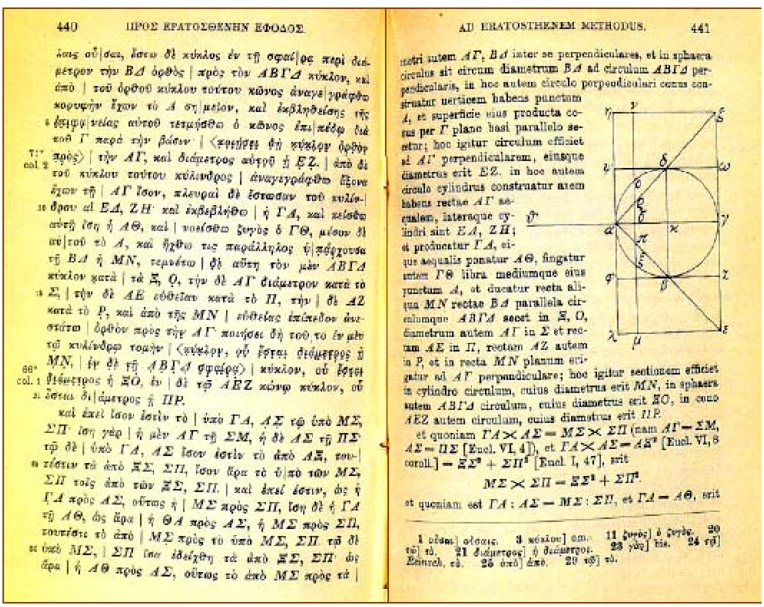
Desarrollando simbólicamente los cálculos que Arquímedes describe retóricamente, sean:

e = esfera $ABCD$. c = cilindro de diámetro EZ y generatrices EL, ZH.

d = cilindro de diámetro BD y generatrices XF, WV.

a = cono cuya sección es el triángulo AEZ; b = cono cuya sección es el triángulo ABD.

Aplicando el método mecánico Arquímedes muestra que $c = 2(e + a)$. Pero como según *Euclides* XII.10 se verifica que $d = 3b$ y $c = 3a$, se tiene: $a = 2e$. Ahora de *des* XII.12 resulta: $a = 8b$ y de *Euclides* XII.14 se obtiene: $c = 2d$. Combinando los resultados se obtiene finalmente: $e = 4b$, $d = (3/2)e$.


440 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 441

metri autem $A\Gamma$, $B\Delta$ inter se perpendiculares, et in sphaera circulus sit circum diametrum $B\Delta$ ad circulum $AB\Gamma\Delta$ perpendicularis, in hoc autem circulo perpendiculari conus construatur uerticem habens punctum A, et superficie eius producta conus per Γ plano basi parallelo secetur; hoc igitur circulum efficiet ad $A\Gamma$ perpendicularem, eiusque diametrus erit EZ. in hoc autem circulo cylindrus construatur axem habens rectae $A\Gamma$ aequalem, latera que cylindri sint $E\Lambda$, ZH; et producatur ΓA, eique aequalis ponatur $A\Theta$, fingatur autem $\Gamma\Theta$ libra mediumque eius punctum A, et ducatur recta aliqua MN rectae $B\Delta$ parallela circulumque $AB\Gamma\Delta$ secet in Ξ, O, diametrum autem $A\Gamma$ in Σ et rectam AE in Π, rectam AZ autem in P, et in recta MN planum erigatur ad $A\Gamma$ perpendiculare; hoc igitur sectionem efficiet in cylindro circulum, cuius diametrus erit MN, in sphaera autem $AB\Gamma\Delta$ circulum, cuius diametrus erit ΞO, in cono AEZ autem circulum, cuius diametrus erit ΠP.

et quoniam $\Gamma A \times A\Sigma = M\Sigma \times \Sigma\Pi$ (nam $A\Gamma = \Sigma M$, $A\Sigma = \Pi\Sigma$ [Eucl. VI, 4]), et $\Gamma A \times A\Sigma = A\Xi^2$ [Eucl. VI, 8 coroll.] $= \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$ [Eucl. I, 47], erit

$$M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2.$$

et quoniam est $\Gamma A : A\Sigma = M\Sigma : \Sigma\Pi$, et $\Gamma A = A\Theta$, erit

La Cubatura de la esfera en *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg.

En idioma castellano se dispone de las siguientes ediciones:
H. *El Método de Arquímedes* de J. Babini. EUDEBA 1966. Esta obra, que es la primera versión castellana de *EL MÉTODO*, tiene una interesante introducción sobre el valor metodológico que tiene la obra dentro de toda la creación científica arquimediana, así como la importancia capital que ocupa en la génesis y desarrollo del Cálculo Integral. El hecho de que traducción no sea directa desde el original griego sino a través de la versión inglesa de Heath, la francesa de Ver Eecke y la italiana de Rufini, le resta fidelidad, lo que se potencia aún más por la utilización excesiva del Álgebra en sustitución del lenguaje retórico original. Las letras de las figuras son caracteres latinos.
I. *El Método de Arquímedes* incorporado a las otras obras de Arquímedes en la recopilación de F. Vera en la obra Científicos griegos, Aguilar, Madrid, 1970. Esta versión es una traducción muy libre de la obra de Arquímedes, pero tiene como compensación un elenco de notas históricas y matemáticas de gran interés. La tipografía de las letras de las figuras es latina.
J. *El Método de Arquímedes*, con introducción y notas de L. Vega. Alianza Editorial, Madrid, 1986. Esta obra es una traducción bastante fiel al texto griego original, pero adolece de excesiva parquedad en las notas textuales, históricas o matemáticas. Conserva la tipografía griega en las figuras y tiene una breve introducción sobre la figura de Arquímedes en la matemática griega, así como sobre los métodos y la idea de demostración en Arquímedes.
K. El autor de este artículo, junto con el Catedrático de Griego Joan Vaqué Jordi, publicaron en 1992, como número cuatro de la Colección *Clásicos de las Ciencias*, que co-editan la Universitat Autònoma de Barcelona y la Universitat Politècnica de Catalunya, una edición crítica de *EL MÉTODO* de Arquímedes, con el título *El Método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes.*

La traducción ha sido realizada sobre el texto establecido por Heiberg en su *Archimedis Opera Omnia*, asumiendo, por supuesto sus autorizadas conjeturas. Nos hemos esforzado en conseguir una versión literal, fiel al estilo de Arquímedes, sin más límite que el inexcusable respeto a la estructura y genio de la lengua castellana.

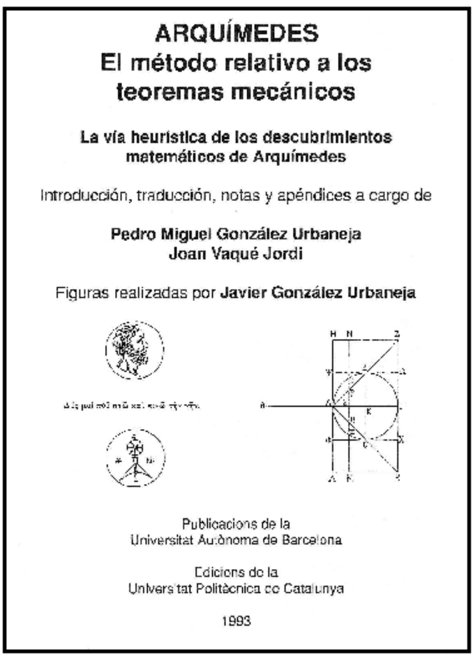
Las notas de la traducción se han clasificado en tres tipos, según su carácter y finalidad:

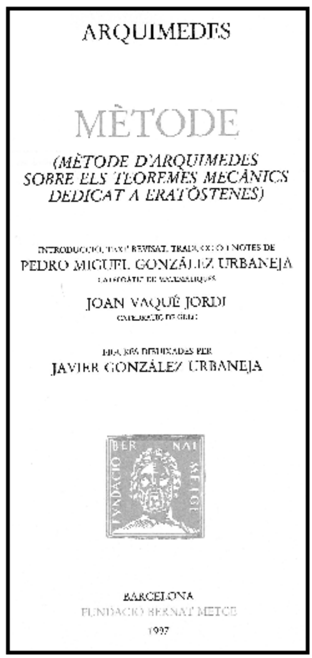
- Didácticas: explican razonamientos con expresiones matemáticas en terminología moderna
- Históricas: intentan enriquecer la traducción del texto con breves indicaciones de erudición histórica relacionadas con el pasaje en cuestión –génesis de sus ideas, contraste con otras coetáneas, influjo ulterior, etc.– Son necesariamente breves, remitiendo, para mayor ampliación, a algún apéndice o a alguno de los textos de la bibliografía.
- Crítico-textuales: puntualizan el texto original, justificando la sustitución de alguna expresión (cuya traducción literal resultaría ininteligible) por otra equivalente

Esta edición consta, además de un facsímil de la obra completa y la traducción anotada aludida, una introducción donde se describen las vicisitudes históricas de su soporte físico y la reconstrucción por Heiberg; se subraya su importancia histórica y su aporte al patrimonio matemático griego, y en particular, su encuadre en el contexto de la magna obra de Arquímedes, sobre todo en relación con cuestiones epistemológicas en torno a la dualidad Descubrimiento-Demostración. También se compone esta edición de una serie de apéndices que tienen la finalidad de acortar las notas y concentrar material de frecuente consulta. En ellos se sitúan los antecedentes históricos; se hace un análisis crítico del *método mecánico* de Arquímedes; se ilustra el *método de exhaución* con su aplicación a dos ejemplos significativos: la Cuadratura de la Espiral y la Cuadratura de la Parábola; y se estudia la influencia de Arquímedes en la génesis del Calculo Integral –el *método mecánico* sobre los *Indivisibles e Infinitesimales* de la etapa empírica del Cálculo del siglo XVII y del *método de exhaución* sobre los límites y la aritmetización del Análisis del siglo XIX–.

Finalmente, hay un glosario que cataloga los términos griegos específicamente matemáticos, con su traducción y notas que profundizan en su aspecto semántico.

Termina esta edición con una extensa Bibliografía, cuidadosamente seleccionada, sobre el autor, la obra, las diversas ediciones, su génesis y su repercusión ulterior.





En idioma catalán se dispone de la siguiente edición:
K. Los mismos autores de la última edición castellana publicaron en la *Col·lecció dels Clàssics Grecs i Llatins instituïda per Francesc Cambó* (*Fundació Bernat Metge*, Barcelona, 1997) una edición crítica en catalán de *EL MÉTODO* de Arquímedes, con el título *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremas mecànics dedicat a Eratóstenes.*

La traducción ha sido realizada, directamente al catalán desde el griego –el texto establecido por Heiberg–. Para la introducción y los apéndices se ha utilizado la versión castellana, también para las notas, aunque, por la naturaleza de la *Colección Bernat Metge*, en éstas se ha abundado más en cuestiones semánticas y filológicas. Además, se ha añadido una extensa biografía de Arquímedes, entre la historia verídica y las leyendas románticas, con numerosos datos de erudición, extraídos de eximios historiadores y escritores de la antigüedad –Tito Livio, Plutarco, Polibio, Cicerón, Valerio Máximo, Silio Itálico, Giorgio Valla, Eutocio, Zonaras, Tzetzes, entre otros–. Finalmente, se han agregado cuatro apéndices con la reconstrucción de las lagunas de las proposiciones VI, VII, XIII y XV.

Análisis crítico del Método Mecánico de Arquímedes

Es interesante hacer un análisis de la estructura interna del proceso discursivo de Arquímedes en *EL MÉTODO*, a través de un planteamiento abstracto de las diversas fases del método mecánico, a fin de que, aunque Arquímedes reconozca que:

> *"...la investigación hecha por este método no comporta demostración...."*,

intentar dilucidar la cota de rigor que subyace en cada una de esas fases. La esencia del método mecánico se deduce de cualquiera de los problemas que Arquímedes trata en *EL MÉTODO*. Se pueden considerar tres fases. En una primera fase, puramente geométrica, seleccionados los objetos geométricos pertinentes, se procede a la comparación de secciones del cuerpo –llamados *Indivisibles*– cuyo volumen es objeto de investigación, con otras secciones de cuerpos ya conocidos. Sea determinar el volumen de un sólido S, cuyas secciones s, determinadas por un sistema de planos paralelos, son comparadas con las secciones t, de un sólido conocido T. Arquímedes fija la posición de los extremos y punto de apoyo de una palanca y obtiene, en virtud de las propiedades geométricas conocidas de S y T, una relación geométrica:

$$s/t = k/h,$$

donde h es la distancia fija del extremo de la palanca al punto de apoyo y k la distancia de la sección t –de su centro de gravedad– al punto de apoyo.

A continuación se entra en la segunda fase del método, la fase mecánica, en la que aplicando consideraciones estáticas que Arquímedes había desarrollado en su tratado *Sobre el Equilibrio de los Planos*, establece que la sección t del sólido T, *"permaneciendo en su lugar"*, equilibra, respecto del fulcro de la palanca, a la sección s del sólido S, trasladada a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca.

Hasta aquí el desarrollo lógico e intuitivo seguido por Arquímedes es totalmente riguroso, ya que es consecuencia lógica de los postulados admitidos y de los teoremas demostrados en otros tratados. Pero Arquímedes entra ahora en una tercera fase en la que dice que las secciones s y t *"llenan o componen"*, respectivamente, los sólidos S y T, de manera que repitiendo la operación anterior para todas las secciones paralelas, el sólido T *"permaneciendo en su lugar"*, equilibrará, respecto del fulcro de la palanca, al sólido S trasladado a una posición de forma que su centro de gravedad sea un extremo de la palanca. Por tanto, conociendo el centro de gravedad de las figuras y el volumen de una de ellas, su posición de equilibrio permitirá encontrar el volumen de la otra.

Si en lugar de sólidos se consideran figuras planas, el proceso es similar considerando un sistema de rectas paralelas –*Indivisibles* planos–, que determinan sobre las figuras unas cuerdas que llenan o componen las figuras.

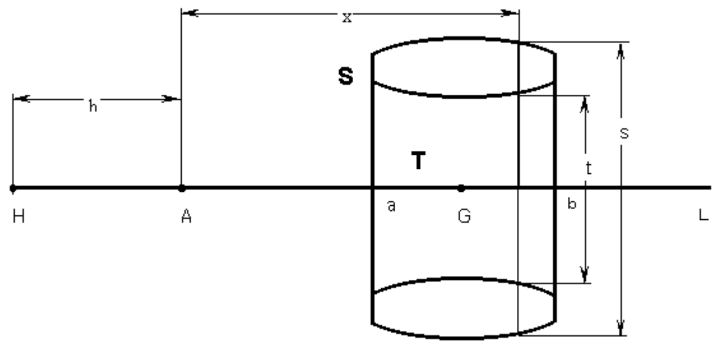
Está claro que la clave del método mecánico de Arquímedes estriba en el proceso que tiene lugar en la tercera fase y que él mismo llama con gran acierto *"composición"*, mediante el cual como geómetra griego soslaya y camufla la presencia del infinito.

Para el caso de la cubatura de sólidos consideremos nuevamente los sólidos anteriores S y T. Consideremos el lado de la palanca en el que el sólido T *"ha permanecido en su lugar"*, Arquímedes dice que las secciones t de T *"llenan o componen"* T, pero esto, además de no tener ninguna base matemática, ya que no se deduce de ningún postulado ni teorema, no tiene base material alguna, pues las secciones t que son superficies no pueden componer ni llenar de manera alguna ningún sólido (por ejemplo los círculos no pueden llenar un cilindro), pues ello violaría la *"ley de la homogeneidad"*. No obstante, el error lógico de la consideración de Arquímedes se ve atemperado intuitivamente por el hecho de que el sólido T no se ha desplazado, está *"en su lugar"*. Sin embargo las secciones s que componen el sólido S, se han movido paralelamente a su posición inicial hasta coincidir sus centros en el otro extremo de la palanca, de manera que todas quedan colocadas en un mismo plano que debería equilibrar a un sólido, lo cual lógica e intuitivamente es absurdo.

Sin embargo Arquímedes, con un esfuerzo de intuición ideal, imagina que las secciones s del sólido S, trasladadas, recomponen y reconstruyen el sólido del cual eran sus componentes, como si los elementos geométricos que se desplazan no fueran en realidad elementos planos, sino elementos sólidos de cierto espesor –*Infinitesimales* se llamarán después– capaces de recomponer el sólido del que proceden. Tratándose de una intuición ideal que no casa con la intuición sensible de la experiencia y con el sentido común, Arquímedes tiene muy en cuenta que estos resultados sólo tienen *"cierta apariencia de verdad"* y el método *"no comporta demostración"*.

Hagamos una interpretación deliberadamente anacrónica mediante un análisis del método mecánico de Arquímedes a la luz de nuestro Cálculo Integral, para comprender cómo con métodos tan poco ortodoxos pudo Arquímedes obtener resultados absolutamente correctos.

Considerando el caso plano, sean S y T dos figuras planas situadas a lo largo del mismo intervalo de un eje horizontal L. Dada el área $a(T)$ y el centro de gravedad G de T, se quiere hallar el área $a(S)$ de S.



Podemos interpretar las dos figuras planas como láminas de densidad unidad, compuestas de un número infinitamente grande de elementos geométricos elementales –segmentos de línea o rectángulos de anchura infinitesimal, es decir indivisibles o infinitesimales, respectivamente, que dirían los matemáticos del siglo XVII–, perpendiculares al eje L.

Tomemos el eje L como una palanca con el punto de apoyo en A y supongamos que podemos encontrar una constante h tal que cada línea vertical, a una distancia x de A, determina en las figuras S y T segmentos de línea de longitudes s y t, respectivamente, tales que se verifica:

$$s/t = x/h. \tag{1}$$

La ley de la palanca implica entonces que el segmento desplazado al punto H, que está a una distancia h de A, equilibra al segmento t, mantenido *"en su lugar"*. De ello deduce Arquímedes que si la figura S se desplaza de forma que llegue a tener su centro de gravedad en H, equilibrará a la figura T mantenida *"en su lugar"*, es decir que se tiene:

$$a(S)/g(T) = a(T)/h, \tag{2}$$

siendo $g(T)$ la distancia del punto A al centro de gravedad G de T y asumiendo que cada figura actúa como una masa puntual situada en su centro de gravedad. Conocidos entonces el área $a(T)$ y las distancias h y $g(T)$, aplicando (2) se obtendrá el área $a(S)$.

El punto crucial del desarrollo anterior estriba en el tránsito lógico de (1) a (2), es decir en la forma de demostrar que (1) implica (2), deducción que Arquímedes no realiza sino que lo asume. El paso de (1) a (2) es resuelto fácilmente mediante Cálculo Integral. En efecto, sean $s(x)$ y $t(x)$ las secciones de las figuras S y T a la distancia x del fulcro de la palanca A; tenemos para las áreas S y T, y para el centro de gravedad de T, las siguientes expresiones:

$$a(S) = \int_a^b s(x)dx \qquad a(T) = \int_a^b t(x)dx \qquad g(T) = \frac{1}{a(T)} \int_a^b xt(x)dx.$$

Ahora bien, de la igualdad (1) se deduce: $s(x) = x \cdot t(x)/h$, de donde se obtiene:

$$a(S) = \int_a^b s(x)dx = \frac{1}{h} \int_a^b xt(x)dx,$$

es decir: $a(S) = g(T) \cdot a(T) \cdot (1/h)$, expresión equivalente a (2).

Así pues, en términos de integrales, el efecto del método mecánico de *EL MÉTODO* es expresar una integral que hay que calcular para hallar el área de una figura S, en términos de otras integrales, el área y el centro de gravedad de otra figura conocida T.

J. Babini en su introducción a su versión de *EL MÉTODO*, describe muy significativamente que al pensar en el proceso discursivo que tiene lugar al realizar una integral definida, se puede explicar la aparente paradoja de cómo Arquímedes pudo lograr con método tan poco riguroso un resultado correcto. Escribe J. Babini (Eudeba, 1996, p.24):

> "[...] *El cálculo actual de cuadraturas y cubaturas, así como la determinación de centros de gravedad, se realiza mediante el cálculo de integrales definidas, que pueden considerarse como límites de sumas, cuyos sumandos son productos de dos factores: la función integrando que en nuestro ejemplo está dada por la sección, y un incremento o diferencial que corresponderá a la distancia entre dos secciones consecutivas. Ahora bien, el resultado de la integral depende exclusivamente de la forma y propiedades de la función integrando, no desempeñando el otro factor sino el papel pasivo destinado a mantener la homogeneidad; es pues, explicable que Arquímedes, al despreciar en absoluto la homogeneidad y atender únicamente a las propiedades de la sección, expresada en su proporción de equilibrio, logre resultados correctos".*

Parece pues que el método mecánico de *EL MÉTODO* es una etapa intermedia entre el momento realmente creador –que Arquímedes oculta– y la etapa final, rigurosamente deductiva, en la que mediante el *Método de Exhaución* Arquímedes demuestra sus magníficos resultados geométricos. Pero estas etapas están íntimamente vinculadas, porque, como bien señala Arquímedes en el Preámbulo:

> "[...] *Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes mecánicamente, recibieron luego demostración geométricamente* [...] *pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo* [...]".

En definitiva el método mecánico de Arquímedes es una genial combinación de consideraciones geométricas y mecánicas, en las que en esencia subyacen ciertos procedimientos de nuestro Cálculo Integral.

Conclusiones:

los métodos de Arquímedes y el Cálculo Integral

Tras la lectura de *EL MÉTODO*, podemos sintetizar el proceso creador de la actividad científica de Arquímedes en tres fases: una fase inicial, plena de capacidad inventiva, basada en la pura intuición de la simplicidad de las leyes geométricas, una fase intermedia de comprobación mediante el *método mecánico* de las hipótesis intuitivas y una fase final, en la que el *método de exhaución* confirmaba la validez rigurosa de lo augurado en la fase inventiva. Mediante su brillante *método mecánico*, Arquímedes realiza una investigación preliminar que ratifica con absoluto rigor mediante el *método de exhaución*. Con ello descubre gran número de resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que forman parte de nuestro Cálculo Integral, y que actualmente obtenemos mediante los recursos analíticos del cálculo algebraico y de la aplicación de los límites, que descubren y demuestran simultáneamente. Pero las rigurosas demostraciones de Arquímedes deben implicar, bajo una forma estrictamente geométrica, –la del *Algebra Geométrica* de los Libros II y VI de *Los Elementos de Euclides*– todos esos medios infinitesimales modernos. Todo ello ubica a Arquímedes en la antesala histórica del Cálculo Integral. Por eso, como afirma E. Rufini (*Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, p.187):

> *"Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII".*

A veces se dice de forma vehemente que Arquímedes es el artífice del Cálculo Integral, queriendo indicar que por primera vez en la historia, Arquímedes realiza una verdadera integración. La integral definida se concibe en el Análisis Infinitesimal como límite de una sucesión infinita y no como una suma infinita de puntos, líneas o superficies. En un sentido amplio, los procedimientos de Arquímedes son en la práctica integraciones, pero, en puridad, no podemos asegurar que Arquímedes realiza una auténtica integración

–en el sentido genuino de calcular el límite de una suma cuando el número de sumandos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños–, porque Arquímedes soslaya el paso al límite con la doble reducción al absurdo del *método de exhaución*. De ahí que las afirmaciones categóricas como la de J.L. Heiberg que manifestaba que *"el método de Arquímedes se identifica con el Calculo Integral"* deben ser ecuánimemente aquilatadas. Sería quizá más exacto y ajustado manifestar que *"el método de Arquímedes constituye un método de integración"*.

Como conclusión de este estudio histórico sobre una de las figuras más universales de la Ciencia y en particular sobre una de las obras más singulares de Arquímedes y de la Geometría griega en general, *EL MÉTODO*, podemos decir que Arquímedes comenzó los cimientos del sólido edificio que hoy constituye el Cálculo Integral. Y lo hizo con una sabia conjunción de la técnica del descubrimiento, aplicada con la más amplia libertad y sin prejuicios platónicos y el más absoluto rigor lógico, impecable e implacable, de la demostración.

Después del descubrimiento y divulgación de *EL MÉTODO*, sabemos que quienes en el siglo XVII buscaban con ansiedad nuevos métodos más heurísticos de rápido descubrimiento, nuevos caminos en la Matemática, se hallaban, muchos de ellos sin saberlo, más cerca de Arquímedes de lo que nunca hubieran imaginado. En efecto, en toda la parafernalia de técnicas y métodos infinitesimales, con indivisibles o infinitamente pequeños, se recorren nuevamente los caminos abiertos por Arquímedes y no sólo en cuanto a los elementos infinitesimales utilizados, sino que también se redescubre el procedimiento inventivo. La *"composición"* que Arquímedes aplica en el *método mecánico* apunta históricamente hacia los métodos heurísticos de los matemáticos del siglo XVII –Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Pascal, Barrow y Wallis– que, en la etapa empírica del Cálculo, desarrollaron las técnicas y métodos infinitesimales que desembocaron en el descubrimiento final del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz[1]. También, cuando tras el proceso de aritmetización del Análisis del siglo XIX se fundamenta el Cálculo Infinitesimal a través del concepto de límite, los matemáticos encuentran la traza histórica hacia esta noción en los modelos de rigor impecable de los procedimientos arquimedianos de los *métodos de exhaución*. He aquí, pues, una doble analogía histórica entre los desarrollos del *método mecánico* y los resultados

[1] Para un estudio exhaustivo de estas cuestiones se pueden consultar las siguientes obras del autor de este artículo:

- P.M. GONZÁLEZ URBANEJA y J. VAQUÉ, *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*, Pub. Univ. Autónoma de Barcelona, Ed. Univ. Politècnica de Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias*. Barcelona, 1993. Edición crítica en Español de esta obra de Arquímedes. Apéndice 5.
- P.M. GONZALEZ URBANEJA, *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, Madrid, 1992. Caps. 2, 8.

obtenidos mediante indivisibles, así como entre el riguroso *método de exhaución* y la fundamentación del Análisis mediante los límites, lo que nos da una idea de la trascendental ascendencia de Arquímedes en la génesis de las raíces del Calculo Integral.

Partiendo de bases euclídeas, teniendo en su haber todo el bagaje matemático clásico, con una inefable capacidad para conjugar consideraciones teóricas e invenciones prácticas Arquímedes trasciende la tradición geométrica griega y amplia considerablemente los horizontes metodológicos de la ciencia de su tiempo, de modo que más allá del férreo aspecto apodíctico de las densas memorias de Arquímedes, el ancestro de los grandes creadores del Cálculo Integral hay que buscarlo en la magnífica obra de Arquímedes *EL MÉTODO*, un documento histórico de un valor científico inconmensurable, cuyo descubrimiento y exhumación, en novelescas circunstancias, por el brillante helenista e historiador científico Heiberg, a comienzos del siglo XX, constituye uno de los acontecimientos más importantes que han tenido lugar para conocimiento de la Geometría griega. Tras su lectura, podemos explicar el profundo misterio que rodeaba la actividad investigadora de Arquímedes, plasmada en todos sus tratados científicos conocidos y desmentir a Descartes cuando manifiesta –en la Regla IV de *Las Reglas para la dirección del espíritu*– la insatisfacción de la curiosidad frustrada por la ocultación –*con audacia perniciosa*– de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

Aunque *EL MÉTODO* no fue conocido hasta 1906, ha estado presente, de forma subrepticia, en la Historia de la Matemática, como una *variable oculta* en la génesis del Calculo Integral. Una vez conocido *EL MÉTODO*, la relectura de las otras obras de Arquímedes nos obliga a plantearnos diversas cuestiones epistemológicas acerca de la relación entre procesos de descubrimiento-invención y métodos de exposición-demostración, reflexiones que nos conducirán a interrogarnos acerca de las relaciones entre la dominante escuela deductiva platónico-euclídea y la nebulosa y subordinada escuela inductiva de Demócrito. Estamos, pues, ante un documento que nos despierta una gran inquietud científica, e incluso nos incita a especular con fantasías ucrónicas, acerca de lo que *"pudo haber sido y no fue"* en el Cálculo Integral en caso de haberse descubierto y conocido antes la obra de Arquímedes.

Por eso el valor de esta obra es incalculable, ya no sólo desde el punto de vista científico o como documento histórico, sino sobre todo porque pone de manifiesto el proceso heurístico de los magníficos descubrimientos de Arquímedes, lo cual le da un carácter radicalmente singular en todo el ámbito de la Geometría griega y dentro de la propia obra de Arquímedes.

Referencias

[A] Fuentes originales sobre Arquímides y EL MÉTODO

[1] Archimedes, *Arquimedis Opera Omnia*. Edición de J. L. Heiberg. Leipzig, 1910-1913.

[2] Archimèdes, *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Introducción y notas de P. Ver Eecke, Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.

[3] Archimèdes, texte établi et traduit par Charles Mugler. 4 volúmenes. Société d'Édition "Les Belles. Lettres", Paris, 1970-1972

[4] Arquimedes, *El Método. Introducción y notas de J. Babini*. Eudeba, Buenos Aires, 1966.

[5] Arquimedes, *El Método. Introducción y notas de L. Vega*, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[6] *Arquímedes* (en Científicos Griegos. Antología. Recopilación, estudio preliminar, preámbulo y notas de F. Vera). Aguilar, 1970.

[7] *Arquímedes*, *Obras escogidas*. Edición con facsímil del Manuscrito X-I-14 de la Biblioteca de El Escorial. Editor, Antonio J. Durán. Traducción, Paloma Ortiz y Susana Mimbrera. Notas a la traducción, Pedro M. González Urbaneja. Estudios preliminares de Carlos García Gual, Antonio J. Durán y Pedro M. González Urbaneja. Diseño y maquetación, Juan Luis Varona. Real Sociedad Matemática Española, International Congress of Mathematicians Madrid 2006, Patrimonio Nacional. Madrid, 2006.

[8] Arquímides, *Sobre la Esfera y el Cilindro. Medida del Círculo. Sobres Conoides y Esferoides. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García*. Gredos. Madrid, 2005.

[9] P. M. González Urbaneja y J. Vaqué, *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pub. Univ. Autónoma de Barcelona, Ed. Univ. Politècnica de Catalunya. Colección Clásicos de las Ciencias. Barcelona, 1993. Edición crítica en español de esta obra de Arquímedes.

[10] P. M. González Urbaneja y J. Vaqué, *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edición crítica en catalán de esta obra de Arquímedes.

[11] T. Heath, *The Method of Archimedes recently discovered by Heiberg (A supplement to the works of Archimedes, 1897)*. Cambridge University Press, 1912.

[12] J.L. Heiberg, Eine neue Archimedeshandschrift, *Hermes*, vol. XLII, págs. 234–303, Berlín, 1907.

[13] J.L. Heiberg y H.G. Zeuthen, *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica de Teubner, págs. 321–363, Vol. VII_3, Leipzig, junio, 1907.

[14] R. Netz, *The Works of Archimedes. Vol. I, The Two Books On the Sphere and the Cylinder. Traslated into English, whith commentary, and critical edition of the diagrams*. Cambridge University Press, 2004.

[15] T. Reinach, Un traité de Géométrie inédit d'Archimède. Restitution d'après un manuscrit récemment découvert. *Revue général des Sciences pures et appliquées*, nos de 30/11/1907, 15/12/1907, XVIII, París, 1907.

[16] E. Rufini, *Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926. Nueva edición de Feltrinelli, Milán, 1961.

[17] N. Wilson, *The Archimedes Palimpsest, A Progress Report*. Lincoln College Oxford.
`http//www.archimedespalimpsest.org/index.html`

[B] Obras monográficas sobre Arquímedes

[18] J. Babini, *Arquímedes*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.

[19] M. Clagett, *Archimedes* (en *Dictionary of Scientific Biography*), Charles Scribners sons, New York, 1970. Vol. I, pp. 213?231.

[20] E. Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton University Press, 1987.

[21] T.L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, New York, 2002.

[22] R. Torija, *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Nivola, Madrid, 1999.

[23] Varios autores, *Arquímedes*, Editorial Debate/Itaca, Madrid, 1983.

[C] Obras generales sobre Historia del Cálculo Infinitesimal

[24] M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, London, Pergamon, 1969. Caps 1,2.

[25] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1949. Caps. II, IV.

[26] G. Castelnuovo, *Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna*. Zanichelli. Bologna, 1938. Cap. I.

[27] C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979. Caps. 1, 2, 4.

[28] P.M. González Urbaneja, *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, Madrid, 1992. Caps. 1, 2, 8.

[29] P.M. González Urbaneja, La aparición de los inconmensurables. *Mundo Científico*, **220**, págs. 56–63. Barcelona, 2000.

[30] P.M. González Urbaneja, *De la cuadratura de la espiral a la cuadratura de parábolas. La integración de* x^k (en *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI*), págs. 39–79, Editora Andaluza, Huelva, 2000.

[31] I. Grattan-Guinness, *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*, Alianza Universidad, Madrid, 1984. Cap. 1.

[32] O. Toeplitz, *The Calculus, a Genetic Approach*, Univ. Chicago Press, 1963. Caps. 1, 2.

[D] Obras generales sobre Historia y Filosofía de la Ciencia y de las Matemáticas

[33] E.T. Bell, *Les grands mathématiciens.* Payot. París, 1950. Cap. II.

[34] C.B. Boyer, *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad, Madrid, 1986. Cap. VIII.

[35] L. Brunschvicg, *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, Blanchard, París, 1972. Libro III, cap. 9.

[36] E. Colerus, *Breve historia de las Matemáticas*, Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1, Cap. 3.

[37] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, CBS Coll. Publ. N. York, 1983. Cap. 11.

[38] P.M. González Urbaneja, *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego (en El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton).* Universidad de Sevilla, 2000, Cap. 1.

[39] T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics.* Vol. 2, Cap. XIII.

[40] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap. 5.3.

[41] A. Koyré, *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*, Siglo XXI, Madrid, 1971. Cap. 4.

[42] G. Loria, *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'antiquité hellénique*, Gauthiers-Villars, París, 1929. Cap. III.

[43] J. Montesinos (Coordinador), *Historia de la Geometría griega.* Actas del Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Cap. 22.

[44] J. Montesinos, *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria.* Síntesis. Madrid. 2000. Cap. 4.

[45] J. Montucla, *Histoire des Mathématiques.* Blanchard. París, 1968. Tomo I, Libro IV, Cap. V.

[46] Plutarco, *Vidas paralelas, "Vida de Marcelo"*, XIV-XIX, pp. 339–343 (en Colección de Biógrafos griegos). Aguilar, Madrid, 1970

[47] A. Rey, *El apogeo de la ciencia técnica griega*, UTEHA, México, 1962. Libro V.

[48] J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la Matemática*, Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Cap. III.17.

[49] R. Taton (compilador), *Historia general de las Ciencias.* Orbis. Barcelona, 1988. Vol.2. Libro II, Cap. II.2.

[E] Artículos de revistas científicas

[50] L. Brusotti, I metodi di esaustione nella storia della matematica, *Periodico di Matematiche*, Serie IV, Vol. XXX, n^{o} 5, 1952.

[51] S.H. Gould, The Method of Archimedes. *American Mathematical Monthly*, LXII, 473–476, 1955.

[52] W.R. Knorr, Archimedes and the pre-euclidean proportion theory, *Archives Internat. Hist. Sciences* **28** 183–244, 1978.

[53] W.R. Knorr, Archimedes and the Elements, Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus. *Archive for History of Exact Sciences* **19**, 211–290, 1978.

[54] H. Raeder, Johan Ludving Heiberg, *Isis*, Vol. 11, 367–374, 1928.

[55] D. Whiteside, Patterns of mathematical thought in the later 17th century. *Archive for History of Exact Sciences* **1** 1960-62, 179–388, 1983.

Pedro Miguel González Urbaneja
Correo electrónico: `pgonzale@xtec.net`