Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de octubre de 2007.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 73

Si $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de un entero positivo n, diremos que n es multiplicativamente perfecto si $n \mid \sigma(n)$. Probar que sólo existen un número finito de valores de n tales que $\binom{2n}{n}$ es multiplicativamente perfecto.

Propuesto por Florian Luca
Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia (Michoacán), México

Problema 74

Dados a, b y c números reales positivos, probar que

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Propuesto por Cezar Lupu (estudiante)
Universidad de Bucarest, Bucarest, Rumanía

PROBLEMA 75

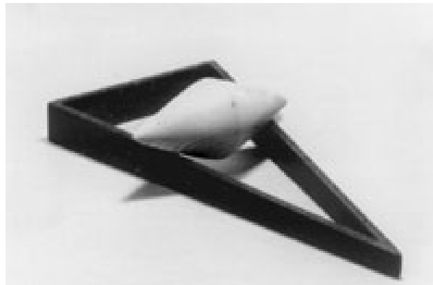


Figura 1: Imagen del doble cono

Aunque los orígenes del *doble cono* son inciertos (el francés Jean Theophile Desaguliers reivindica su descubrimiento en 1734), sí sabemos que su popularización se debe a George Adams, quien lo fabrica y comercializa a partir de 1759. El doble cono, también llamado *paradoja mecánica*, es uno de los más populares mecanismos de la Física Recreativa. El artefacto completo consiste en dos conos iguales, unidos rígidamente por sus bases circulares, y en dos rieles divergentes a modo de plano inclinado. Cuando el doble cono se sitúa cerca de la intersección de los rieles, en la parte inferior del plano inclinado, comienza a "girar hacia arriba". La Figura 1 muestra un doble cono, una ilustración animada del fenómeno descrito puede verse, por ejemplo, en `http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/esim.asp?c=500137`.

Si designamos por α al ángulo entre el plano inclinado y el plano horizontal, por β al ángulo de apertura de los rieles y por γ al ángulo que forma la generatriz del cono con la base del mismo, ¿puede obtenerse una relación entre α, β y γ para que el fenómeno ocurra tal como se ha descrito?

Propuesto por Esther M. García Caballero y Samuel G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén

PROBLEMA 76

Supongamos que tenemos un retículo (puntos de coordenadas enteras) en el que para pasar de un punto a otro sólo es posible hacerlo avanzando hacia la derecha o hacia arriba; es decir, del punto (m, n) sólo podemos ir a los puntos $(m+1, n)$ y $(m, n+1)$. En estas condiciones, calcular, para $k, p \geq 1$, el número de caminos que unen los puntos $(0,0)$ y $(k, k+p-1)$ sin tocar la recta $y = x + p$.

Propuesto por J. Manuel Gutiérrez
Universidad de La Rioja, Logroño

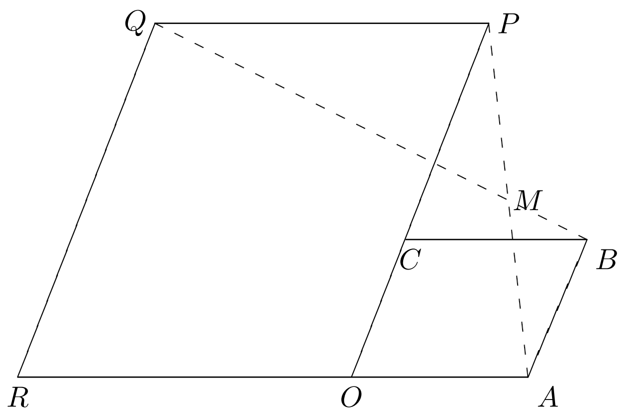
Problema 77

Sean los paralelogramos $OABC$ y $OPQR$ como se indican en la figura y definimos el punto M como la intersección de los segmentos PA y QB.

a) Probar que los puntos R, C y M son colineales.

b) Probar que el triángulo $\triangle RMA$ es rectángulo en M si y sólo si los paralelogramos de partida son cuadrados.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos M para el caso en el que $OABC$ es un cuadrado fijo y $OPQR$ es un cuadrado variable.



Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense de Madrid, Madrid

Problema 78

Llamamos triangulación de un polígono P a toda subdivisión de P en regiones triangulares de interiores disjuntos dos a dos, de modo que los vértices de las regiones sean también vértices del polígono P. Los lados de los triángulos los denominaremos aristas de la triangulación. El grado de un vértice indicará el número de aristas incidentes en él.

a) Sean $n \in \mathbb{N}$ y P un n-gono convexo. Probar que si n es múltiplo de tres, P admite una triangulación con todos los vértices de grado par, y que si n no es múltiplo de tres, existe una triangulación en la que todos los vértices excepto dos de ellos son de grado par.

b) Sean $k \in \mathbb{N}$ y C un $(3k+2)$-gono convexo. Si denotamos por a y b dos vértices adyacentes del mismo, probar que existe una triangulación de C en la que todos los vértices son de grado par excepto a y b.

Propuesto por Javier Rodrigo
Universidad Pontificia de Comillas, Madrid

PROBLEMA 79

Probar que si $n = 3m$, $m \in \mathbb{N}$ y $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i+1}\cdots a_{i+m} + a_{i+1}\cdots a_{i+2m}}\right) \geq n,$$

donde $a_{n+i} = a_i$.

Propuesto por Ovidiu Bagdasar
Universidad Babes Bolyai, Cluj Napoca, Rumanía

PROBLEMA 80

Hallar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 - 2xy - y = 0.$$

Propuesto por M. Benito Muñoz y E. Fernández Moral
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

PROBLEMA 65 (Corrección)

Probar la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} = \frac{\pi \ln^2 2}{2} - \frac{\pi^3}{48} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2 \cos x \, dx.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

Soluciones

Problema 49

Sean x, y números reales positivos tales que $1 \leq y \leq x$. Probar que

$$(x-y)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) \leq \ln\frac{x(y+1)}{y(x+1)}.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

Solución

Probaremos el resultado para valores $0 < y \leq x$, sin la limitación de que sean mayores que uno.

Comencemos por notar que, por la desigualdad de Schwartz, para todo a positivo se tiene

$$\left(\int_1^{1+a}\frac{dx}{x}\right)^2 \leq \left(\int_1^{1+a} dx\right)\left(\int_1^{1+a}\frac{dx}{x^2}\right);$$

que es equivalente a

$$[\ln(1+a)]^2 \leq \frac{a^2}{1+a}. \tag{1}$$

Consideremos ahora la función $F(x) = \frac{1}{\ln(1+1/x)}$, que satisface

$$F'(x) = \frac{1}{[\ln(1+1/x)]^2}\frac{1/x^2}{1+1/x} \geq 1,$$

para todo x positivo en virtud de (1). Ahora, basta aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo $[y, x]$ para obtener que $F(x) - F(y) \geq x - y$; es decir,

$$\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq (x-y)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

que es la desigualdad pedida ya que $\ln\frac{x(1+y)}{y(1+x)} = \ln\frac{1+1/y}{1+1/x}$.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, J. Gómez, J. M. Manzano, J. M. Olm y X. Ros y el proponente

NOTA. La técnica utilizada en casi todas las soluciones recibidas sigue la línea argumental dada en la seleccionada, diferenciándose unas de otras en la forma de obtener la desigualdad (1). La excepción es la solución enviada por J. M. Olm y X. Ros. En su caso tomando la nueva variable $a = \log(1 + 1/x)$ transforman la desigualdad propuesta en probar que $g(b) \le g(a)$ para $0 < a \le b$ donde $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$.

PROBLEMA 50

Si a y b son números reales positivos, evaluar

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(by)}{xy(x+y)}\,dx\,dy.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

SOLUCIÓN

El valor de la integral propuesta es $\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\right)$.

A lo largo de la resolución haremos uso de las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad a > 0, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x(1+b^2x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a+b}{b}\right), \quad a, b > 0. \tag{2}$$

La integral a evaluar coincidirá con $I(a,b,0)$ siendo

$$I(a,b,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)t}\frac{\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(by)}{xy(x+y)}\,dx\,dy.$$

Resulta sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t}(a,b,t) &= -\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)t}\frac{\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(by)}{xy}\,dx\,dy\\ &= -\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\,dx \int_0^\infty e^{-yt}\frac{\operatorname{sen}(by)}{y}\,dy =: -A(a,t)\cdot A(b,t)\end{aligned}$$

Utilizando (1) y la conocida identidad $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, tendremos que

$$\begin{aligned}A(a,t) &= \int_0^t \frac{\partial A}{\partial t}(a,s)\,ds + A(a,0)\\ &= -\int_0^t \int_0^\infty e^{-xs}\operatorname{sen}(ax)\,dx\,ds + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\,dx\\ &= -\int_0^t \frac{a}{a^2+s^2}\,ds + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{t}{a}\right) = \arctan\left(\frac{a}{t}\right)\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que $\arctan z + \arctan \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$, lo que es válido para $z \neq 0$. De este modo

$$I(a,b,t) = -\int_0^t \arctan\left(\frac{a}{u}\right)\arctan\left(\frac{b}{u}\right)\,du + C.$$

Por la definición, es claro que $\lim_{t\to\infty} I(t,a,b) = 0$ y por tanto $C = \int_0^\infty \arctan\left(\frac{a}{u}\right)\arctan\left(\frac{b}{u}\right)\,du$. Con esto concluimos que

$$I(a,b,0) = \int_0^\infty \arctan\left(\frac{a}{u}\right)\arctan\left(\frac{b}{u}\right)\,du = \int_0^\infty \arctan(ar)\arctan(br)\,\frac{dr}{r^2},$$

donde hemos efectuado el cambio de variable $u = r^{-1}$. Por último, aplicando integración por partes y usando (2), llegamos a que

$$\begin{aligned} I(a,b,0) &= \int_0^\infty \left(a\frac{\arctan(br)}{1+a^2r^2} + b\frac{\arctan(ar)}{1+b^2r^2}\right)\frac{dr}{r} \\ &= a\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) + b\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a+b}{b}\right) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\right) \end{aligned}$$

con lo que concluimos.

Nota. Cuando los parámetros a o b no sean positivos el hecho de que la función seno es impar permitirá evaluar la integral de manera elemental.

Solución enviada por el proponente

Nota. El autor de la solución afirma que la integral en (1) es obvia pero, sin embargo, da una demostración elemental de (2). Para obtenerla denota el lado izquierdo de (2) por $J(a,b)$, prueba por integración elemental que $\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{b+a}$ y concluye integrando contra a y usando que $J(0,b) = 0$.

Problema 51

Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes exteriormente en O, se considera la recta tangente a ambas en el punto de contacto y en ella un punto P variable distinto de O. Las circunferencias C_1' y C_2' que pasan por P y son tangentes a las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente se cortan en un segundo punto Q.

a) Probar que la recta PQ pasa por un punto fijo al variar P.

b) Determinar la posición de P para que los cuatro puntos de tangencia de C'_1 y C'_2 con C_1 y C_2 estén alineados.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I. E. S. Penyagolosa, Castellón

SOLUCIÓN

Llamemos ω a la circunferencia de centro P y radio OP y r a la recta tangente en O a las circunferencias C_1 y C_2. La circunferencia ω corta ortogonalmente a C_1 y C_2 y por tanto estas circunferencias son invariantes en una inversión respecto a ω. Trazando las rectas tangentes, t_1 y t_2, a C_1 y C_2 e invirtiéndolas respecto a ω obtenemos las circunferencias C'_1 y C'_2.

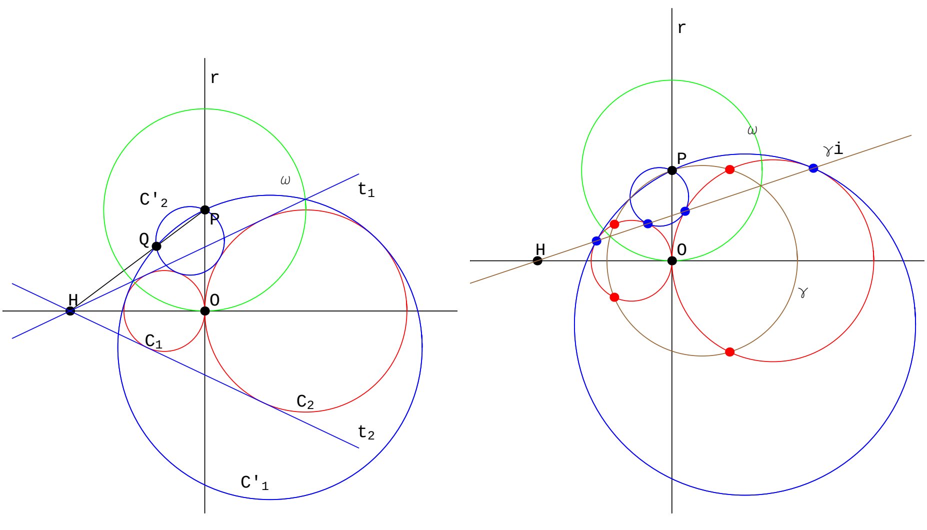


Figura 2: A la izquierda se muestra el dibujo que ilustra la solución del apartado a). El dibujo de la derecha describe la situación del apartado b).

a) Las tangentes t_1 y t_2 se cortan en el punto H, centro de la homotecia positiva entre C_1 y C_2, de modo que las circunferencias C'_1 y C'_2 se cortarán en el punto Q inverso de H respecto ω. Por consiguiente la recta PQ pasa siempre por el punto H de intersección de las rectas t_1 y t_2.

b) Los cuatro puntos de tangencia de t_1 y t_2 con C_1 y C_2 son concíclicos, ya que forman un trapecio isósceles. Llamemos γ a la circunferencia que pasa por ellos y sea P uno de los puntos de corte de γ con la recta r. Como γ pasa por P, la figura inversa de γ respecto a ω es una recta, γi, que contendrá a los cuatro puntos de tangencia de C_1 y C_2 con C'_1 y C'_2 (inversos de los puntos de tangencia de t_1 y t_2 con C_1 y C_2). Reciprocamente, si los cuatro puntos de tangencia de C_1 y C_2 con C'_1 y C'_2 están alineados, sus inversos están en una circunferencia que pasa por el polo de inversión, lo que obliga a que P esté en la intersección de la circunferencia γ con la recta r.

Solución enviada por César Beade Franco
I. E. S. "Fernando Blanco", Cee, La Coruña
También resuelto por R. Barroso, J. M. Manzano, M. Pérez, M. D. Sondesa y el proponente

Nota. El autor de la solución anterior incluye algunas observaciones interesantes sobre la construcción geométrica propuesta en el enunciado del problema:

a) Si a y b son los radios de las circunferencias C_1 y C_2, el radio de la circunferencia γ es $\sqrt{2ab}$.

b) El lugar geométrico de los centros de las circunferencias C'_1 y C'_2 es una hipérbola de centro el punto medio de los centros de C_1 y C_2, con focos en los centros de C_1 y C_2 y pasando por el punto O.

c) Una extensión natural del enunciado propuesto sería considerar las circunferencias C_1 y C_2 en cualquier posición con el punto P variando sobre su eje radical.

Problema 52

Encontrar el valor de $\omega \in \mathbb{C}$ para que la sucesión $z_{n+1} = f \circ g(z_n)$ esté bien definida para todo $z_0 = e^{i\theta_0}$, con $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, siendo

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \begin{cases} 1 + \frac{z-1}{|z-1|}, & \text{si } z \neq 1, \\ w, & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

En ese caso, determinar el límite de la sucesión $\{z_n\}$.

Propuesto por J. Manuel Gutiérrez
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Vamos a resolver un caso más general, en el que supondremos un valor de θ_0 arbitrario, que al final nos será útil para hacer la discusión sobre w.

Dado $\theta \in (0, \pi)$, tenemos que

$$g(e^{i\theta}) = 1 + \frac{e^{i\theta} - 1}{|e^{i\theta} - 1|} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos\theta} + \cos\theta - 1}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}} + i\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}}$$

y por consiguiente $g(e^{i\theta})$ está bien definido y sus partes real e imaginaria son positivas. En consecuencia, $g(e^{i\theta})$ está en el primer cuadrante y $(f \circ g)(e^{i\theta}) = e^{i\theta'}$, donde

$$\theta' = \arg g(e^{i\theta}) = \arctan \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}+\cos\theta-1} = \frac{1}{4}(\theta+\pi)$$

(la última igualdad se puede comprobar por derivación). Por tanto,

- Si $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, entonces $\theta < \theta' < \frac{\pi}{3}$.
- Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, entonces $\theta' = \frac{\pi}{3}$.
- Si $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$, entonces $\frac{\pi}{3} < \theta' < \theta$.

Volviendo ya al problema original, podemos escribir $z_n = e^{i\theta_n}$ con $\theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ $(n \geq 1)$ y los tres casos anteriores se traducen en los siguientes:

- Si $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{3}$, entonces $\{\theta_n\}$ es una sucesión creciente y acotada por $\frac{\pi}{3}$, luego tiene límite. Como $\theta_n = \frac{1}{4}(\theta_{n-1}+\pi)$, tomando límite en esta expresión deducimos que el límite θ cumple $\theta = \frac{1}{4}(\theta+\pi)$, de donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta_n \to \frac{\pi}{3}$.
- Si $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, entonces $\theta_n = \frac{\pi}{3}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
- Si $\frac{\pi}{3} < \theta_0 < \pi$, entonces concluimos, de forma análoga al primer caso, que $\{\theta_n\}$ es una sucesión que decrece a $\frac{\pi}{3}$.

En cualquier caso, hemos probado que $z_n \to e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Siguiendo un razonamiento similar se prueba que si $\theta_0 \in (-\pi, 0)$, entonces $z_n \to e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por otro lado, si $\theta_0 = -\pi$, entonces $z_1 = f(0)$ está inevitablemente mal definido.

Finalmente, si $\theta_0 = 0$, tenemos que $z_1 = f(w)$ está definido si, y sólo si, $w \neq 0$ y $z_2 = f(g(f(w)))$ está definido si, y sólo si, $g(f(w)) \neq 0$; esto es, $w \notin (-\infty, 0]$, en cuyo caso están definidos todos los demás z_n. Deducimos que w puede ser cualquier número en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y en tal caso se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} e^{i\pi/3}, & \operatorname{Im}(w) > 0, \\ 1, & w \in \mathbb{R}^+, \\ e^{-i\pi/3}, & \operatorname{Im}(w) < 0. \end{cases}$$

NOTA. Obsérvese que geométricamente la iteración de $f \circ g$ consiste en proyectar alternativamente sobre las circunferencias $C(1,1)$ y $C(0,1)$ (salvo cuando hay que usar el valor de w).

Solución enviada por José M. Manzano Prego
Universidad de Granada, Granada
También resuelto por V. Lanchares, X. Ros y el proponente

Problema 53

Los números de Rey Pastor, $\{A_n\}_{n\geq 0}$, y los números de Bernouilli, $\{B_n\}_{n\geq 0}$, están definidos mediante las identidades

$$\frac{x}{\log(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

respectivamente. Si $\left[{n \atop k}\right]$ y $\left\{{n \atop k}\right\}$ denotan los números de Stirling de primera y segunda especie, respectivamente, probar que, para $n \geq 0$,

$$B_{n+1} = -(n+1) \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{A_{k+1}}{k+1}$$

y

$$(-1)^n A_{n+1} = -(n+1) \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez y E. Fernández Moral
Universidad de La Rioja e I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

Solución

A_n y B_n son las derivadas n-ésimas en $z = 0$ de $f(z) = \frac{z}{\log(1+z)}$ y $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ respectivamente, cuyo valor en $z = 0$ es 1 en ambos casos. Sean entonces $\varphi(z) = \frac{f(z)-1}{z}$ y $\psi(z) = \frac{g(z)-1}{z}$, con derivadas n-ésimas en $z = 0$ dadas por $\alpha_n = \frac{A_{n+1}}{n+1}$ y $\beta_n = \frac{B_{n+1}}{n+1}$. Resulta que $\psi(z) = -\varphi(e^z - 1)$; es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} (e^z - 1)^k.$$

Sea γ una circunferencia centrada en el origen y de radio suficientemente pequeño, recorrida en sentido positivo. Tenemos que

$$\psi^{(n)}(0) = \beta_n = -\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} (e^z - 1)^k}{z^{n+1}}\, dz = -\frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \int_\gamma \frac{(e^z - 1)^k}{z^{n+1}}\, dz$$

(el sumatorio sale fuera por convergencia uniforme, y las integrales para $k > n$ son nulas porque los integrandos son funciones enteras). Ahora bien, los números de Stirling de segunda especie pueden definirse precisamente como

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{k!} \int_\gamma \frac{(e^z-1)^k}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

En efecto, los valores así definidos cumplen que $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$, $\left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$ para $k > 0$ y la recurrencia $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \left\{ {n \atop k} \right\} + (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\}$ se reduce a la siguiente aplicación de la fórmula de integración por partes:

$$(n+1)\int_\gamma \frac{(e^z-1)^{k+1}}{z^{n+2}}\, dz = (k+1)\int_\gamma \frac{(e^z-1)^k e^z}{z^{n+1}}\, dz.$$

Concluimos, para cada $n \geq 0$, la primera igualdad que había que demostrar

$$\beta_n = -\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \alpha_k.$$

La segunda se sigue de la anterior y de la conocida fórmula de inversión entre los números de Stirling de primera y segunda especie: para cada $N \geq 0$ la matriz inversa de $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}\right)_{0\leq n,k\leq N}$ es $\left(\left[{n \atop k} \right](-1)^{k-n}\right)_{0\leq n,k\leq N}$, donde $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left[{n \atop k} \right] = 0$ si $n < k$. Por tanto,

$$(-1)^n \alpha_n = -\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] (-1)^k \beta_k.$$

NOTA. La segunda igualdad puede probarse igual que la primera, a partir de $\varphi(z) = -\psi(\log(1+z))$ y usando la expresión análoga para los números de Stirling de primera especie:

$$\left[{n \atop k} \right] = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^n n!}{(-1)^k k!} \int_\gamma \frac{\log^k(1+z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

Solución enviada por José Luis Arregui
Universidad de Zaragoza, Zaragoza
También resuelto por S. G. Moreno y E. García y los proponentes

PROBLEMA 55

Consideremos la ecuación

$$\sigma(n) + n = \sigma(n+1), \tag{3}$$

donde $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de n.

a) Probar que si $n = 2^k - 1$, entonces n es solución de la ecuación (3) si y sólo si n es primo (primo de Mersenne).

b) $\star$ Probar o refutar la siguiente conjetura:

Si n es solución de la ecuación (3) entonces n es un primo de Mersenne.

Nota. Numéricamente se ha comprobado que la conjetura es cierta para $n < 10^8$.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

Nota. A continuación presentamos una solución al apartado a), para el apartado b) no se han recibido soluciones. Cualquier aportación a la resolución de esta cuestión será bienvenida en cualquier momento.

Solución

a) Sea $n = 2^k - 1$, entonces

$$\sigma(n+1) = \sigma(2^k) = 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

De esta manera, (3) puede escribirse como $\sigma(2^k - 1) + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$, lo cual nos lleva a $\sigma(2^k - 1) = 2^k$ o, equivalentemente, a

$$\sigma(n) = n + 1. \tag{1}$$

Si n es primo, se cumple trivialmente la ecuación (1), ya que los únicos divisores de n son 1 y n. Por otra parte, si n no es primo, tiene otros divisores además de 1 y n, por lo que $\sigma(n) > n + 1$, y no se cumple (1).

Solución enviada por Xavier Ros (estudiante)
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona
También resuelto por V. Lanchares, J. López, M. Peña y el proponente

Problema 56

Hallar todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A^n + A^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 3.$$

Propuesto por J. L. Díaz Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

SOLUCIÓN

Denotemos por B la matriz del lado derecho de la ecuación propuesta. Si n es impar, la única solución es $A = (1/2)B$, mientras que si n es par, las soluciones son $(1/2)B$ y $(-1/2)B$. Es inmediato comprobar que éstas son soluciones. Veamos que son las únicas posibles.

En efecto, si A es una solución y λ, μ son sus autovalores, entonces los autovalores de $A^n + A^{n-2}$ son $\lambda^n + \lambda^{n-2}$ y $\mu^n + \mu^{n-2}$. Por tanto, como los autovalores de B son 0 y 2, se debe cumplir:

$$0 = \lambda^n + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 + 1) \quad \text{y} \quad 2 = \mu^n + \mu^{n-2} = \mu^{n-2}(\mu^2 + 1).$$

De la primera ecuación deducimos que $\lambda = 0$, ya que en otro caso tendríamos que $\lambda^2 + 1 = 0$ lo que implicaría $\mu^2 + 1 = 0$ (ya que en esta situación se verificaría que $\mu = \overline{\lambda}$) contradiciendo la segunda ecuación. Por otra parte, μ debe ser una raíz real del polinomio $p(x) = x^n + x^{n-2} - 2$. Es inmediato comprobar que $p'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. De hecho, $p(x)$ es estrictamente creciente si n es impar y tiene un único extremo relativo (mínimo) si n es par. De aquí se deduce que las únicas raíces reales de $p(x)$ son $\mu = 1$ si n es impar y $\mu = \pm 1$ si n es par.

Así pues, si n es impar, el polinomio característico de A es $q(x) = x^2 - x$. Por el Teorema de Cayley-Hamilton, $q(A) = A^2 - A = 0$, y por tanto $A^2 = A$. En consecuencia, $B = A^n + A^{n-2} = 2A$, de donde $A = (1/2)B$.

Del mismo modo, si n es par se deduce que $A^2 = \pm A$, de donde $B = A^n + A^{n-2} = \pm 2A$, y por tanto $A = \pm(1/2)B$.

Solución enviada por Eduardo Liz Marzán
Universidad de Vigo, Vigo

También resuelto por J. M. Gutiérrez, V. Lanchares, S. G. Moreno y E. M. García, J. M. Olm, M. Pérez, X. Ros (estudiante), F. Rubio, C. Sánchez y el proponente