PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de diciembre de 2008.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

PROBLEMA 103. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, dx.$$

PROBLEMA 104. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaiyán.*

Probar que existe una única terna de sucesiones de números reales positivos a_i, b_i y c_i, con $i = 0, 1, 2, \dots$, tales que $a_0+b_0+c_0 = 1$, $a_{i+1} = b_i+c_i-a_i$, $b_{i+1} = a_i+c_i-b_i$ y $c_{i+1} = a_i + b_i - c_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots$

PROBLEMA 105. *Propuesto por Marius Olteanu, Rimnicu–Vilcea, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales no negativos. Probar que

$$9(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1) \geq 8(a^6+a^3+1)^{2/3}(b^6+b^3+1)^{2/3}(c^6+c^3+1)^{2/3}.$$

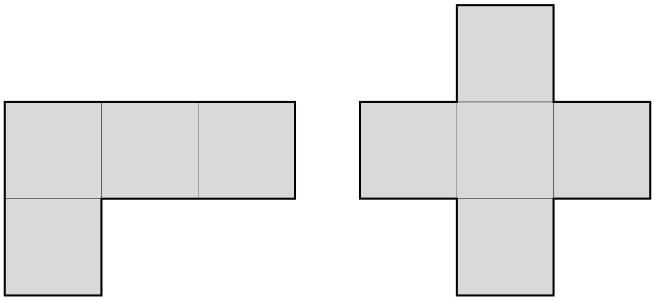
PROBLEMA 106. *Propuesto por C. Balbuena, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y P. García Vázquez, Universidad de Sevilla, Sevilla.*

Sean $c \geq 1$ un número real fijo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un conjunto de números reales con media aritmética $\overline{x}$ y tales que $x_i \geq 2c$. Demostrar que

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - c)^{x_i} \geq (\overline{x} - c)^{n\overline{x}}.$$

PROBLEMA 107. *Propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.*

Para cubrir, sin solapamientos y sin dejar huecos, una superficie cuadrada de $n \times n$ unidades de área, se dispone de piezas de dos tipos como las que se muestran en la figura que aparece a continuación, donde cada cuadradito tiene una superficie unidad. Utilizando el mismo número de piezas de un tipo y de otro, ¿qué valores puede tomar n para que el recubrimiento sea posible?



PROBLEMA 108. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Dado un paraboloide elíptico en $\mathbb{R}^3$, determinar el lugar geométrico de los centros de las esferas que lo cortan en dos circunferencias.

NOTA. La propuesta anterior no es nueva, ha aparecido publicada en dos ocasiones anteriormente por el mismo proponente. La primera de ellas apareció como *Problema 1014* en *The Pi Mu Epsilon Journal*, vol. 11, n.º 4, 2001, pág. 216. La solución enviada por el proponente se publicó en la misma revista, vol. 11, n.º 6, 2002, págs. 334–336. Posteriormente volvió a ser propuesto como Problema A64 en la revista de la Societat Catalana de Matemàtiques *SCM/Notícies*, n.º 20, 2004, pág. 36. Originariamente el problema fue planteado en un examen de Geometría Analítica en la Universidad de Barcelona en el curso 1968–69. Esperamos que esta nueva aparición del problema dé lugar a nuevas soluciones, esencialmente distintas de la enviada por el autor.

Soluciones

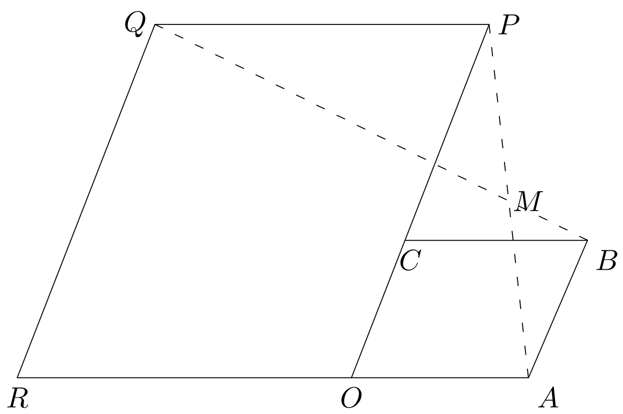
Problema 77. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Sean los paralelogramos $OABC$ y $OPQR$ como se indican en la figura y definimos el punto M como la intersección de los segmentos PA y QB.

a) Probar que los puntos R, C y M son colineales.

b) Probar que el triángulo $\triangle RMA$ es rectángulo en M si y sólo si los paralelogramos de partida son cuadrados.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos M para el caso en el que $OABC$ es un cuadrado fijo y $OPQR$ es un cuadrado variable.



Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

a) Definimos los puntos S y T como las intersecciones respectivas de QB y OP, y de BC y QR. Como QT es paralelo a SC, los triángulos QBT y SBC son semejantes. Usando que PS y AB son paralelos, los triángulos PMS y AMB también lo son. Entonces, podemos escribir

$$CS = \frac{CB \cdot QT}{RA} = \frac{OA\,(OP - OC)}{OR + OA},$$

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PS}{AB} = \frac{OP - OC - CS}{OC} = \frac{OP - OC}{OC}\left(1 - \frac{OA}{OR + OA}\right) = \frac{CP}{OC}\frac{RO}{AR},$$

y por el recíproco del teorema de Menelao aplicado al triángulo AOP, los puntos R, C y M están alineados.

b) Si $OABC$ es un cuadrado, $OPQR$ es un rectángulo, $OA = OC$, y es trivial comprobar que $\tan(\angle RAM) = \tan(\angle OAP) = \frac{OP}{OA}$, mientras que $\tan(\angle MRA) = \tan(\angle CRO) = \frac{OC}{OR}$. Ahora bien, $\angle RMA$ es recto si y sólo si las tangentes de $\angle RAM$ y $\angle MRA$ tienen producto igual a uno, con lo que $\angle RMA$ es recto si y sólo si $OR = OP$; es decir, si y sólo si $OPQR$ es un cuadrado.

c) Si $OABC$ y $OPQR$ son cuadrados, entonces por los dos apartados anteriores se verifica que $\angle AMC = \angle AMR = \frac{\pi}{2}$, y M está en un arco de circunferencia de diámetro AC; es decir, es un arco de la circunferencia circunscrita al cuadrado $OABC$. Si dejamos que $OPQR$ tienda de forma continua desde estar degenerado al punto O hasta ser un cuadrado infinito, el punto M varía también de forma continua desde el propio punto O hasta el punto B, pasando por C cuando $OABC$ y $OPQR$ son cuadrados iguales, luego asumiendo esa variación, el lugar geométrico de M sería la semicircunferencia de diámetro AC que pasa por C con extremos en O y B.

También resuelto por J. Benítez, S. Campo, R. S. Eléxpuru, J. García, A. Munaro, X. Ros, A. Sáez, C. Sánchez y el proponente.

NOTA. La solución de J. Benítez establece y prueba una versión proyectiva del enunciado que permite generalizarlo y dar una versión dual. R. S. Eléxpuru comenta en su solución que el lugar geométrico de los incentros de los triángulos QOB es la recta OP y que los triángulos RAP tienen como ortocentro común el punto C.

PROBLEMA 80. *Propuesto por M. Benito Muñoz y E. Fernández Moral, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.*

Hallar todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 - 2xy - y = 0.$$

Solución compuesta por las enviadas por César Beade, I. E. S. "Fernando Blanco", Cee, La Coruña, y Andrea Munaro (estudiante), Universidad de Trento, Italia.

Reagrupando los términos de la ecuación tenemos $x^2 + (y-1)x - (y+3) = 0$. Resolviendo en x llegamos a las soluciones

$$x = (y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 + y + 3} = (y-1) \pm \sqrt{y^2 - y + 4}.$$

Entonces se debe cumplir que $y^2 - y + 4 = k^2$, para algún entero k. Ahora usando la positividad de y, deducimos que $(y-1)^2 < y^2 - y + 4 \le (y+1)^2$. Por tanto, sólo hay dos posibilidades:

a) $k^2 = y^2$, lo que implica $y = 4$ y nos da la solución $(7, 4)$; y

b) $k^2 = (y-1)^2$, de donde obtenemos que $y = 1$ y la solución $(2, 1)$.

También resuelto por M. Amengual, M. Fernández, D. Garcés, G. García, E. J. Gómez, D. Lasaosa, J. M. Mingot, J. Rodrigo (dos soluciones), C. Sánchez y los proponentes.

NOTA. Además de las soluciones en enteros positivos $(7, 4)$ y $(2, 1)$, la ecuación del problema anterior admite como soluciones enteras las parejas $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(-2, 1)$ y $(-1, 4)$. Este hecho es comentado en varias de las soluciones recibidas.

Problema 81. *Propuesto por Mihály Bencze, Brasov, Rumanía.*

Sean $\{x_k\}_{1\le k\le n}$ números reales positivos; probar que

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\arctan x_k}\right)\ge\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Departamento de Matemáticas, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.

La concavidad de la función $\arctan x$ para $x\ge 0$ implica que

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\ge\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\arctan x_k$$

y, de esta forma, el resultado propuesto es consecuencia de la desigualdad

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\arctan x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\arctan x_k}\right)\ge\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n},$$

que puede probarse usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz y la desigualdad entre la media geométrica y la media de orden r, para $r>0$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r}\ge\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\arctan x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\arctan x_k}\right)&\ge\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\right)^2\\&\ge\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.\end{aligned}$$

También resuelto por M. Fernández, O. Furdui, J. C. González, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, A. Munaro, X. Ros (estudiante), J. Vinuesa y el proponente.

Problema 82. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan.*

Probar la identidad

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{x(1-x)}\right\}dx=2+\lim_{n\to\infty}(2\log n-n+S_n),$$

donde $\{a\}$ denota la parte fraccionaria de a y $S_n=\displaystyle\sum_{k=4}^{n-1}\sqrt{\frac{k-3}{k+1}}$.

Solución enviada por J. Vinuesa, Universidad de Cantabria, Santander.

Sea $f(x) = \left\{\frac{1}{x(1-x)}\right\}$. Obviamente $I := \int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$. Puesto que los puntos $a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{n-4}{n}}\right)$ cumplen $\frac{1}{a_n(1-a_n)} = n$, para $n \geq 4$, la función f satisface $f(x) = \frac{1}{x(1-x)} - n$ si $a_n \leq x < a_{n+1}$. De este modo

$$I = \lim_{n\to\infty} 2\int_{1/2}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} 2\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Como

$$\begin{aligned}
2\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx &= 2\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dx}{x(1-x)} - 2k(a_{k+1}-a_k)\\
&= 2\left(\log\left(\frac{a_{k+1}}{1-a_{k+1}}\right) - \log\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right)\right) - k\left(\sqrt{\frac{k-3}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-4}{k}}\right),
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} 2\log\left(\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}\right) - n\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} + S_n\\
&= \lim_{n\to\infty} 2\log(a_{n+1}^2(n+1)) - n\left(\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} - 1\right) - n + S_n\\
&= \lim_{n\to\infty} 2\log\left(\frac{a_{n+1}^2(n+1)}{n}\right) - n\left(\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} - 1\right) + 2\log n - n + S_n\\
&= 2 + \lim_{n\to\infty} 2\log n - n + S_n,
\end{aligned}$$

porque

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_{n+1}^2(n+1)}{n}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} -n\left(\sqrt{\frac{n-3}{n+1}} - 1\right) = 2.$$

También resuelto por R. S. Eléxpuru, M. Fernández, D. Lasasosa, P. Perfetti, B. Salgueiro y el proponente.

PROBLEMA 83. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Sean $\lambda > 0$ un número real y $p \geq 1$ un número entero. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda k^{p-1}}{x}\right)^{\frac{x}{n^p}}.$$

Una solución sin palabras enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\lambda k^{p-1}}{x}\right)^{\frac{x}{n^p}} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\lambda k^{p-1}}{x}\right)^{\frac{x}{n^p}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{n^p}\log\left(1+\frac{\lambda k^{p-1}}{x}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda k^{p-1}}{n^p}\right)\\
&= \exp\left(\lambda\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p}\right)\\
&= \exp\left(\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\right)\\
&= \exp\left(\lambda\int_0^1 x^{p-1}\,dx\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{p}\right).
\end{aligned}
$$

También resuelto por M. Fernández, O. Furdui, D. Lasaosa, A. Munaro, X. Ros (estudiante), J. Vinuesa y el proponente.

Problema 84. *Propuesto por Juan Carlos González Vara, Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid.*

Sean x e y números reales positivos y distintos. Se definen la media aritmética A, la media geométrica G, la media armónica H y la media logarítmica L de x e y por

$$A=\frac{x+y}{2},\qquad G=\sqrt{xy},\qquad H=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\qquad \text{y}\qquad L=\frac{x-y}{\ln x-\ln y},$$

respectivamente. Probar que

$$G<\sqrt[3]{\left(1+\frac{2\sqrt{AH}}{A+H}\right)\frac{A^2H}{2}}<L.$$

Solución enviada por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Para probar la parte izquierda de la desigualdad, observemos que

$$AH=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}=xy=G^2.$$

Por tanto,

$$\left(1+\frac{2\sqrt{AH}}{A+H}\right)\frac{A^2H}{2}=\left(1+\frac{2G}{A+G^2/A}\right)\frac{G^2A}{2}=\left(\frac{A^2+2AG+G^2}{A^2+G^2}\right)\frac{G^2A}{2}$$

y la desigualdad a demostrar se convierte en

$$G^3<\left(\frac{A^2+2AG+G^2}{A^2+G^2}\right)\frac{G^2A}{2}.$$

Pero multiplicando ambos lados por $2(A^2+G^2)$ y simplificando términos, obtenemos que ésta es equivalente a

$$2G^3<A^3+AG^2,$$

la cual es obviamente cierta ya que $A>G$.

Por otro lado, para probar la parte derecha de la desigualdad usaremos que

$$\sqrt[3]{A^2H}<L. \tag{1}$$

Posponemos momentáneamente la demostración de este hecho. En efecto, teniendo en cuenta (1), será suficiente probar que

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{2\sqrt{AH}}{A+H}\right)\frac{A^2H}{2}}<\sqrt[3]{A^2H},$$

o, equivalentemente, $2\sqrt{AH}<A+H$, lo que es obviamente cierto.

DEMOSTRACIÓN DE (1). Teniendo en cuenta que $AH=xy$, debemos demostrar

$$\sqrt[3]{xy\frac{x+y}{2}}<\frac{x-y}{\ln x-\ln y}.$$

Como la desigualdad es simétrica y homogénea, podemos suponer $x>y$ e $y=1$ y, por tanto, basta probar

$$0<\frac{x-1}{\sqrt[3]{x\frac{1+x}{2}}}-\ln x, \qquad \text{para } x\geq 1.$$

En $x=1$ se da la igualdad y, para $x>1$, tenemos

$$\begin{aligned}
0<\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x\frac{1+x}{2}}}-\ln x\right) &\iff 0<\frac{2^{1/3}(x^2+4x+1)}{3[x(x+1)]^{4/3}}-\frac{1}{x}\\
&\iff 3(x(x+1))^{4/3}<2^{1/3}(x^2+4x+1)x\\
&\iff 27x(x+1)^4<2(x^2+4x+1)^3\\
&\iff 0<(x+2)(2x+1)(x-1)^4,
\end{aligned}$$

lo que, claramente, es cierto.

También resuelto por R. S. Eléxpuru (solución parcial), D. Lasaosa, P. Perfetti y el proponente.