
ESCUELA DE MATEMÁTICAS LLUÍS SANTALÓ 2008

Álgebras de operadores: un campo de investigación interdisciplinar

por

Pere Ara, Fernando Lledó y Francesc Perera

INTRODUCCIÓN

Del 21 al 25 de julio de 2008 ha tenido lugar en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander la Escuela de Matemáticas Lluís Santaló 2008, que ha contado con el patrocinio de la RSME. El título del curso ha sido *Aspects of operator algebras and applications* y las actas [1] se publicarán como parte del acuerdo de cooperación editorial entre la American Mathematical Society y la RSME.

El área de investigación desarrollada en esta escuela tiene su origen en los trabajos de John von Neumann, una de las figuras más geniales del siglo XX. Von Neumann fue pionero en muchos campos de las matemáticas, algunos de ellos aplicados a la economía o a la informática. Sin embargo, el tema de las álgebras de operadores fue al que dedicó más tiempo a lo largo de su fructífera carrera científica. Característico de este área es su naturaleza interdisciplinar, que combina métodos algebraicos y analíticos, y que ha contribuido decisivamente al desarrollo del análisis funcional, del análisis armónico o de la teoría ergódica. Las álgebras de operadores proporcionan, además, un lenguaje natural para analizar matemáticamente procesos de la física cuántica.

Un álgebra de operadores $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un subálgebra de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} , donde para cualquier elemento $A \in \mathcal{A}$ se tiene que su adjunto A^* también está contenido en \mathcal{A} . Sobre esta estructura algebraica se imponen condiciones analíticas: llamamos C^* -álgebra a un álgebra de operadores que, además, es cerrada con respecto de la topología uniforme definida por la norma de operadores. Un álgebra de von Neumann es un álgebra de operadores cerrada con respecto a la topología débil de los operadores. Un ejemplo elemental de C^* -álgebra es el conjunto $C([0, 1])$ de funciones continuas sobre el intervalo $[0, 1]$ con la norma del supremo. Los elementos de este álgebra cumplen, entre otras cosas, la propiedad conmutativa. También es posible reconstruir, a partir de la estructura



Participantes en la Escuela de Matemáticas Lluís Santaló 2008.

analítico-algebraica de una C^* -álgebra conmutativa con unidad \mathcal{B} , un único espacio topológico compacto X tal que se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\mathcal{B} \cong C(X).$$

En general, una C^* -álgebra tiene propiedades análogas a este conjunto de funciones, aunque no necesariamente ha de cumplir la propiedad conmutativa. Se puede pensar por ello en las C^* -álgebras como la estructura asociada a «espacios topológicos no conmutativos». El prototipo de álgebra de von Neumann conmutativa es el conjunto $L^\infty(0, 1)$ de funciones medibles y esencialmente acotadas sobre el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue. Los elementos de $L^\infty(0, 1)$ (y en particular los de $C([0, 1])$) se interpretan como operadores de multiplicación en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$. Continuando con la analogía anterior, podemos considerar las álgebras de von Neumann generales como «espacios de medida no conmutativos». Por último, las álgebras de operadores ofrecen un marco natural para describir matemáticamente los operadores de impulso, P , y de posición, Q , de la mecánica cuántica, que no pueden conmutar ya que verifican las relaciones de Heisenberg

$$QP - PQ = i\hbar \mathbf{1},$$

donde \hbar es la constante de Planck, i es la raíz cuadrada de -1 y $\mathbf{1}$ es el operador identidad.

Las álgebras de operadores siguen siendo de gran actualidad en la investigación matemática, con ramificaciones en áreas emergentes como, por ejemplo, la geometría

no conmutativa, los grupos cuánticos localmente compactos o algunas facetas de la teoría cuántica de campos. La escuela ha desarrollado dos aspectos centrales de la teoría de álgebras de operadores: la Teoría K para C^* -álgebras y el programa de clasificación de Elliott, así como la Teoría Modular para álgebras de von Neumann y su aplicación en la teoría cuántica. Se han impartido también una serie de conferencias que mostraron la simbiosis entre los dos protagonistas del curso: las C^* -álgebras y las álgebras de von Neumann.

C^* -ÁLGEBRAS Y SU CLASIFICACIÓN

La clasificación de C^* -álgebras propuesta por George Elliott a finales de los 80 es un ambicioso programa que persigue capturar la naturaleza intrínseca de una clase muy amplia de C^* -álgebras a través de un invariante compuesto por elementos de Teoría K . Este programa ha tenido resultados espectaculares, como los Teoremas de Kirchberg-Phillips que clasificaron las C^* -álgebras nucleares, simples y puramente infinitas (usando los grupos K_0 y K_1 , que en este caso coinciden con el invariante propuesto por Elliott).

La Conjetura de Elliott, en toda su generalidad, ha sido refutada recientemente gracias a ejemplos debidos a M. Rørdam y A. S. Toms. Tales ejemplos muestran además que la tarea de ampliar el invariante de Elliott es ardua. Un ingrediente nuevo es el llamado semigrupo de Cuntz, una versión del monoide asociado a las proyecciones sobre matrices basado en los elementos positivos de las mismas. Este objeto ha demostrado su efectividad al distinguir los contraejemplos a la Conjetura de Elliott, y también porque ha sido usado en la clasificación de las llamadas álgebras de intervalo. De este modo se perfila como la herramienta que deberá utilizarse, en el futuro inmediato, incluso para abordar el caso de C^* -álgebras no simples. En la escuela hemos contado con la participación de N. P. Brown y A. S. Toms, ambos especialistas en el programa de Elliott.

ÁLGEBRAS DE VON NEUMANN Y TEORÍA MODULAR

La Teoría Modular surge de forma natural a partir del estudio sistemático de la relación entre un álgebra de von Neumann \mathcal{N} y su conmutante \mathcal{N}' en el caso de que \mathcal{N} y \mathcal{N}' tengan un vector cíclico común Ω . (Recordemos que el conmutante de $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es el conjunto de operadores lineales y acotados en \mathcal{H} que conmutan con todos los elementos de \mathcal{N} , y que $\Omega \in \mathcal{H}$ es cíclico con respecto a \mathcal{N} si el conjunto $\{N\Omega \mid N \in \mathcal{N}\}$ es denso en \mathcal{H} .) La Teoría Modular tiene su origen en dos trabajos inéditos de M. Tomita. En 1970, M. Takesaki publica por primera vez este material de forma coherente y contribuye decisivamente a su desarrollo.

LAS CUATRO SORPRESAS DE LA TEORÍA MODULAR

Alain Connes utilizó la Teoría Modular para avanzar decisivamente en la teoría de clasificación de las álgebras de von Neumann; un proyecto que fue iniciado por el



Los organizadores de la Escuela de Matemáticas Lluís Santaló 2008. De izquierda a derecha: Pere Ara, Fernando Lledó y Francesc Perera.

mismo von Neumann. Por estos trabajos Connes fue galardonado con una Medalla Fields en 1982.

Además, la física matemática se ha beneficiado en varias ocasiones de esta teoría. Por ejemplo, el grupo de automorfismos modular cumple, de forma a priori inesperada, la condición de analiticidad que en física teórica se utilizaba para caracterizar estados de equilibrio en el marco de la mecánica estadística para sistemas cuánticos (estados KMS).

A finales de los años 70 se halló también una estrecha relación entre el grupo de automorfismos modular y ciertas representaciones del grupo de Poincaré, que es el grupo de simetría de la relatividad especial. Además, el operador que implementa el producto de operaciones de simetría como la paridad, la conjugación de carga y la inversión temporal en algunas teorías cuánticas de campos está relacionado con la conjugación modular (estos resultados llevan el nombre de Teorema de Bisognano-Wichmann).

Recientemente, R. Brunetti, D. Guido y R. Longo, entre otros, han descubierto un método para localizar de manera intrínseca una teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo utilizando métodos sugeridos por la Teoría Modular. Una parte de este programa ha sido presentado en el curso por D. Guido.

CONCLUSIONES

La Escuela de Matemáticas Lluís Santaló ha reunido este año a jóvenes investigadores de doce países que tienen un interés común por este tema. Hay varios motivos que justifican el éxito de esta escuela. Uno de ellos ha sido que se desarrollara dentro del marco de actividades de la UIMP, coincidiendo con su 75 aniversario. También consideramos que la elección del tema, mestizo por definición, ha contribuido a la hora de atraer a estudiantes y jóvenes investigadores de diferentes áreas de las matemáticas y de la física matemática. Para organizadores y participantes la escuela ha sido una experiencia única.

Concluimos con algunas referencias básicas a partir de las cuales se pueden profundizar los aspectos mencionados anteriormente.

REFERENCIAS

- [1] P. ARA, F. LLEDÓ Y F. PERERA (EDS.), *Proceedings of the School of Mathematics Lluís Santaló 2008: Aspects of Operator Algebras and Applications*, Contemporary Mathematics, edición conjunta AMS-RSME, en preparación.
- [2] H. BAUMGÄRTEL, *Operatoralgebraic Methods in Quantum Field Theory. A Series of Lectures*, Wiley VCH, Berlin, 1995.
- [3] B. BLACKADAR, *K-Theory for Operator Algebras*, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [4] A. CONNES ET AL. (EDS.), *Noncommutative Geometry*, Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [5] K. R. DAVIDSON, *C*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
- [6] R. S. DORAN (ED.), *C*-Algebras: 1943–1993. A Fifty Year Celebration*, Contemporary Mathematics, Vol. 167, American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [7] P. A. FILLMORE, *A User's Guide to Operator Algebras*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1996.
- [8] R. V. KADISON Y J. R. RINGROSE, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vols. I and II*, American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [9] R. HAAG, *Local Quantum Physics*, Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [10] J. VON NEUMANN, *Collected Works. Vol. III: Rings of Operators*, Pergamon Press, New York, 1961.
- [11] M. RØRDAM, *Classifications of Nuclear C*-Algebras*, Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [12] M. RØRDAM, F. LARSEN Y N. LAUSTSEN, *An Introduction to K-theory for C*-Algebras*, London Mathematical Society Student Texts, 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [13] S. STRĂTILĂ, *Modular Theory in Operator Algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1981.

- [14] V. S. SUNDER, *An Invitation to von Neumann Algebras*, Springer, New York, 1987.
- [15] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebras. Vols. I, II and III*, Springer Verlag, Berlin, 2002, 2003.
- [16] N. E. WEGGE-OLSEN, *K-Theory and C*-Algebras*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1994.

PERE ARA Y FRANCESC PERERA, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, 08193 BELLATERRA (BARCELONA)

Correo electrónico: para@mat.uab.cat, perera@mat.uab.cat

FERNANDO LLEDÓ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III MADRID, AVDA. DE LA UNIVERSIDAD 30, 28911 LEGANÉS (MADRID) Y INSTITUTE FOR PURE AND APPLIED MATHEMATICS, RWTH-AACHEN UNIVERSITY, TEMPLERGRABEN 55, 52062 AACHEN, ALEMANIA

Correo electrónico: flledo@math.uc3m.es, lledo@iram.rwth-aachen.de

Página web: <http://www.iram.rwth-aachen.de/~lledo>

Mi experiencia en la Escuela Lluís Santaló*

por

Manuel Jaén Escolástico

La Universidad Internacional Menéndez Pelayo (en adelante UIMP) incluye, en su programación académica estival, cuestiones de la mayor actualidad y calidad científicas en cualquiera de las áreas del conocimiento. En particular, dentro de una amplia oferta de cursos y seminarios, la UIMP organiza, desde hace ya varios años, la Escuela de Matemáticas «Lluís Santaló», de cuya propuesta científica se encarga la Real Sociedad Matemática Española. Este verano 2008, la Escuela ha presentado el curso *Aspects of operator algebras and applications*, dirigido por el catedrático de Álgebra de la Universitat Autònoma de Barcelona Pere Ara Bertrán.

Como alumno de primer curso de la licenciatura de Matemáticas en la Universitat de València, al recibir el programa general de los cursos de la UIMP busqué

*Esta breve nota ha llegado a la redacción de *La Gaceta* por una vía indirecta. Como él mismo señala, su autor —que acaba de cursar primero de carrera— resultaba singular entre los participantes en la Escuela Lluís Santaló, en su inmensa mayoría estudiantes de doctorado o profesores universitarios. Sin embargo, a la vista de la espontaneidad y el entusiasmo con los que está escrita y del optimismo que destila, los organizadores de la Escuela y los directores de *La Gaceta* hemos acordado publicarla.

alguno cuyos contenidos estuviesen relacionados con la carrera que estudio, y encontré éste. Solicité una beca de matrícula para el curso sin muchas esperanzas de ser admitido, ya que el perfil del estudiante que asiste a esta Escuela es de alumnos de segundo ciclo o, incluso, posgraduados. Por eso, semanas después, me llevé una gran sorpresa al enterarme de que me habían concedido la beca completa. Fue entonces cuando empecé a indagar en los contenidos del curso: teoría de álgebras C^* y teoría modular para álgebras de von Neumann. Pude comprobar, pues, que el tema era muy específico y que quienes participaban en las ponencias llevaban mucho tiempo investigando en este campo. Al consultar a mi profesora de Álgebra acerca de los contenidos, me di cuenta de que yo no tenía, ni de lejos, la madurez académica necesaria para sacarle al curso todo el partido que, sin duda, éste tenía. No obstante, finalmente decidí aprovechar la beca, atraído por conocer el ambiente de trabajo en el que me gustaría moverme en el futuro. No negaré, eso sí, que me producía un cierto temor el pensar que, una vez allí, no entendería prácticamente nada de lo que se iba a decir y que, quizá, me vería en el brete de tener que justificar mi supina ignorancia de algún modo.

En efecto, aunque me gustaría, en lo que se refiere a lo estrictamente académico, no puedo decir que obtuviese mucho rendimiento del curso. Los contenidos eran muy específicos y de un nivel inaccesible para mí. Además, el hecho de que la lengua vehicular fuese el inglés hacía que, en ocasiones, estuviese más pendiente de traducir lo que se decía que de intentar entender, o más bien intuir, los conceptos. A pesar de esto, la valoración que ahora hago de esta experiencia no puede ser más positiva. Me resultó muy interesante e ilustrativo ver desde dentro cómo son este tipo de encuentros, cómo los ponentes exponían los resultados a los que ellos mismos habían llegado en sus investigaciones, y cómo los ponían en común con sus colegas, que tomaban notas y hacían preguntas como si fuesen alumnos. Era gracioso ver cómo se puntualizaban unos a otros con intervenciones del tipo «¿es un *si* y *sólo si*, verdad?» o «¿No debería ser *para todo* en lugar de *para algún*?». También fue para mí muy enriquecedor la cantidad de gente que conocí, la mayoría procedente de otros países de Europa y América, y todos, por supuesto, con la carrera ya casi acabada o preparando su tesis doctoral. Aproveché la oportunidad para hablar con ellos acerca de algunos aspectos de sus estudios y para escuchar sus experiencias de cuando estudiaban los primeros cursos en la facultad. Fue, en concreto, muy interesante comparar las diferencias que se dan entre las universidades de distintos países a la hora de promover o subvencionar los trabajos de investigación en esta suerte de ciencias.

Para concluir, no puedo menos que decir que esta experiencia me ha resultado de lo más fructífera, aunque no sea desde el punto de vista rigurosamente académico, y expresar mi opinión de que sería bueno que hubiera un mayor número de cursos de este tipo, o acaso, de carácter algo menos específico y más divulgativo.

MANUEL JAÉN ESCOLÁSTICO (ESTUDIANTE), FACULTAT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Correo electrónico: majaes@alumni.uv.es