Emmy Noether: innovación y creatividad en Ciencia

por

José F. Cariñena

1. Introducción

Difícilmente podría haber adivinado Max Noether el 23 de marzo de 1882, día del nacimiento de su hija Amalie Emmy Noether, que ésta iba a llegar a ser reconocida como una de las más destacadas matemáticas de la Historia. Los condicionamientos sociales de su época no permitían ni siquiera atisbar que una mujer pudiera llegar a realizar tan importantes contribuciones a la ciencia, no sólo a la matemática, sino también en su aplicación inmediata a la Física. Y todo ello teniendo que superar innumerables dificultades, algunas de ellas debido a su pertenencia al sexo femenino, pero también otras a causa de sus ascendientes judíos, no olvidemos que parte de su vida coincidió con el advenimiento del Nacional Socialismo y que su propio bisabuelo Elias había sido obligado a cambiar su apellido original, Samuel, por el de Noether, afectado, en el estado alemán de Baden, por el Edicto de Tolerancia de 1809.

M. Noether

E. Noether

Otras dificultades fueron simplemente por su carácter pacifista, lo que le proporcionó algunos enemigos en una vida desarrollada en su mayor parte en la Alemania tan conflictiva del período comprendido entre las dos guerras mundiales.

Enseguida demostró Emmy su independencia de pensamiento y que no se iba a resignar con el destino que aparentemente le estaba reservado. Así, tras una infancia en la que siguió las pautas que la sociedad de aquellos tiempos establecía para las jóvenes de su clase social, media alta, y renunciando a ejercer como profesora de idiomas, tarea para la que en un principio se había preparado, Emmy Noether decide emprender estudios en Matemáticas, sin duda consciente de todas las dificultades que tal propósito entrañaba en aquella época. Los condicionantes anteriormente mencionados, aunque abundantes e importantes, no consiguieron impedirle el desarrollo de su carrera científica, llegando finalmente a ser reconocida como una autoridad en su campo. Muchas de estas dificultades son resumidas en la sección introductoria de [1] y de forma más extensa en [2] y [3].

También disfrutó de unos extraordinarios maestros que le ayudaron mucho en su formación, Minkowski, Blumenthal y Klein, entre otros, y mereció el apoyo casi incondicional de las personas más capacitadas de sus tiempos, como es el caso de Hilbert, quien junto con Riemann puede considerarse el sucesor de Gauss, quizás el mejor matemático de la historia. Pero fue, sin duda, su coraje y perseverancia en el trabajo y su creatividad las características que le permitieron llevar a cabo la revolución conceptual que tras sus 53 años de vida nos legó. Rompe así con una tradición, hasta el siglo XVIII, en la que la participación de la mujer en el desarrollo de la Ciencia había sido casi testimonial. Con el advenimiento de la Revolución Industrial la situación empieza a cambiar. Emmy Noether es una de las cuatro mujeres elegidas en [4] como las más representativas por su contribución, junto con C. Herschel, S. Kowalevskaya y L. Meitner (creo que también debería incluirse en esa lista a M. Curie). Es, por tanto, Emmy Noether un claro ejemplo del conjunto de mujeres a las que su amor a la Ciencia les capacitó para vencer todas las dificultades que les impedían colaborar en su desarrollo [5].

El triunfo de la revolución emprendida por Hitler interrumpe todo el progreso que se venía produciendo en Alemania desde el Renacimiento. Una victima concreta es precisamente la Escuela de Álgebra que Emmy Noether había formado. Los nazis no querían que hubiera “ciencia judía” en las Universidades alemanas y expulsaron, por decreto, a todos los judíos de sus puestos académicos. Cuando no pudo seguir prestando sus enseñanzas en Alemania, por la llegada al poder de los nazis, se trasladó a Estados Unidos de América, donde encontró unas grandes diferencias respecto del tipo de enseñanza hasta entonces por ella conocido. En Bryn Mawr, cerca de Filadelfia, tenía como colegas a otras mujeres y además disfrutaba de un nombramiento en toda regla, como el de los demás profesores [6]. Lamentablemente, no pudo disfrutar mucho tiempo de esta situación, porque el 14 de abril de 1935, cuando se encontraba en el punto más alto de su potencial creativo, fallece como consecuencia de una complicación en el postoperatorio de un tumor en el útero [4]. Al parecer, ninguno de sus alumnos y allegados conocía la existencia de tal enfermedad.

Su estilo docente ha sido siempre considerado como difícil. Realmente sus lecciones no eran muy buenas en algunos aspectos técnicos. Por ejemplo, en sus clases en Bryn Mawr durante los últimos años de su vida, cambiaba súbitamente de idioma. Si bien sus lecciones resultaban más bien erráticas y un poco descuidadas en su preparación, compensaba sobradamente su falta de capacidad docente con su generosidad a la hora de compartir ideas y con el cariño especial que mostraba con sus alumnos, a los que consideraba como de su familia. Así conquistaba a sus alumnos que pasaban a ser sus leales seguidores y así, en torno a ella, se formó en Gotinga un grupo de jovenes bulliciosos y con un especial talento, que era conocido como los "Noether boys". Muchos de ellos llegaron a despuntar como excelentes matemáticos.

Aunque es fundamentalmente conocida por los matemáticos por sus resultados en la teoría de anillos, el verdadero cambio que nos aportó es en la propia forma de cómo se deben plantear los problemas y cómo se debe pensar para resolverlos. En palabras de su colega P.S. Alexandrov, ella siempre pensaba en términos muy simples, pero muy generales, y nunca en cálculos algebraicos complicados. De esta forma nos mostró una senda hacia el descubrimiento de nuevos patrones de razonamiento que habían permanecido en total obscuridad hasta ese momento.

Su labor investigadora y sus ideas no se pueden encontrar sólo en sus publicaciones, sino también en las de sus colaboradores y colegas, sobre los que ejercía una importante influencia, mostrándose como un faro que iluminaba, sembraba, corregía y estimulaba.

2. Leyes de conservación en Física

Desde el mismo momento del descubrimiento de la existencia de cantidades conservadas y de su utilidad en la resolución de problemas concretos, se dedicaron múltiples esfuerzos por parte de todos los físicos a la búsqueda de una explicación de las posibles causas que las motivaran, de forma que su existencia pudiera ser derivada de un principio más general.

Emmy Noether es la responsable de la forma más actual de aproximarse al problema, que se expresa generalmente diciendo que es precisamente la simetría la que da lugar a dichas leyes de conservación, al menos cuando el sistema físico está regido por una ley que proviene de un criterio variacional, es decir, que las soluciones sean aquellas para las que el funcional de acción sea extremal, y es a este principio general al que se alude como Teorema de Noether. Precisaremos posteriormente este hecho, indicando cómo puede, en ciertos casos, asociarse una ley de conservación con la invariancia bajo un subgrupo uniparamétrico de transformaciones de simetría. De forma más específica, subgrupos uniparamétricos de ciertas transformaciones de simetría de la función Lagrangiano o Hamiltoniano, dan lugar a cantidades conservadas tales como el momento lineal, el momento angular, o la propia energía.

Si bien es cierto que esta afirmación requiere una mayor precisión, no se puede dudar de la economía de conceptos, de la elegancia de la presentación y, sobre todo, de la demostrada fertilidad de tal principio de simetría como método de obtención rápida de resultados concretos. Recíprocamente, tal principio general también puede ser utilizado como guía en la búsqueda de las propias leyes de evolución. Efectivamente, tal principio juega un papel fundamental en el establecimiento de modelos para un problema específico cuando se complementa con el llamado principio de Curie, según el cual *la simetría del efecto no puede ser menor que la de la causa que lo produce*. Así, cuando se pretende explicar un fenómeno como producido por una causa o ley física, este principio de Curie nos indica que la existencia de una simetría en los resultados experimentales nos puede dar pistas sobre la forma concreta de estas leyes, eliminando otras como imposibles, es decir, imponiendo restricciones sobre las posibles leyes.

Un precedente importante de la teoría de la simetría en relación con las leyes de conservación puede encontrarse en la fundamentación de la Mecánica llevada a cabo por Leibniz hacia el final del siglo XVII. Estaba basada en argumentos de los que ahora reconocemos como principios de simetría: simetría de homogeneidad del espacio-tiempo, basado en el principio metafísico de *razón suficiente*, por un lado, leyes de conservación como de las fuerzas vivas (*vis viva*), con el que pretendía evitar la existencia de un *móvil perpetuo*, por otro, y finalmente, el principio variacional de mínima acción, que precedió a los trabajos de Maupertuis y Euler.

De cualquier forma, lo que es interesante resaltar es que la misma posibilidad de hacer ciencia está basada en un principio de simetría, ya que la posibilidad de establecer leyes dinámicas está relacionada con la irrelevancia del lugar donde se realice el experimento y del momento en que tenga lugar, es decir, admitimos implícitamente una simetría bajo traslaciones espacio-temporales, por lo que como E.P. Wigner [7] señaló, esta simetría debe considerarse como la primera ley de invariancia en física.

Los grupos de transformaciones que dependen de varios parámetros en forma continua, fueron introducidos por S. Lie (1842-99) para el estudio de simetrías de sistemas de ecuaciones diferenciales con el objetivo de caracterizar cuándo dichas ecuaciones diferenciales pueden resolverse mediante cuadraturas. En la aproximación geométrica las ecuaciones diferenciales son descritas por campos vectoriales, siendo sus simetrías precisamente las del campo vectorial correspondiente. La contribución de Emmy Noether fue establecer que en el caso particular en que las ecuaciones diferenciales son las que provienen de un problema variacional, podemos hacer corresponder constantes del movimiento a cada uno de los subgrupos uniparamétricos, las simetrías infinitesimales, de un grupo de Lie de simetría de la función densidad que define la acción, como precisaremos a continuación.

3. El Primer Teorema de Noether

En la reunión de la Real Sociedad de las Ciencias de Gotinga, Felix Klein presentó el 7 de julio de 1918 el artículo de Emmy Noether [8, 9]. Puede considerarse como uno de los pilares básicos sobre los que reposa la relación entre simetría y leyes de conservación.

Aunque los dos Teoremas de Noether que allí se incluyen, que relacionan simetrías con leyes de conservación, fueron derivados en el marco de la que se conoce como Teoría de Campos, y por tanto hacen referencia a cantidades conservadas cuando la evolución del sistema está descrito por una ecuación en derivadas parciales, preferimos presentarlos primero de una forma más sencilla, válida para ecuaciones diferenciales ordinarias y para sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad.

Describamos brevemente el contenido del primero de los dos Teorema de Noether. Es bien conocido que la evolución de un sistema mecánico viene descrita por un sistema de ecuaciones de segundo orden, lo que a menudo se conoce como Segunda Ley de Newton. En ocasiones, lo que precisamente se conoce como Problema inverso de la mecánica, dichas ecuaciones son precisamente las ecuaciones de Euler que aparecen al determinar las curvas que hacen extremal, con respecto al conjunto de curvas con extremos fijos, un funcional, que recibe el nombre de acción, de la forma

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\ dt\ ,$$

13. Invariante Variationsprobleme

Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 235–257

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918 1).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen 2). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

donde, a menudo, por ejemplo para sistemas conservativos de N partículas, la función Lagrangiano L viene dada por

$$L(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\dots,\dot{\vec{x}}_N) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m\,\dot{\vec{x}}_a{}^2 - V(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)\ ,$$

siendo V el potencial que describe las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Las curvas que hacen extremal la acción son soluciones del sistema de ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_a^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\right) = 0\,, \qquad i = 1,2,3,\ a = 1,\dots,N\,.$$

La ventaja de esta formulación es que es válida para todo tipo de coordenadas, q^α, lo que nos sirve para incorporar de manera sencilla las ligaduras a las que el sistema pueda estar sometido. Esto se consigue introduciendo coordenadas apropiadas que están adaptadas a las ligaduras. Podemos entonces obviar las ecuaciones correspondientes a las coordenadas asociadas a las ligaduras y quedarnos con las restantes n ecuaciones, que en estas coordenadas generalizadas serán

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right), \qquad \alpha = 1, \dots, n\,.$$

Cuando desarrollamos esta expresión obtenemos

$$\sum_{\beta=1}^{n} W_{\alpha\beta}\,\ddot q^\beta = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\beta}\dot q^\beta, \qquad \alpha = 1, \dots, n,$$

donde

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\ .$$

Si la matriz $W(q, \dot q)$ es invertible podremos despejar en dichas ecuaciones las derivadas de orden superior, de forma que si denotamos M a la matriz inversa de W, las ecuaciones de Euler–Lagrange se podrán escribir como un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma normal:

$$\ddot q^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} M^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial q^\gamma}\dot q^\gamma\right), \qquad \alpha = 1, \dots, n\,.$$

En este caso se dice que el Lagrangiano L es regular. En el extremo opuesto se encuentra el caso en que el Lagrangiano es de la forma

$$L_0(q, \dot q) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\,\dot q^\alpha\ ,$$

siendo f una función arbitraria de las coordenadas q^α, que conduce a ecuaciones triviales. Es claro que así debía ser, pues siendo L_0 la derivada total de la función f, la integral de acción se reduce, para cualquier camino, a la diferencia de los valores de la función f en sus extremos. Obviamente, esto significa que dos Lagrangianos que difieran en uno de esta forma, L_0, producen las mismas ecuaciones del movimiento, y se suele decir que son equivalentes *gauge*.

Para establecer el primer Teorema, en este ámbito de la mecánica clásica de sistemas con un número finito de grados de libertad, comencemos fijando las notaciones. Consideremos un subgrupo uniparamétrico de transformaciones dependientes de un parámetro ϵ,

$${q'}^\alpha(\epsilon) = \phi^\alpha(q, \epsilon)\,,$$

con $\phi^\alpha(q,0) = q^\alpha$. En forma infinitesimal se escribirá como

$$q'^\alpha(\epsilon) = q^\alpha + \epsilon\,\xi^\alpha(q) + \vartheta(\epsilon^2)\,,$$

siendo $\vartheta(\epsilon^2)$ un infinitésimo de orden ϵ^2 y

$$\xi^\alpha = \left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\epsilon}\right)_{|\epsilon=0}\,.$$

Dicha transformación induce la correspondiente expresión para la transformación de las velocidades generalizadas, $\dot q^\alpha$,

$$\dot q'^\alpha(\epsilon) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial\phi^{\,\alpha}}{\partial q^\beta}\,\dot q^\beta = \dot\phi^\alpha(q,\dot q,\epsilon)\,,$$

y que, para una transformación infinitesimal, es

$$\dot q'^\alpha(\epsilon) = \dot q^\alpha + \epsilon\,\frac{d\xi^\alpha}{dt} + \vartheta(\epsilon^2)\,.$$

Diremos que dicho subgrupo uniparamétrico de transformaciones es de simetría para el Lagrangiano L si el transformado de éste, L'_ϵ, coincide con L para todo valor de ϵ; es decir, $L(\phi^\alpha(q,\epsilon),\dot\phi^\alpha(q,\dot q,\epsilon)) = L(q^\alpha,\dot q^\alpha)$.

El resultado obtenido por Noether es el siguiente [10]:
Teorema: *Para cada subgrupo uniparamétrico de transformaciones como el dado anteriormente que sea de simetría del Lagrangiano L que describe el sistema, existe una constante del movimiento para él que está dada por*

$$C = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial\dot q^\alpha}\;\xi^\alpha(q)\;.$$

Como un primer ejemplo que ilustra esta situación, así como nos relaciona determinados grupos de simetría con variables dinámicas ya conocidas, podemos considerar un sistema de una partícula en $\mathbb{R}^3$ descrito por un Lagrangiano que es invariante bajo traslaciones en una dirección dada por el vector $\vec n$, es decir, es invariante bajo

$$\vec x\,' = \vec x + \epsilon\,\vec n\,, \qquad \dot{\vec x}\,' = \dot{\vec x}\,.$$

Entonces, $\xi^a = n^a$, para $a = 1,2,3$, por lo que la constante del movimiento que encontramos es

$$C = \sum_{a=1}^{3} n^a\,\frac{\partial L}{\partial\dot x^a}\;,$$

es decir, la cantidad conservada correspondiente es la componente del momento lineal en la dirección del vector $\vec{n}$. Como consecuencia, si el Lagrangiano es invariante bajo traslaciones a lo largo de una dirección, entonces, la componente del momento lineal en esa dirección es una constante del movimiento.

Como un segundo ejemplo, sea L un Lagrangiano que es invariante bajo rotaciones en torno a la dirección del eje determinado por el vector $\vec{n}$. Una transformación infinitesimal estará dada por

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \epsilon\,\vec{n} \times \vec{x}\,, \qquad \dot{\vec{x}}\,' = \dot{\vec{x}} + \epsilon\,\vec{n} \times \dot{\vec{x}}\,.$$

Entonces, $\xi^a = \sum_{b,c=1}^{3} \varepsilon^{abc} n^b x^c$, donde ε^{abc} denota el tensor completamente antisimétrico de Levi–Civita, determinado por $\varepsilon^{abc} = 1$ si abc es una permutación par de los números (1,2,3), -1 si es impar y 0 si hay índices repetidos. De otro modo, $\vec{\xi} = \vec{n} \times \vec{x}$, por lo que la constante del movimiento asociada es

$$\sum_{a=1}^{3} \varepsilon^{abc}\, n^b x^c \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \vec{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})\ ,$$

es decir, es la componente del momento angular en la dirección del vector $\vec{n}$. Por consiguiente, si el Lagrangiano es invariante bajo rotaciones en torno a un eje, entonces la componente del momento angular en la dirección de dicho eje de rotación es una constante del movimiento.

Las condiciones del Teorema se pueden generalizar, por ejemplo permitiendo cambios en la variable t. Así, la invariancia bajo traslaciones temporales lleva a la conservación de la función energía,

$$E_L = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}^\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L\ .$$

También se puede generalizar el Teorema al caso en que la función L no sea invariante, sino que se transforme en otra equivalente a ella, es decir, la nueva función Lagrangiano difiere de la original en una L_0 de la forma anteriormente mencionada, apareciendo un término adicional en la correspondiente expresión de la constante del movimiento [11]. Un Teorema análogo es válido en Teorías de Campos, como veremos enseguida, y es en esa forma como lo propuso Emmy Noether.

La primera pregunta que uno puede plantearse es si toda constante del movimiento aparece asociada a un tal subgrupo uniparamétrico de transformaciones de simetría del Lagrangiano. La respuesta es que no, si no se consideran transformaciones más generales [12]. Incluso el teorema admite una generalización para el caso de Lagrangianos singulares, pero teniendo ahora un poco de precaución, porque en este caso la dinámica no está perfectamente determinada [13].

Es frecuente entre los físicos la utilización de una formulación alternativa, que recibe el nombre de formulación Hamiltoniana de la Mecánica. Está basada en que, cuando el Lagrangiano es regular, se pueden reemplazar las variables velocidades generalizadas por los correspondientes momentos $p_\alpha = \partial L/\partial\dot{q}^\alpha$, relación que se puede invertir como consecuencia de la hipótesis de regularidad del Lagrangiano, y la función L por el Hamiltoniano H, que no es sino la expresión de la energía E_L en términos de las coordenadas y los momentos. Las ecuaciones obtenidas al çreescribir las ecuaciones de Euler en términos de las nuevas variables son las llamadas ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, n\,.$$

Las transformaciones de coordenadas $q'^\alpha(\epsilon) = \phi^\alpha(q, \epsilon)$, junto con las transformaciones de los momentos correspondientes a los cambios de velocidades,

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} p'_\beta \,\frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha}\,, \qquad\qquad \alpha = 1, \ldots, n\,,$$

transformaciones que reciben el nombre de transformaciones puntuales, son tales que los subgrupos uniparamétricos de tales transformaciones que sean de simetría de H tienen asociadas constantes del movimiento. Las transformaciones puntuales indicadas preservan la forma de las ecuaciones del movimiento, para cualquier función H. Existen transformaciones más generales que las puntuales pero que poseen esta propiedad de que preservan la forma de las ecuaciones del movimiento. Reciben el nombre de transformaciones canónicas y lo que se conoce como Teorema de Noether en el formalismo Hamiltoniano establece precisamente la correspondencia biunívoca entre constantes del movimiento y subgrupos uniparamétricos de transformaciones canónicas que son de simetría del Hamiltoniano.

El hecho de que en el formalismo Hamiltoniano la correspondencia sea biunívoca es una diferencia esencial con el caso Lagrangiano, formalismo en el que uno puede encontrar constantes del movimiento que no se pueden derivar de simetrías del Lagrangiano. Este tipo de simetrías, que son sólo claras en el formalismo Hamiltoniano, suelen recibir el nombre de simetrías ocultas. Para poder establecer una correspondencia biunívoca en este formalismo se debe generalizar el concepto de simetría [12], generalización que se puede llevar a cabo incluso para Lagrangianos que contienen derivadas de orden superior, y que por consiguiente dan lugar a sistemas de ecuaciones que no son de segundo orden, sino superior [14]. También es posible encontrar constantes del movimiento por procedimientos alternativos, como puede ser la existencia de dos Lagrangianos disequivalentes *gauge* pero que conducen a ecuaciones del movimiento con el mismo conjunto de soluciones [15].

Precisemos ahora el resultado del primer Teorema en Teorías de Campos, tal y como lo presentó Emmy Noether. Comencemos introduciendo una serie de conceptos auxiliares para fijar la notación. Consideremos un conjunto de campos $\{\psi^\alpha(x) \mid \alpha = 1, \dots, m\}$, descritos por una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\psi^\alpha(x), \psi^\alpha{}_{,\mu}(x))$, que es función de las variables del campo ψ^α y de sus derivadas primeras $\partial_\mu \psi^\alpha \equiv \partial\psi^\alpha(x)/\partial x^\mu \equiv \psi^\alpha{}_{,\mu}(x)$, con $x = (x^1, x^2, x^3, x^0)$, con $x^0 = t$, de forma que el Lagrangiano del campo viene determinado por

$$L(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\, \mathcal{L}(\psi^\alpha(x), \psi^\alpha{}_{,\mu}(x)) \ ,$$

y la acción viene definida por

$$A = \int_{x_1^0}^{x_2^0} L(x^0)\, dx^0 = \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^4x\, \mathcal{L}(\psi^\alpha(x), \psi^\alpha{}_{,\mu}(x)) \ ,$$

por lo que las ecuaciones que hacen extremal el valor del funcional, entre las funciones que se anulan en la frontera (en este caso tienden a cero en el infinito), son las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$E_\alpha(\psi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha{}_{,\mu}}\right) = 0 \ .$$

También existen densidades Lagrangianas que producen ecuaciones de Euler–Lagrange triviales. Así, si $\mathcal{L}_0$ es la divergencia de un campo vectorial, entonces las ecuaciones de Euler–Lagrange de $\mathcal{L}_0$ se satisfacen idénticamente. Obviamente, esto es una consecuencia directa del Teorema de Gauss. Como en el caso de un número finito de grados de libertad, cuando dos densidades Lagrangianas difieren en una densidad de la forma $\mathcal{L}_0$, producen las mismas ecuaciones de Euler–Lagrange y diremos que son equivalentes *gauge*.

Bajo las variaciones infinitesimales

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \ , \quad \psi'^\alpha = \psi^\alpha + \delta\psi^\alpha = \psi^\alpha + \bar{\delta}\psi^\alpha + \partial_\mu \psi^\alpha\ \delta x^\mu \ ,$$

puede verse que la variación de la acción es [16]

$$\delta A = \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^4x \left[E_\alpha(\psi)\, \bar{\delta}\psi^\alpha + \partial_\mu B^\mu(x, \psi, \partial\psi, \delta x, \delta\psi)\right] \ ,$$

donde las funciones B_μ son lineales en δx^μ y $\delta\psi^\alpha$.

El resultado obtenido por Noether es el siguiente:

Teorema: *Si la integral de acción A es invariante bajo el grupo de Lie de dimensión r de transformaciones*

$$x'^\mu = f^\mu(x, \psi, a_1, \dots, a_r) \ , \qquad \psi'^\alpha = F^\alpha(x, \psi, a_1, \dots, a_r) \ ,$$

entonces, existen r corrientes

$$j^\mu_k = T^\mu{}_\nu \, X^\nu{}_k(x,\psi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha{}_{,\mu}} \, Z^\alpha{}_k(x,\psi) \,, \qquad k = 1, \ldots, r \,,$$

que son conservadas, es decir, $\partial_\mu j^\mu_k = 0$, donde

$$X^\nu{}_k(x,\psi) = \left(\frac{\partial f^\nu}{\partial a_k}\right)_{|a=0} \,, \qquad Z^\alpha{}_k(x,\psi) = \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial a_k}\right)_{|a=0} \,,$$

y siendo

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha{}_{,\mu}} \, \psi^\alpha{}_{,\nu} - \mathcal{L} \, g^\mu{}_\nu \,.$$

Las constantes del movimiento obtenidas, suponiendo condiciones de frontera apropiadas para los campos ψ^α, que reciben el nombre de cargas, no son sino

$$Q_k(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \; j^0_k(\psi^\alpha(x), \psi^\alpha{}_{,\mu}(x)) \,,$$

En el Teorema anterior, $g^\mu{}_\nu$ es el tensor métrico del espacio de Minkowski, que se usa para relacionar tensores contravariantes con los correspondientes covariantes, lo que coloquialmente se llama subir y bajar índices.

Como un ejemplo, consideremos el campo escalar neutro descrito por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + m^2 \, \phi^2\right) \,.$$

Una traslación infinitesimal en el espacio tiempo, $x'^\mu \approx x^\mu + g^\mu{}_\nu \, \delta a^\nu$ induce una transformación en los campos de forma que $\phi'^\alpha(x') = \phi^\alpha(x)$, de modo que la correspondiente corriente $J^{\mu\nu}$ será

$$J^{\mu\nu} = -\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_{\;,\mu}} \, \phi^{\alpha,\nu} + \mathcal{L} \; g^{\mu\nu} \,.$$

Es consecuencia del Teorema que, como la acción es invariante bajo el grupo de traslaciones, las correspondientes cargas, es decir, las cantidades

$$P^\lambda = \int_{t=t_0} J^{0\lambda} \; d^3\vec{x} \,, \qquad \lambda = 1, 2, 3, 0,$$

son constantes del movimiento.

En ocasiones se consideran grupos internos que sólo afectan a los campos ψ^α sin afectar a las coordenadas espacio-temporales. Estas transformaciones se denominan transformaciones de *gauge* globales o rígidas.

Como un nuevo ejemplo podemos considerar el campo escalar cargado descrito por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\left[\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* + m^2\,\phi^*\phi\right]\,,$$

donde ϕ^* es el campo complejo conjugado del ϕ. El campo complejo ϕ es como dos campos escalares reales independientes ϕ_1 y ϕ_2, que son su parte real y su parte imaginaria, $\phi = \phi_1 + \phi_2$. La densidad Lagrangiana considerada es invariante bajo el cambio

$$\phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x)\,, \qquad \phi^{*\prime}(x) = e^{-i\theta}\phi^*(x)\,,$$

siendo θ un número real, por lo que el Teorema nos proporciona la corriente conservada

$$J_\mu = i\left(\phi^*\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \phi\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x^\mu}\right)\,.$$

4. El Segundo Teorema de Noether

No menos importante es el segundo de los Teoremas de Noether, aun cuando es mucho menos conocido para la mayoría de los físicos. Esto es quizás debido a que su formulación es casi exclusivamente para Teorías de Campos. Para sistemas con un número finito de grados de libertad, se necesita utilizar la formulación dependiente del tiempo [17]. Con ella es posible presentar en forma geométrica una versión del resultado del llamado Segundo Teorema de Noether [18]. Una aplicación reciente se puede encontrar en [19].

El Primer Teorema era de interés cuando se consideraba un grupo de Lie de transformaciones de dimensión finita, que puede ser de transformaciones espacio-tiempo, como es el caso de $SO(3,\mathbb{R})$ y el grupo de Lorentz, o bien de transformaciones internas, de *gauge* global, que transforman los campos pero no las coordenadas.

Por su parte, el segundo Teorema se aplica cuando el conjunto de transformaciones de simetría que consideramos no es un grupo de Lie de dimensión finita, sino infinito-dimensional, como puede ser el grupo de transformación general de coordenadas. Más concretamente, el Segundo Teorema establece que si existe un subgrupo de transformaciones de invariancia que dependen de unas funciones arbitrarias y sus derivadas, que se suelen llamar transformaciones de *gauge* locales, entonces existen relaciones entre las ecuaciones de Euler-Lagrange que aparecen. Dicho de otra forma, el Lagrangiano que describe el sistema es singular. Por ejemplo, en el caso de la Relatividad General, utilizando el Lagrangiano de Einstein–Hilbert, la invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas conduce a una relación entre las ecuaciones de Euler-Lagrange que no son sino las identidades de Bianchi. En efecto, en el marco de la Relatividad General las componentes $g^{\mu\nu}$ del tensor métrico son las variables de campo gravitatorio y son incluídas como variables de campo en la densidad Lagrangiana de la teoría junto con el término adicional de Einstein–Hilbert, de forma que la acción viene dada por

$$A = \int d^4x \sqrt{-g}(\mathcal{L} - \gamma^{-1} R)$$

siendo g el determinante del tensor métrico. Las ecuaciones de Euler–Lagrange para este funcional conducen a las ecuaciones $R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu}\, R = -\gamma\, T_{\mu\nu}$, donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y R denota la curvatura escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Las relaciones entre ecuaciones que anuncia el Teorema Segundo de Noether resultan ser $(R^{\mu\nu} - (1/2)\, g^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$, es decir, es la divergencia covariante de $T^{\mu\nu}$, y no la divergencia habitual, la que se anula [20]. La ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ es la que se conoce como ley de conservación energía-momento en Relatividad.

Antes de finalizar esta sección formulemos de forma precisa el resultado del Segundo Teorema de Noether [10].

TEOREMA: *Si la integral de acción A es invariante bajo el conjunto de transformaciones infinitesimales que dependen de r funciones arbitrarias y sus derivadas sucesivas,*

$$\bar{\delta}\psi^\alpha = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_m=0}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_m=s_\rho} a^\alpha(x,\psi,\psi_{,\mu})_{\rho,\sigma_1,\dots,\sigma_m} \frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_m}}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\cdots\partial(x^m)^{\sigma_m}}\, g^\rho(x)\,,$$

entonces existen r identidades

$$\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_m=0}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_m=s_\rho} (-1)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_m} \frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_m}}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\cdots\partial(x^m)^{\sigma_m}} \left[a^\alpha(x,\psi,\psi_{,\mu})_{\rho,\sigma_1,\dots,\sigma_m} E_\alpha(\psi)\right] = 0$$

para $\rho = 1,\dots,r$, entre las n expresiones de Euler–Lagrange $E_\alpha(\psi)$.

Para un mayor conocimiento del significado del Segundo Teorema de Noether, remitimos al lector a [16] y [21].

La diferencia entre invariancia bajo transformaciones de gauge locales y globales es muy importante. A partir de un Lagrangiano que admite un grupo de invariancia de transformaciones de gauge globales, es posible obtener otro invariante bajo transformaciones de gauge locales con el mismo grupo mediante la introducción de campos compensadores que definen una nueva “derivada covariante”. Es ésta una forma que se puede utilizar para introducir interacciones, como se ha venido haciendo durante los últimos años, pero en la que aquí no profundizaremos. Este proceso que conduce a las teorías de campos gauge se denomina “principio de acoplamiento mínimo” y es el fundamento del principio gauge que es considerado como uno de los pilares básicos de la física fundamental a comienzos del siglo XXI.

5. La influencia y las repercusiones en Física del trabajo de Emmy Noether

Las contribuciones de Emmy Noether a la Ciencia pueden dividirse en dos categorías: una de ellas, de aplicación directa en el campo de la Física, con lo que desde hace tiempo se conoce como los dos Teoremas de Noether, y la otra, en Matemáticas, en la que estableció las bases para el desarrollo de la que calificamos como Álgebra Moderna, y que también ha tenido una gran influencia en la Física Teórica.

La mayor parte de los matemáticos conoce los trabajos de Emmy Noether en Teorías de anillos, ideales (concepto que ya había introducido Dedekind) y estructuras relacionadas, pero ignoran el contenido de los dos teoremas que son su contribución a la física, y aún sería mayor su sorpresa si llegaran a conocer la importancia de sus resultados en el desarrollo de la Física en el siglo pasado. Por ejemplo, P. Bergmann considera sus resultados como "la piedra angular de la Teoría de la Relatividad General y en ciertas teorías de partículas elementales" [22]. Y aunque es difícil encontrar una manera eficaz de contrastar la importancia de los desarrollos científicos, mencionemos que sólo el trabajo indicado [8] ha recibido muchas más citas que el resto de sus trabajos juntos [22]. Pero además, las técnicas y herramientas propias del Álgebra Moderna a cuyo desarrollo tanto contribuyó Emmy Noether, a partir de 1920, han tenido una gran repercusión en todos los campos de la Física, no restringiéndose sólo a las aplicaciones de la Teoría de la Simetría.

Paradójicamente, los resultados de los Teoremas del artículo de Emmy Noether de 1918 [8], de los que tanto su gran importancia como su repercusión se reconoce en los momentos actuales, fueron olvidados durante mucho tiempo, casi cuarenta años. En el libro clásico de Goldstein [23] se establece el Teorema sin atribuirlo a nadie en concreto. Fue citado por Pauli en su artículo sobre relatividad en la "Encyklopaedie der matematischen Wissenschaften" del año 1921, estudiado con bastante detenimiento en [24] y también en el superconocido libro de Courant y Hilbert [25]. Quizás la causa para que durante cierto tiempo no se apreciara su importancia radica en que los resultados no parecían tan interesantes en una época en la que se llegó incluso a dudar de la conservación de la energía al aparecer los primeros fenómenos de radioactividad.

Con el advenimiento de la Mecánica Cuántica quizás debieron recuperar el papel fundamental que luego han desempeñado. De hecho, Weyl usa el resultado del Segundo Teorema en el desarrollo de la Teoría de Dirac del electron. También es cierto que los dos Teoremas fueron formulados en un contexto Lagrangiano y que, sin embargo, la formulación Hamiltoniana era la preferida durante los primeros años de la Mecánica Cuántica. Es precisamente el uso de las propiedades de simetría la que da posteriormente prioridad al uso de formulaciones Lagrangianas. Este auge comienza precisamente hacia 1958 cuando, por una parte, la conservación de la energía es confirmada en [26] y casi inmediatamente aparece el bien conocido artículo sobre la teoría V-A para las interacciones débiles, en donde claramente se indica la relación entre corrientes conservadas y simetrías [27].

El propio Weyl [2] describe la contribución de Emmy Noether a la resolución de los dos problemas importantes de la Teoría de la Relatividad como "la formulación matemática genuina y universal: en primer lugar, la reducción del problema de los invariantes diferenciales a uno puramente algebraico mediante la introducción de coordenadas normales, y en segundo lugar, las identidades entre los miembros de la izquierda de las ecuaciones de Euler–Lagrange que aparecen cada vez que la integral de acción es invariante bajo un grupo de transformaciones que involucran funciones arbitrarias".

Los físicos vienen utilizando de forma un tanto confusa sus contribuciones, y realmente lo que más les cautivó desde un primer momento es la idea de que a cada transformación infinitesimal de invariancia se le pueda asociar una ley de conservación.

Gursey sugiere que los Teoremas de Noether son la clave para entender perfectamente la relación entre las leyes de conservación y las simetrías, quedando únicamente fuera de su marco los que hoy se conocen como "invariantes topológicos" y que corresponden a características globales, y no locales, de los modelos considerados. Es aquí donde la Geometría Diferencial y la Topología juegan un papel importante.

Puede ser que en un futuro la conservación de energía-momento, que era el problema que Hilbert quería entender bien y fue el motivo inicial del trabajo de Emmy Noether, no sea tan fundamental, por ejemplo si la simetría bajo difeomorfismos del espacio-tiempo no se mantiene a distancias muy cortas, pero desde luego los resultados de Emmy Noether sobre la relación entre simetría y leyes de conservación seguirán siendo fundamentales [5].

Queremos finalmente insistir en que otras contribuciones de Emmy Noether al desarrollo del Álgebra Moderna también son de gran aplicación en física y es frecuente encontrar en artículos de física cuestiones de grupos de Lie, relaciones de conmutación, anillos, cohomologías, representaciones y tantas y tantas otras herramientas matemáticas a las que Emmy Noether contribuyó de forma esencial.

6. El instituto de Matemáticas de Gotinga

Aunque es cierto que Gotinga había empezado a destacar en el mundo de las matemáticas cuando Gauss se desplazó alli para trabajar en el observatorio astronómico, sin duda los auténticos artífices de aquel maravilloso centro de matemáticas que fue Gotinga en el primer tercio del siglo XX, que vino a llamarse la Meca de las Matemáticas, fueron Klein y Hilbert. El primero de ellos, quien siempre destacó por su capacidad de organización, había llegado en el año 1886, y cuando a principios de 1895 Weber se trasladó a Estrasburgo desde Gotinga, Klein pidió a Hilbert, que en aquel tiempo se encontraba en

Königsberg y ya era muy famoso por su contribuciones a la Teoría de Invariantes, que se trasladara a Gotinga [28]. Cuando entre ambos, Klein y Hilbert, convencieron a Emmy Noether para incorporarse al Instituto de Matemáticas, fueron ella y Ostrowski los que prosiguieron el trabajo de Hilbert sobre invariantes [28]. Minkowski, el mejor amigo de Hilbert, se había incorporado a una cátedra en 1902 y también Runge obtuvo su plaza como Profesor de Matemática Aplicada, y junto con otros discípulos aventajados como Weyl, Blumenthal, Hecke y Zermelo, hicieron del Instituto de Matemáticas de Gotinga el centro matemático por excelencia [5].


F. Klein


D. Hilbert

Pero Emmy Noether destacaba entre todos ellos, brillando con luz propia. Aprovechando la formación adquirida en el período de realización de su Tesis Doctoral que había realizado bajo la dirección de Gordan, próximo ya a retirarse, e inspirada por Hilbert, que ya había abandonado ese campo de las Matemáticas, completó de forma brillante los trabajos de Hilbert sobre invariantes, culminando así el período crítico, utilizando la terminología del propio Hilbert. Éste distingue claramente tres períodos bien diferenciados en el desarrollo de cada uno de los campos en Matemáticas [28]. El primero, de inicio, es el que llama período *heróico*, y del que en este caso destacaremos a Cayley como iniciador de esta Teoría. Luego le siguen un segundo período *formal*, en el que se procede a la formalización de los resultados, del que en este caso el claro exponente es el propio Gordan (quien, como Max Noether, había sido discípulo y colaborador de Clebsch), a menudo conocido como "el rey de los invariantes", quien desarrolló todo tipo de algoritmos en la búsqueda de tales invariantes (publicó artículos con más de 20 páginas consecutivas de cálculos y fórmulas sin ningún texto intermedio [2]), y la propia Emmy Noether en su primera etapa como doctorando. Finalmente, siempre existe un tercer período, más definitivo, que Hilbert califica de *crítico*.

La razón por la que Klein y Hilbert decidieron contactar a Emmy Noether es porque la consideraron como la experta en Teoría de Invariantes que necesitaban para resolver ciertos problemas relacionados con la física. Sobre este tema había versado su tesis doctoral, titulada “Sobre los sistemas completos de invariantes para formas bicuadráticas ternarias”, que fue defendida de forma oral el día 13 de Diciembre de 1907, e inscrita como número 202 de las Erlanger Universitätsschriften [2]. Contenía nada menos que 331 formas bicuadráticas ternarias [20]

Cuando la invitaron a juntarse al grupo, era porque Hilbert, cuyo interés había ido cambiando sucesivamente desde la mencionada Teoría de Invariantes a la Física, pasando antes por cuerpos algebraicos, Fundamentos de Geometría y Ecuaciones integrales [28], trataba entonces de entender algunas cuestiones de la Relatividad General relacionadas con la ecuación del campo gravitatorio propuesta por Einstein, primero en la forma $R_{\mu\nu} = -\gamma\, T_{\mu\nu}$, donde R es el tensor de curvatura correspondiente a la conexión de Levi-Civita definida por una métrica $g_{\mu\nu}$ y T el de energía-impulso, y posteriormente la ecuación modificada, ya anteriormente mencionada, en la que se incluye un término adicional, $R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu}\, R = -\gamma\, T_{\mu\nu}$. Esta ecuación había sido propuesta inicialmente por Hilbert en Noviembre de 1915, deducida de un principio variacional para una acción, y pocos días después por el propio Einstein. Sin embargo, Hilbert nunca reclamó la prioridad en la propuesta de esta ecuación, porque en su opinión, casi todos las cuestiones importantes estaban basadas en ideas de Einstein [28].

Es aquí donde la colaboración de Emmy Noether es absolutamente decisiva, ya que fue ella quien demostró que, dados un espacio de Riemann y un campo vectorial, todos los covariantes diferenciales se pueden encontrar a partir de las correspondientes derivadas covariantes mediante los covariantes algebraicos de las formas resultantes. Éste era precisamente el primero de los problemas que le había propuesto Hilbert.

Además, fue precisamente entonces, en 1918, cuando, formando parte del trabajo que ella misma seleccionó como objeto de Tesis de Habilitación, estableció, mientras investigaba cuestiones de relatividad especial, que a cada transformación infinitesimal del grupo de Lorenz le corresponde un Teorema de conservación.

La escuela de Teoría de Grupos que se desarrolló en Gotinga alrededor de F. Klein, tuvo mucho que ver con el resultado de Noether plasmado en su artículo de 1918, y puede considerarse a éste como la culminación de este desarrollo. Es a partir de este momento cuando Noether cambia su estilo inicial por uno más próximo al de Hilbert, en el que predominan los conceptos y los métodos sobre los cálculos, llegando después a convertirse en una líder de lo que se vino a llamar Álgebra Moderna. Tal fue la consideración que mereció que su padre Max, quien había padecido una parálisis infantil [2], pero que había llegado a superar su minusvalía y a merecer por sus trabajos científicos que algunos le consideraran como padre de la Geometría algebraica [2], llegó en alguna ocasión a ser aludido como “el padre de Emmy”.

7. Perspectivas y conclusiones

No debemos acabar esta descripción sobre el trabajo de Emmy Noether y su contribución a la Física sin llamar la atención sobre un punto que es, en mi opinión, muy significativo, como es la fuerte interacción existente entre físicos y matemáticos, Einstein por un lado y Klein y Hilbert por el otro, que fueron la fuente de inspiración para los resultados del trabajo de Emmy Noether que han tenido una influencia tan fuerte en la Física como hemos mencionado [8]. Ya hemos visto que la incursión de Emmy Noether en el campo de la Física fue corta, pero su contribución, inmensa. Sin duda estos resultados no se hubieran obtenido si no hubiera existido la preocupación de Klein y Hilbert por la física. Por ejemplo, en Inglaterra había grandes expertos en Teorías de invariantes y en Teoría de grupos, como Cayley y Silvester, y por supuesto especialistas en cálculo de Variaciones, e incluso Cayley era un buen conocedor de los trabajos de Lie. Sin embargo, ni Cayley ni Silvester prestaron la mínima atención a las posibles conexiones entre matemáticas y física, todo lo contrario a lo que sucedía con Klein. Esa fue una gran diferencia a favor de la escuela de Gotinga y que hizo posible que Emmy Noether obtuviera tan importantes resultados.

Hagamos un poco historia de la génesis de dichos resultados. En Noviembre de 1915 Einstein consigue completar sus ecuaciones de campo gravitatorio. Sabemos que Emmy escribe una carta a Fischer a quien le informa de que Hilbert va a dar un seminario sobre sus propias ideas sobre los invariantes diferenciales de Einstein y ella comienza a estudiar algo de Relatividad. La derivación de Hilbert de las ecuaciones, en un pretendido, pero fracasado, intento de unificar la materia con la gravedad y el electromagnetismo, es fundamental para la formulación de la gravedad. Introduce lo que denominamos Lagrangiano de Einstein–Hilbert para deducir las ecuaciones de campo como las ecuaciones de Euler–Lagrange de la acción correspondiente.

En la estación de Göttingen

El fallo de la conservación de la energía local era una gran preocupación para Hilbert, Klein y Einstein. Hoy sabemos que existe una relación entre la conservación de energía-momento y la invariancia bajo transformaciones de coordenadas. Es justamente intentando resolver este problema cuando obtuvo Emmy Noether sus famosos teoremas.

Conviene resaltar que Emmy Noether obtuvo los dos Teoremas mencionados poco después de que Hilbert derivara las ecuaciones del movimiento de un principio de acción mínima. Es característico de ella que intentando resolver un problema concreto, como el que le había sido propuesto por Hilbert, encontrara a la vez la solución de problemas más generales mediante el desarrollo de técnicas que no son sólo válidas para el problema concreto contemplado sino para otros varios. En definitiva su gran capacidad era la abstracción de cuestiones muy relevantes desde pequeños detalles concretos.

Su trabajo [8] fué presentado por Klein el 16 de Julio de 1918. Sus resultados aportaron no sólo un más profundo entendimiento de cuestiones como la conservación de la energía o el momento angular, sino que han sido fundamentales en el descubrimiento de las simetrías de *gauge* que han jugado un papel tan relevante en el último cuarto del siglo recién finalizado.

La propia Emmy se percató de la importancia de los resultados de su trabajo de 1918, por lo que fue precisamente el seleccionado por ella como tema para su Habilitación.

Todo el artículo combina diversos ingredientes matemáticos procedentes de varios campos diferentes, como son la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Grupos de Lie, ésta en particular de muy reciente introducción por aquellos tiempos. Ya en el Abstract hace mención a que estudia sistemas de ecuaciones diferenciales que provienen de un principio variacional. La necesidad de poder hacer uso de herramientas provenientes de muy diversos campos de la matemática pone en evidencia la conveniencia de la comunicación entre los investigadores de uno y otro campo, como remedio frente a la superespecialización.

Los problemas de la Física como fuentes de inspiración para la Matemática, sirvieron a toda la gama de estrellas de la matemática de entonces que Hilbert había conseguido reunir en Gotinga, muchos de ellos interesados en la Teoría de la Relatividad General. Así, no sólo Hilbert estaba absolutamente expectante durante la exposición de los resultados de Emmy Noether, sino también el propio Klein estaba muy interesado por su relación con el programa de Erlangen que él mismo había propuesto unos años antes. A su vez, había sido el propio Einstein quien había convencido a Hilbert y Klein de la conveniencia de abordar el problema del fallo de la conservación de la energía local desde un punto de vista matemático. Esa relación entre Física y Matemática que jugó un papel tan importante en los desarrollos de Emmy Noether, debe seguir manteniéndose y fortaleciéndose continuamente. Sin duda, la Física–Matemática será de gran utilidad tanto para una como la otra.

En Nikolausberg en Göttingen en 1932. De izquierda a derecha, Ernst Witt, Paul Bernays, Helene Weyl, Hermann Weyl, Joachim Weyl, Emil Artin, Emmy Noether, Ernst Knauf, desconocido, Chiungtze Tsen y Erna Bannow

Referencias

[1] P. Carrasco, Emmy Noether y el inicio del álgebra abstracta, La Gaceta de la RSME 7.2 (2004).

[2] C. Kimberling, Emmy Noether, *Am. Math. Monthly* **79**, 136–49 (1972).

[3] A. Dick, *Emmy Noether* (Birkhäuser, Basel, 1970).

[4] M.I. Paz Andrada, Mujeres de Ciencia en la diáspora, *Rev. Española de Física* **12**, 54–60 (1998).

[5] N. Byers, *The Life and Times of Emmy Noether*, *The History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle physics*, H.B. Newman and T. Ypsilantis, eds., Plenum Press, 1996. También: `arXiv: hep-th/9411110` (1994).

[6] B. Srinivasan y J. Sally, eds., *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Actas de un simposio con motivo del centenario de Emmy Noether celebrado en Bryn Mawr College, Bryn Mawr Pa., March 17-19, 1982, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[7] E.P. Wigner, Invariance in Physical Theory, *Proc. Am. Phil. Soc.* **93**, 521 (1949).

[8] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 234–257 (1918).

[9] E. NOETHER, *Invariant variational problem*, Traducción al inglés del anterior por M.A. Tavel en *Transport theory and Statistical Physics I*, p. 183–207 (1971) .

[10] H.A. KASTRUP, *The contribution of Emmy Noether, Felix Klein and Sophus Lie to the modern concept of symmetries in physical systems*, En el libro: *Symmetries in Physics (1600–1980)*, p. 113-163, M.G. Doncel *et al* eds., Seminari d'Història de les Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, 1987.

[11] J.M. LÉVY-LEBLOND, Conservation laws for Gauge–variant Lagrangians in Classical Mechanics, *Amer. J. Phys.* **39**, 502–06 (1971).

[12] J.F. CARIÑENA, C. LÓPEZ Y E. MARTÍNEZ, A new approach to the converse of Noether's theorem, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 4777–87 (1989).

[13] J.F. CARIÑENA, Y M.F. RAÑADA, Noether's theorem for singular Lagrangians, *Lett. Math. Phys.* **15**, 305–11 (1988).

[14] J.F. CARIÑENA, C. LÓPEZ Y E. MARTÍNEZ, Sections along a map applied to higher-order Lagrangian Mechanics. Noether's theorem, *Acta Appl. Math.* **25**, 127–51 (1991).

[15] J.F. CARIÑENA Y L.A. IBORT, Non-Noether constants of motion, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 1–7 (1983).

[16] K.A. BRADING Y H.R. BROWN, *Symmetries and Noether's theorems*, En el libro: *Symmetry in Physics: Philosophical Reflections*, p, 89, K.A. Brading and E. Castellani, eds, Cambridge U.P., 2003.

[17] M. DE LEÓN Y J.C. MARRERO, Constrained time-dependent Lagrangian systems and Lagrangian submanifolds, *J. Math. Phys.* **34**, 622–644 (1993).

[18] J.F. CARIÑENA, J. FERNÁNDEZ-NÚÑEZ Y E. MARTÍNEZ, A geometric approach to Noether's Second Theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics, *Lett. Math. Phys.* **23**, 51–63 (1991).

[19] J.F. CARIÑENA, J. FERNÁNDEZ-NÚÑEZ Y M.F. RAÑADA, Singular Lagrangians affine in velocities, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 3789–807 (2003).

[20] N. BYERS, *E. Noether discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws*, *Proceedings of a Symposium on the Heritage of Emmy Noether in Bar-Illan University*, 1996. También: arXiv: physics/9807044 (1998).

[21] K.A. BRADING Y H.R. BROWN, *Noether's theorems and Gauge symmetries*, `arXiv:hep-th/0009058` (2000).

[22] C. KIMBERLING, Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician, *Mathematics Teacher* **84**, 246–49 (1982).

[23] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951.

[24] E.L. HILL, Hamilton's principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 253–60 (1951)

[25] D. Hilbert y R. Courant, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, 1953. Versión en inglés de *Methoden der Mathematischen Physik* Verlag, Berlin, 1931.

[26] C.L. Cowan, Jr. y F. Reines, Search for Antineutrino Interaction with Deuterons, *Phys. Rev.* **107**, 1609–11 (1957).

[27] R.P. Feynmann y M. Gell-Mann, Theory of the Fermi Interaction, *Phys. Rev.* **109**, 193–98 (1958).

[28] B.L. van der Waerden, The school of Hilbert and Emmy Noether, *Bull. London Math. Soc.* **15**, 1–7 (1983).

José F. Cariñena
Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza
Correo electrónico: `jfc@unizar.es`