Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2009.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 114 (corrección). *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $g_p(z) = z^{p+1}{}_2F_1(1, \frac{1}{2} + \frac{p}{2}, \frac{3}{2} + \frac{p}{2}, -z^2)$, donde ${}_2F_1$ denota la función hipergeométrica. Probar que si $x > 0$ y $0 < a < 2$ entonces

$$\frac{1}{2-a}\left(g_{1-a}\left(\frac{1}{x}\right) + g_{1-a}(x)\right) + \frac{1}{a}\left(g_{a-1}\left(\frac{1}{x}\right) + g_{a-1}(x)\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Problema 115. *Propuesto por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean A, B y C los ángulos de un triángulo acutángulo, r el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo y R el de la circunscrita. Probar que

$$\sqrt{2\cos A\cos B\cos C} \le \frac{r}{R}.$$

PROBLEMA 116. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sea $\{a_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que

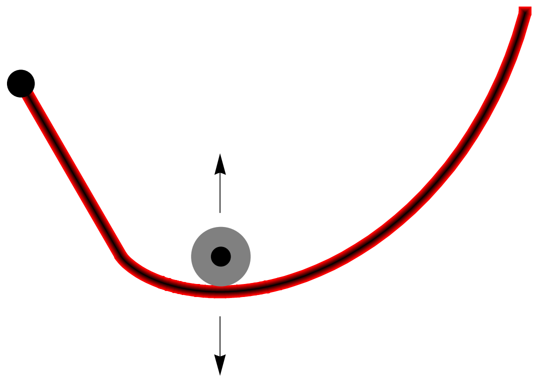
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} a_j < \infty.$$

Probar que, para $p > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{2}{p}-1}\sum_{j=k}^{2k-1}(a_j)^{1/p} = 0.$$

PROBLEMA 117. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

¿Cómo debe ser el perfil de una palanca para que la fuerza que transmite al peso que se desea elevar tenga en todo momento la dirección de la vertical? O bien, más concretamente: supongamos que una palanca rígida tiene su punto de apoyo en el origen de coordenadas, que la dirección de la vertical es la del eje OY, y que sobre el perfil de la palanca puede rodar sin rozamiento un objeto puntual pesado. Encontrar una ecuación para dicho perfil de modo que, al mover la palanca, el objeto pesado, situado inicialmente en un punto de coordenadas $(a, -h)$ (donde $a > 0$ y $a \leq h < \infty$), pueda ser elevado hasta el punto $(a, 0)$ manteniéndose siempre sobre la recta vertical $x = a$.



PROBLEMA 118. *Propuesto por Juan Carlos González Vara, Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar que

$$ab\sqrt{(a+b)^3} + bc\sqrt{(b+c)^3} + ca\sqrt{(c+a)^3} \geq \frac{\sqrt{3abc\left[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}\right]^3}}{a+b+c}.$$

Problema 119. *Propuesto por Cezar Lupu (estudiante), Universidad de Bucarest, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Probar que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$x_0 f(x_0) = f'(x_0) \int_0^{x_0} x f(x)\,dx.$$

Problema 120. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Pantelimon George Popescu, Bucarest, Rumanía.*

Hallar todas las ternas de números reales (x,y,z) tales que

$$\begin{aligned} x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} &= 3, \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} &= 3, \\ x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} &= 3. \end{aligned}$$

Soluciones

Problema 91. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean $\ln a$, $\ln b$ y $\ln c$ las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Probar que

$$\frac{3}{5} \le \frac{\ln a}{\ln(ab^2c^2)} + \frac{\ln b}{\ln(a^2bc^2)} + \frac{\ln c}{\ln(a^2b^2c)} < 1.$$

Solución enviada por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Probaremos que

$$\frac{3}{5} \le \frac{\ln a}{\ln(ab^2c^2)} + \frac{\ln b}{\ln(a^2bc^2)} + \frac{\ln c}{\ln(a^2b^2c)} < \frac{2}{3}.$$

Sean p el semiperímetro del triángulo, $x = p - \ln a$, $y = p - \ln b$ y $z = p - \ln c$. Así, las desigualdades a probar son

$$\frac{3}{5} \le \frac{y+z}{4x+3y+3z} + \frac{z+x}{3x+4y+3z} + \frac{x+y}{3x+3y+4z} < \frac{2}{3},$$

para $x,y,z \ge 0$. Usando un argumento de homogeneidad, podemos suponer $x+y+z=1$, por lo que obtenemos las desigualdades equivalentes

$$\frac{3}{5} \le \frac{1-x}{3+x} + \frac{1-y}{3+y} + \frac{1-z}{3+z} < \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Para $t \geq 0$, sea $f(t) = \frac{1-t}{3+t}$. Puesto que $f''(t) = \frac{8}{(3+t)^3} > 0$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen, para deducir que

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5},$$

lo que prueba la desigualdad de la izquierda en (1).

Para probar el lado derecho de (1), notemos que $f(x)+f(y) < f(x+y)+f(0)$, ya que

$$f(x+y)+f(0)-f(x)-f(y) = \frac{4xy(x+y+6)}{3(x+3)(y+3)(x+y+3)} > 0.$$

De este modo

$$f(x)+f(y)+f(z) < f(x+y)+f(0)+f(z) < f(x+y+z)+f(0)+f(0) = \frac{2}{3},$$

como queríamos demostrar.

Las cotas dadas en (1) son las mejores posibles, ya que en el lado izquierdo la igualdad se alcanza con $x = y = z = \frac{1}{3}$, y en el lado derecho, si $x \to 1$, $y \to 0$ y $z \to 0$, se tiene que

$$f(x)+f(y)+f(z) \to \frac{2}{3}.$$

También resuelto por M. Fernández, O. Furdui, F. J. García, J. C. González, D. Lasaosa, P. Perfetti, P. Refolio, J. Rivero y el proponente.

PROBLEMA 92. *Propuesto por Ovidiu Bagdasar, Babes Bolyai University, Cluj Napoca, Rumanía.*

Probar que si $x_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, y siendo $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{S-x_i}{x_i}} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{S-x_i}}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Para cada $n > 1$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{S-x_i}{x_i}} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{S-x_i}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{S-x_i}{(n-1)x_i}}-\sqrt{\frac{(n-1)x_i}{S-x_i}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{S-nx_i}{\sqrt{x_i(S-x_i)}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_i}{\sqrt{x_i(S-x_i)}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_i}{\sqrt{x_i(S-x_i)}}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i-x_j}{\sqrt{x_j(S-x_j)}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_i)\frac{\sqrt{x_j(S-x_j)}-\sqrt{x_i(S-x_i)}}{\sqrt{x_ix_j(S-x_i)(S-x_j)}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-x_i)^2(S-x_i-x_j)}{\sqrt{x_ix_j(S-x_i)(S-x_j)}(\sqrt{x_j(S-x_j)}+\sqrt{x_i(S-x_i)})}\right)\geq 0,
\end{aligned}
$$

lo que prueba la desigualdad propuesta.

También resuelto por D. Lasaosa, P. Perfetti y el proponente.

Nota. Paolo Perfetti nos remite una solución basada en la desigualdad de Chebyshev. Su solución sigue los pasos dados en el libro *Old and New Inequalities* de T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu y M. Lascu (GIL Publishing House, 2004) para probar que, dados $a_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, se cumple

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=1 \implies \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}}.
$$

Tomando $a_i = \frac{S-x_i}{x_i}$ puede comprobarse que la desigualdad anterior es equivalente a la propuesta en el problema.

Problema 93. *Propuesto por Pablo Fernández Refolio (estudiante), Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.*

Probar que

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{3/2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-(n+1)^{3/2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.
$$

Solución enviada por José Manuel Moreno Valderrama (estudiante), Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Denotando por S la suma a evaluar tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(n^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - (n+1)^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + 1 \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(n^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - (n+1)^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right) + N \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\arctan 1 - (N+1)^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) + N \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{N\to\infty} \left(N - (N+1)^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \right). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el desarrollo $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$, deducimos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} + \lim_{N\to\infty} \left(N - (N+1)^{3/2} \left((N+1)^{-1/2} - \frac{(N+1)^{-3/2}}{3} + O(N+1)^{-5/2} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{N\to\infty} \left(N - (N+1) + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

También resuelto por M. Fernández, O. Furdui, J. C. González, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, X. Ros y el proponente.

PROBLEMA 94. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{7}{4}\zeta(4),$$

donde $\zeta(a)$ denota la función Zeta de Riemann evaluada en a.

Solución enviada por Juan Carlos González Vara, Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid.

Consideraremos la notación habitual para los números armónicos generalizados $H_n^{(r)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$, $r \in \mathbb{N}$. En el caso particular $r = 1$, usaremos $H_n \equiv H_n^{(1)}$.

Asumamos la identidad, cuya demostración posponemos momentaneamente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{k} = \frac{1}{2} \left(H_n^2 + H_n^{(2)} \right). \tag{1}$$

Entonces podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \left(\zeta(2) - H_n^{(2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{k} \tag{2}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_{n+1}^2 + H_{n+1}^{(2)}}{(n+1)^2} - \frac{2H_{n+1}}{(n+1)^3} \right).$$

Ahora, usando integración por partes y un cambio de variable elemental, se prueba que

$$H_n = -n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln t \, dt. \tag{3}$$

En efecto,

$$-n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln t \, dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} \, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z} \, dz = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \, dz = H_n.$$

Para $p = 2, 3, \ldots$, definimos la función polilogaritmo por $\operatorname{Li}_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, convergente para $|x| \leq 1$. Usando (3), la función polilogaritmo y la identidad elemental

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Li}_2(1-t) = \frac{\ln t}{1-t},$$

resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln t \, dt = -\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(1-t) \ln t}{1-t} \, dt$$
$$= \frac{1}{2} (\zeta(2))^2 = \frac{5}{4} \zeta(4),$$

ya que $\operatorname{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ y $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Como consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}}{(n+1)^3} = \frac{5}{4} \zeta(4) - 1. \tag{4}$$

Por otra parte, si asumimos la identidad, que probaremos posteriormente,

$$\zeta(4) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n^2} \tag{5}$$

tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}^2 + H_{n+1}^{(2)}}{(n+1)^2} = 6 \zeta(4) - 2. \tag{6}$$

Finalmente de (2), (4) y (6) se concluye la identidad propuesta.

Prueba de (1)**.** Procederemos por inducción. Es claro que la igualdad se cumple para $n = 1$. Supongamos que se verifica para $n = N$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(H_{N+1}^2 + H_{N+1}^{(2)}\right) &= \frac{1}{2}\left(H_N + \frac{1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\,H_N^{(2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(N+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\,H_N^2 + \frac{1}{2}\,H_N^{(2)} + \frac{H_N}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(H_N^2 + H_N^{(2)}\right) + \frac{H_{N+1}}{N+1} = \sum_{k=1}^{N}\frac{H_k}{k} + \frac{H_{N+1}}{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1}\frac{H_k}{k}.\end{aligned}$$

Prueba de (5)**.** Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+x} = \frac{n!}{x(1+x)\cdots(n+x)},$$

definida para $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$. Es claro que $f(1) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ y $f''(1) = 2\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^3}$. Considerando $g(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, se puede comprobar fácilmente que

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}, \tag{7}$$

$g(1) = H_{n+1}$ y $g'(1) = -H_{n+1}^{(2)}$. Por otra parte,

$$-g'(x) = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = \frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 = \frac{f''(x)}{f(x)} - (g(x))^2$$

de donde deducimos la identidad

$$f''(1) = f(1)(g(1))^2 - g'(1)),$$

de modo que, considerando los valores de $f(1)$, $f''(1)$, $g(1)$ y $g'(1)$,

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^3} = \frac{H_{n+1}^2 + H_{n+1}^{(2)}}{n+1}.$$

De la expresión anterior podemos obtener que

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^3} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}^2 + H_{n+1}^{(2)}}{(n+1)^2}.$$

Para finalizar la prueba de (5) basta ver que el lado izquierdo de la igualdad anterior es $\zeta(4)$ y esto se deduce de la fórmula, debida a Helmut Hasse,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{s-1}},$$

y que puede consultarse en H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, *Math. Z.* **32** (1930), 458–464.

También resuelto por D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, G. R. A. 20 Problem Solving Group y el proponente.

Nota. La identidad (1), cuya prueba hemos incluido por completitud, es conocida. Puede verse como fórmula (6.71) en la segunda edición del libro *Concrete Mathematics* de R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, editado por Addison-Wesley.

Problema 95. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Qafqaz University y Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

Sea A un entero positivo. Determinar todos los números reales α para los que se cumple la identidad

$$\left[\sqrt{A^{2n}+\alpha}\cdot A^n\right] = A^{2n} - \left[1-\frac{\alpha}{2}\right],$$

para cualquier entero positivo$n$. (Como es habitual, $[x]$ denota la parte entera de x; es decir, el mayor entero menor o igual que x.)

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Consideremos el entero $m = \left[1-\frac{\alpha}{2}\right]$. Es claro que $m \le 1-\frac{\alpha}{2} < m+1$; es decir, $0 < \alpha + 2m \le 2$, y que debe cumplirse que

$$A^{2n} - m = \left[\sqrt{A^{4n}+\alpha\cdot A^{2n}}\right],$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} A^{4n} - 2mA^{2n} + m^2 = \left(A^{2n}-m\right)^2 &\le A^{4n} + \alpha\cdot A^{2n} \\ &< \left(A^{2n}-m+1\right)^2 = A^{4n} - 2(m-1)A^{2n} + (m-1)^2, \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$m^2 \le (\alpha+2m)\,A^{2n} < 2A^{2n} + (m-1)^2.$$

Como $\alpha+2m \le 2$, la segunda desigualdad en la cadena anterior se cumplirá siempre, salvo cuando $m = 1$ y $\alpha = 2-2m = 0$, en cuyo caso es trivial constatar que, efectivamente, la igualdad del enunciado no se cumpliría, pues sería A^{2n} el miembro de la izquierda y $A^{2n}-1$ el de la derecha. La primera desigualdad, sin embargo, no se cumple siempre, siendo el caso más exigente aquél en el que se toma $n = 1$, obteniéndose la acotación $\alpha \ge -2m + \frac{m^2}{A^2}$. Se tiene entonces que, para un valor de m dado, α debe pertenecer al intervalo $\left[-2m+\frac{m^2}{A^2}, -2m+2\right]$, salvo cuando $m = 0$, en cuyo caso α debe estar incluido en el intervalo $\left(-2m+\frac{m^2}{A^2}, -2m+2\right] = (0,2]$.

Nótese finalmente que, para que el intervalo no sea vacío, el límite inferior debe ser menor que el límite superior, es decir, ha de ser $|m| < A\sqrt{2}$. Luego la respuesta final es que α debe pertenecer a la unión de los intervalos $\left[-2m + \frac{m^2}{A^2}, -2m+2\right]$ para cualquier entero m con $A\sqrt{2} > |m| > 0$, y del intervalo $(0, 2]$.

También resuelto por Manuel López y el proponente.

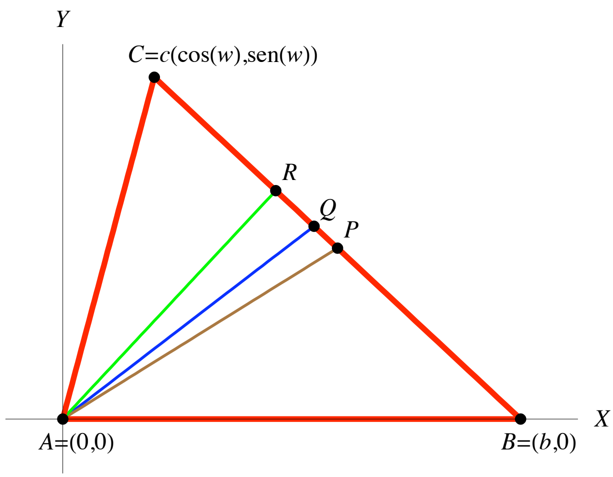
PROBLEMA 96. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Sea ABC un triángulo rectángulo en A y de lados $a > b \geq c$, con c fijo. Sean m_a, θ_a y h_a la mediana, la bisectriz y la altura correspondiente al lado a, respectivamente. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{b\to c} \frac{m_a - h_a}{\theta_a - h_a}, \qquad \lim_{b\to c} \frac{m_a - \theta_a}{m_a - h_a} \qquad \text{y} \qquad \lim_{b\to c} \frac{m_a - \theta_a}{\theta_a - h_a}.$$

Solución enviada por César Beade Franco (modificada por los editores), I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.

Los límites propuestos pueden calcularse en un caso más general. Si el ángulo en A lo denotamos por w, podemos suponer $0 < w < \pi$. Para resolver esta situación consideramos un sistema de coordendas de tal forma que $A = (0, 0)$ y $B = (b, 0)$. De este modo tendremos que $C = c(\cos w, \operatorname{sen} w)$, para un cierto valor r.



Si denotamos por P el punto medio del lado BC, por Q la intersección de la bisectriz del ángulo w con el lado BC y por R la proyección de A sobre BC, tendremos que

$$P = \left(\frac{b + c\cos w}{2}, \frac{c \operatorname{sen} w}{2}\right), \qquad Q = \left(\frac{bc(1+\cos w)}{b+c}, \frac{bc \operatorname{sen} w}{b+c}\right)$$

y

$$R = \left(\frac{bc^2 \operatorname{sen}^2 w}{c^2 - 2bc\cos w + b^2}, \frac{bc \operatorname{sen} w(b - c\cos w)}{c^2 - 2bc\cos w + b^2} \right).$$

Por tanto,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 2bc\cos w + b^2}, \qquad \theta_a = \frac{bc}{c+b}\sqrt{2(1+\cos w)}$$

y

$$h_a = \frac{bc \operatorname{sen} w}{\sqrt{c^2 - 2bc\cos w + c^2}}.$$

Ahora resulta sencillo obtener los desarrollos en series de potencias de $b - c$,

$$m_a - h_a = \frac{(b-c)^2}{8c \operatorname{sen}^2 \frac{w}{2} \cos \frac{w}{2}} + O(b-c)^3, \quad \theta_a - h_a = \frac{\cos^3 \frac{w}{2}}{8c \operatorname{sen}^2 \frac{w}{2}}(b-c)^2 + O(b-c)^3$$

y

$$m_a - \theta_a = \frac{1 + \cos^2 \frac{w}{2}}{8c \cos \frac{w}{2}}(b-c)^2 + O(b-c)^3.$$

Finalmente, concluimos que

$$\lim_{b \to c} \frac{m_a - h_a}{\theta_a - h_a} = \frac{1}{\cos^4 \frac{w}{2}}, \qquad \lim_{b \to c} \frac{m_a - \theta_a}{m_a - h_a} = 1 - \cos^4 \frac{w}{2}$$

y

$$\lim_{b \to c} \frac{m_a - \theta_a}{\theta_a - h_a} = \frac{1 - \cos^4 \frac{w}{2}}{\cos^4 \frac{w}{2}}.$$

De los resultados anteriores deducimos, tomando $w = \frac{\pi}{2}$, que los límites propuestos valen 4, $\frac{3}{4}$ y 3, respectivamente.

También resuelto por M. Fernández, F. J. García, R. Peiró, J. Rivero, X. Ros, C. Sánchez y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.