Las Medallas Fields

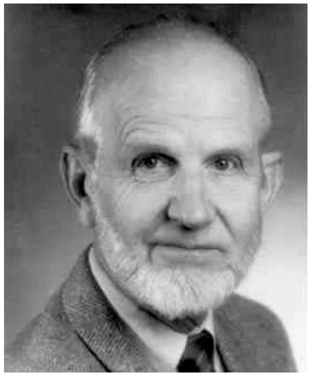
Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Lars V. Hörmander

por

María González Taboada



Lars V. Hörmander

En 1962, Lars Valter Hörmander fue galardonado con la Medalla Fields por sus contribuciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y, en particular, por sus resultados sobre operadores hipoelípticos. Desde entonces, Hörmander ha tenido un papel destacado en el desarrollo de la teoría moderna de ecuaciones en derivadas parciales lineales, con importantes contribuciones a la teoría de operadores pseudodiferenciales y de operadores integrales de Fourier. Hörmander empleó estas nuevas herramientas con éxito para estudiar los frentes de ondas y sus singularidades. Por todo ello, en 1988 le concedieron el Premio Wolf de Matemáticas. Hörmander ha escrito varios libros y más de un centenar de artículos, la mayor parte de ellos en solitario. En 2006, la Sociedad Matemática Americana le concedió el Premio Leroy P. Steele en la categoría de Exposición Matemática por su obra *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*[1] [24].

1. Notas biográficas

Lars Valter Hörmander nació el 24 de enero de 1931 en la parroquia de Mjällby, situada en el condado de Blekinge, en el sur de Suecia. A los siete años comenzó a asistir a la escuela elemental de la que su padre era profesor y en 1942 inició sus estudios en la *realskola* en Sölvesborg. A los 15 años se trasladó a Lund para estudiar en el *gymnasium*. Por aquel entonces, el director del *gymnasium* estaba realizando

[1] *El análisis de los operadores en derivadas parciales lineales.*

un experimento que consistía en reducir el periodo de estudios de tres a dos años y las clases presenciales a tres horas diarias. Así que Hörmander disponía de mucho tiempo para trabajar por su cuenta.

Durante su estancia en el *gymnasium*, Hörmander tuvo un profesor de matemáticas muy entusiasta, Nils Erik Fremberg, que también daba clases en la Universidad de Lund. Animado por Fremberg, Hörmander aprendió cálculo diferencial e integral de una variable usando las notas que Fremberg empleaba en sus clases en la Universidad. Hörmander también estudió algo de geometría. En 1948, al finalizar sus estudios en el *gymnasium*, Hörmander decidió estudiar Matemáticas en la Universidad de Lund.

Lund no tenía una gran tradición matemática, aunque las cosas habían cambiado desde la llegada de Marcel Riesz en 1926. M. Riesz era una estrella internacional, activo, con su propio tema de investigación, y con tiempo y ganas de ampliar sus intereses. Había realizado su tesis doctoral sobre teoría de series, tema en el que trabajó hasta el comienzo de la Primera Guerra Mundial. En los años treinta, comenzó a interesarse por la teoría de potencial y las ecuaciones en derivadas parciales, motivado por el estudio de la propagación de ondas y, en particular, de la ecuación de ondas relativista de Dirac.

En la Universidad de Lund, Hörmander asistió a las clases que Marcel Riesz impartía sobre teoría clásica de funciones y teoría de potencial. Hörmander dio sus primeros pasos como investigador precisamente en estos temas. No obtuvo grandes resultados, pero le dotaron de una excelente base para trabajar en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, tema en el que M. Riesz había hecho algunas contribuciones importantes[2].

En 1950, Hörmander obtuvo el título de Máster por la Universidad de Lund y comenzó sus estudios de posgrado bajo la supervisión de Marcel Riesz (quien, por cierto, también había sido el supervisor de Fremberg, el profesor que Hörmander había tenido en el *gymnasium*). En 1952, Marcel Riesz se jubila y decide marcharse a los Estados Unidos. Es entonces cuando Hörmander comienza a trabajar en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

Entre 1953 y 1954, Hörmander se ausentó durante un año para realizar el servicio militar. Le asignaron un puesto en investigación militar que le permitió continuar estudiando matemáticas. En 1955 presentó su tesis doctoral, *On the theory of general partial differential operators*[3], en la Universidad de Lund. Esta tesis, codirigida por Marcel Riesz y Lars Gårding, se inspiraba en gran medida en el Teorema de Malgrange-Ehrenpreis y utilizaba técnicas desarrolladas para operadores diferenciales hiperbólicos por Lars Gårding y Jean Leray.

Poco después de finalizar su doctorado, Hörmander solicitó una cátedra en la Universidad de Estocolmo. Mientras estudiaban su solicitud, se marchó un tiempo a los Estados Unidos. Pasó el invierno y la primavera de 1956 en la Universidad de Chicago, donde completó sus conocimientos sobre la teoría de potencial. Allí conoció a Kennan T. Smith y W.F. Donoghue Jr., de la Universidad de Kansas, y a

[2]En 1949, M. Riesz publicó un artículo de 223 páginas en el que introducía una integral múltiple de tipo Riemann-Liouville y mostraba su importancia en el estudio de la ecuación de ondas.

[3]*Sobre la teoría de operadores en derivadas parciales generales.*

A.N. Milgram, de la Universidad de Minnesota, quienes le invitaron a sus respectivas universidades, que Hörmander visitó ese verano. El otoño de 1956 lo pasó en Nueva York, en el Instituto de Ciencias Matemáticas[4], que en ese momento dirigía Richard Courant. Allí aprendió algunas técnicas de análisis numérico con P.D. Lax.

A finales de 1956, Hörmander recibió la noticia de que había ganado la cátedra que había solicitado antes de viajar a los Estados Unidos. Se incorporó a su nuevo trabajo en la Universidad de Estocolmo en enero de 1957. Al poco de su llegada, Germund Dahlquist pidió a Hörmander que le ayudara con un manuscrito sobre la estabilidad de las aproximaciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dahlquist presentó su tesis doctoral, *Stability and error bounds in the numerical solution of ordinary differential equations*[5], codirigida por Hörmander y Fritz Carlson, en 1958. Algunos años después, en 1963, Dahlquist se convertiría en el primer catedrático de análisis numérico en Suecia.

En el curso académico 1960–61, Hörmander visitó el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, que en aquel momento dirigía J. Robert Oppenheimer. En los veranos de 1960 y 1961 impartió una serie de clases en la Universidad de Stanford y comenzó a escribir su primer libro sobre ecuaciones en derivadas parciales (cf. [6]). El libro apareció en 1963 en la serie *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*[6] de Springer-Verlag.

El Congreso Internacional de Matemáticos de 1962 se celebró precisamente en Estocolmo. En aquellos momentos, no había muchos catedráticos de Matemáticas en Suecia, así que fue inevitable que Hörmander se viera involucrado en los preparativos. Según asegura en su autobiografía (cf. [25]), se llevó una gran sorpresa cuando le comunicaron que recibiría una de las Medallas Fields en el Congreso.

Pasado algún tiempo, Hörmander recibió una oferta para ocupar una cátedra a tiempo parcial en la Universidad de Stanford. No tenía intención de dejar Suecia: su idea era permanecer en Estocolmo la mayor parte del curso académico (de septiembre a marzo), y pasar la primavera y el verano en Stanford. El ministro de educación sueco le concedió un permiso y el acuerdo fue efectivo en 1963.

Apenas había llegado a Stanford cuando recibió una oferta para ocupar una cátedra de investigación como miembro permanente en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Aunque había decidido no abandonar Suecia, la oportunidad de dedicarse exclusivamente a la investigación en un entorno muy activo matemáticamente era difícil de resistir. En el otoño de 1963, después de que el intento de crear una cátedra de investigación para él en Suecia fracasara, Hörmander decidió aceptar la oferta y renunciar a sus puestos en las Universidades de Estocolmo y Stanford. Su marcha provocó una fuerte reacción en Suecia, y el parlamento sueco instituyó

[4]En la actualidad, el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas. A mediados de los años cincuenta, la Comisión de Energía Atómica de Estados Unidos instaló un UNIVAC en el Laboratorio de Computación y Matemáticas Courant. Cuando Hörmander visitó el Instituto en 1956, este centro estaba al frente del uso de *hardware* avanzado.

[5]*Estabilidad y cotas de error en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

[6]Esta serie, fundada por Richard Courant en 1920, fue la primera de Springer dedicada a *matemáticas superiores*. Para que un libro se publique en esta serie, los editores han de considerar que va a tener impacto durante muchos años.

Edificio de Matemáticas, Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

una nueva ley, conocida como *Lex Hörmander*, con la intención de reducir la fuga de cerebros.

Antes de incorporarse a su nuevo trabajo en el Instituto, en el verano de 1964, Hörmander impartió un curso en la Universidad de Stanford sobre la teoría de funciones de varias variables complejas, y comenzó a redactar unas notas que dieron lugar a su libro *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*[7] (cf. [7]), publicado en 1966 (en 1973 y 1990 se publicaron ediciones extendidas).

Hörmander comenzó a trabajar en el Instituto en el otoño de 1964. Allí coincidió, entre otros, con Armand Borel, Kurt Gödel y André Weil. Tras dos años de trabajo duro, a Hörmander le parecía que sus resultados no estaban al nivel que cabía esperar. Según señala en su autobiografía, dudaba que fuera capaz de soportar una vida bajo esa presión, así que empezó a considerar la idea de volver a Suecia cuando quedara vacante una cátedra. En 1967 surge una oportunidad en la Universidad de Lund y decide aprovecharla: regresará a Lund en el otoño de 1968. Curiosamente, una vez tomada la decisión, realiza su mejor trabajo en el Instituto durante el año restante (cf. [10]).

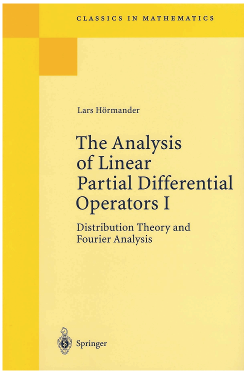
Desde 1968, Hörmander ha permanecido la mayor parte del tiempo en Lund, ausentándose sólo para realizar algunas estancias. En el otoño de 1970 fue profesor visitante en el Instituto Courant. Ese mismo año, fue conferenciante invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos que se celebraba en Niza, donde impartió la conferencia *Linear Differential Operators*[8]. En la primavera de 1971, visitó de nuevo el Instituto de Estudios Avanzados (I.A.S.) de Princeton, y en el verano de ese mismo año, visitó la Universidad de Stanford, donde también impartió clases los veranos de 1977 y 1982. En el curso académico 1977–78, volvió de nuevo al I.A.S., con motivo de la celebración de un año especial sobre análisis microlocal. Finalmente, en el invierno de 1990, fue profesor visitante en la Universidad de California, San Diego.

Tras dedicar cinco años a escribir su famoso tratado sobre ecuaciones en derivadas parciales lineales [24], Hörmander pidió una excedencia en Lund y se trasladó

[7] *Una introducción al análisis complejo en varias variables.*
[8] *Operadores diferenciales lineales.*

a Estocolmo para dirigir el Instituto Mittag-Leffler[9] entre 1984 y 1986 (sólo aceptó el puesto por dos años porque imaginó que las tareas administrativas no le iban a entusiasmar). De vuelta en Lund, fue vicepresidente de la Unión Matemática Internacional entre los años 1987 y 1990.

En 1988, Hörmander fue galardonado con el Premio Wolf de Matemáticas[10] por su trabajo fundamental en análisis moderno, en particular, la aplicación de operadores pseudodiferenciales y operadores integrales de Fourier al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales lineales.



Portada del primer volumen de [24] (edición de 2003).

Desde 1996, Hörmander es profesor emérito de la Universidad de Lund. Según consta en el *Mathematics Genealogy Project*[11], Hörmander ha dirigido al menos una docena de tesis. Dos de sus primeros estudiantes, Germund Dahlquist y Vidar Thomée, continuaron sus carreras en temas diferentes de análisis numérico. Dahlquist trabajó en métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias y en problemas asociados de álgebra numérica, mientras que Thomée fundó una escuela de análisis numérico de ecuaciones en derivadas parciales de reputación internacional en Gotemburgo.

En el año 2006, Hörmander ganó el Premio Leroy P. Steele que concede la Sociedad Matemática Americana por su obra *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, que consta de cuatro volúmenes y que se ha convertido en una obra de referencia en el tema.

2. Operadores pseudodiferenciales y el conjunto de frentes de onda

En su primer libro (cf. [6]), para probar estimaciones *a priori* para operadores diferenciales, Hörmander usaba básicamente la transformada de Fourier. Cuando el operador diferencial tenía coeficientes variables, *congelaba* sus argumentos en un punto, a veces tras realizar una integración por partes. Esta técnica proporciona buenos resultados siempre que el error cometido al congelar los coeficientes es pequeño en comparación con las cantidades que se desea estimar. Este método también permite probar resultados de unicidad, como mostró Calderón usando operadores integrales singulares.

[9] El Instituto Mittag-Leffler fue fundado en 1916 por el profesor Gösta Mittag-Leffler y su mujer, Signe. Es el instituto de investigación matemática más antiguo del mundo. Publica las revistas *Acta Mathematica* y *Arkiv för matematik*.

[10] Desde 1978, la Fundación Wolf concede cinco o seis premios anuales a científicos y artistas destacados por logros de interés para la humanidad. A menudo se premian los logros de una vida entera. En ciencia, los campos son agricultura, física, matemáticas, medicina y química. Para más información, véase `http://www.wolffund.org.il`.

[11] Véase `http://www.genealogy.ams.org/`.

Hörmander no incluyó los operadores integrales singulares en [6] porque, desde su punto de vista, presentaban muchos inconvenientes (requerían una reducción artificial a operadores de orden cero, sólo se trataban los símbolos principales y el papel de la transformada de Fourier se suprimía tanto que los cálculos le parecían artificiales). Estas objeciones desaparecieron en 1965, cuando Kohn y Nirenberg introdujeron una extensión del concepto de operador diferencial: los *operadores pseudodiferenciales* (cf. [27]). Kohn y Nirenberg consideraron operadores de la forma

$$P(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int P(x,\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

donde P es, asintóticamente, una suma infinita de términos homogéneos de orden entero y $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier de u, para $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, el álgebra de los operadores pseudodiferenciales está generada esencialmente por operadores integrales singulares, operadores diferenciales y operadores de potencial estándar. El interés de este tipo de operadores estriba en que las fórmulas para calcular los símbolos P son esencialmente las mismas que en el caso de los operadores diferenciales, no sólo a nivel del símbolo principal.

Hörmander introdujo la clase de símbolos $S^m_{\varrho,\delta}$ ($m, \varrho, \delta \in \mathbb{R}$, $0 < \varrho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$), formada por funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y con la propiedad de que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha P(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|} \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n,$$

para cualesquiera multi-índices α y β. Cuando $\delta < \varrho$, el operador asociado da lugar a un cálculo con muy buenas propiedades, mientras que cuando $\delta \geq 1-\varrho$, se tiene que $\varrho > \frac{1}{2}$ y el operador correspondiente es invariante por cambios de variables, de forma que se puede trasladar a variedades regulares.

Rápidamente, los operadores pseudodiferenciales se utilizaron para localizar las singularidades de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, pasaron algunos años antes de que Hörmander introdujera el concepto de *conjunto de frentes de onda*. En su conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos de Niza, en 1970, Hörmander definió el conjunto de frentes de onda de una distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $WF(u)$, como el subconjunto de $T^*(\mathbb{R}^n)$ formado por la intersección de los conjuntos característicos de todos los operadores pseudodiferenciales A tales que $Au \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando teoría de regularidad elíptica estándar, se sigue que la proyección del conjunto de frentes de onda $WF(u)$ sobre $\mathbb{R}^n$ coincide con el soporte singular de u. Además, la definición garantiza que $WF(Au) \subset WF(u)$ si A es un operador pseudodiferencial. Así, el conjunto de frentes de onda describe tanto la localización de las singularidades como las direcciones de las frecuencias que producen tales singularidades.

La prueba de estimaciones *a priori* para operadores diferenciales se reduce a menudo a la positividad de cierto operador en L^2. La desigualdad de Gårding clásica establece que si $P(x,D)$ es un operador diferencial con $P \in S^m_{1,0}$ y $P(x,\xi) \geq c\,(1+|\xi|)^m$, para ciertos $m > 0$ y $c > 0$, entonces

$$\operatorname{Re}(P(x,D)u,u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq -C\,(u,u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

donde $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ designa el producto escalar de $L^2(\mathbb{R}^n)$. La desigualdad anterior también se verifica en el caso de operadores pseudodiferenciales con símbolo en $S^m_{\varrho,\delta}$ (la prueba, de hecho, es bastante sencilla). En 1966, Hörmander probó un resultado más fuerte, conocido como *desigualdad de Gårding fina*, y en [24, Teorema 18.6.7], probó la desigualdad para $P \in S^{\varrho-\delta}_{\varrho,\delta}$ y $P \geq 0$. En 1971, Melin consiguió probar un refinamiento importante del segundo miembro, y en 1978, Fefferman y Phong probaron que la desigualdad es válida cuando $P \in S^{2(\varrho-\delta)}_{\varrho,\delta}$ y $P \geq 0$, lo que a menudo supone una mejora técnica muy significativa.

El estudio de la existencia de soluciones de ecuaciones (pseudo)diferenciales llevó a Beals y Fefferman a introducir clases de símbolos mucho más generales, que se pueden construir a la medida de la ecuación estudiada. Hörmander llevó a cabo una extensión más en [18], usando una variante de la definición de operador pseudodiferencial que ya había propuesto Weyl en su trabajo sobre mecánica cuántica. La invarianza simpléctica del método de Weyl es la que permite una mayor generalidad.

3. Operadores integrales de Fourier

Como acabamos de ver, los operadores pseudodiferenciales no pueden incrementar el conjunto de frentes de onda. En consecuencia, un operador (pseudo)diferencial no puede tener una solución fundamental (o parametriz[12]) pseudodiferencial salvo que sea hipoelíptico[13].

En 1957, Lax construyó parametrices para ciertos operadores diferenciales hiperbólicos como combinaciones lineales de *operadores integrales de Fourier*. En el caso más sencillo, los operadores integrales de Fourier son de la forma (1) con un exponente diferente:

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int a(x,\xi) e^{i\varphi(x,\xi)} \hat{u}(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

donde $\varphi(x,\xi)$ es una función homogénea de grado 1 en ξ, positiva y con $\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial \xi}\right) \neq 0$. Hörmander hizo una referencia a esta construcción en [6]; sin embargo, no pudo abordar su estudio con las técnicas que conocía en ese momento.

A cada operador de la forma (2), se le puede asociar una transformación canónica χ con función generadora φ:

$$\chi : \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi), \xi\Big) \mapsto \Big(x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi)\Big).$$

Esta transformación tiene la importante propiedad de que

$$WF(Au) \subset \chi(WF(u)), \qquad u \in \mathcal{D}'.$$

[12]Una *parametriz* (del inglés, *parametrix*) de un operador diferencial $P(D)$ con coeficientes constantes es una distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(D)u = \delta + \omega$, con $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

[13]Un operador (pseudo)diferencial P en un conjunto abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ (o en una variedad X) se dice *hipoelíptico* si el soporte singular de u coincide con el soporte singular de Pu, para $u \in \mathcal{D}'(X)$.

En 1968, Hörmander inició un estudio sistemático de este tipo de operadores en relación con un problema de análisis asintótico espectral (véase la sección 8). Más tarde, presentó una teoría más completa, general y global (cf. [13]). Los operadores integrales de Fourier permiten simplificaciones de los operadores (pseudo)diferenciales ya que, según observó Egorov, la conjugación por un operador integral de Fourier invertible cambia el símbolo principal por composición con la transformación canónica. Duistermaat y Hörmander aprovecharon este hecho para completar la teoría (cf. [1]).

4. Regularidad de la solución: operadores hipoelípticos

En su tesis doctoral, Hörmander caracterizó los operadores diferenciales hipoelípticos con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^n$. La clase más simple de operadores diferenciales hipoelípticos con coeficientes variables es la clase de los operadores elípticos. Un operador diferencial P de orden m se dice *elíptico* si su símbolo principal, $p(x,\xi)$, no se anula cuando $\xi \neq 0$. Si denotamos por $H^{\text{loc}}_{(m)} = \{u : D^\alpha u \in L^2_{\text{loc}},\ |\alpha| \leq m\}$, entonces P es elíptico si y sólo si $Pu \in H^{\text{loc}}_{(0)}$ implica que $u \in H^{\text{loc}}_{(0)}$. La definición de los espacios de Sobolev $H^{\text{loc}}_{(s)}$ se puede extender a cualquier $s \in \mathbb{R}$ de forma única, de manera que para todo operador pseudodiferencial elíptico de orden $m \in \mathbb{R}$, se tiene que $Pu \in H^{\text{loc}}_{(0)}$ si y sólo si $u \in H^{\text{loc}}_{(m)}$, y, de forma más general, $Pu \in H^{\text{loc}}_{(s)}$ si y sólo si $u \in H^{\text{loc}}_{(s+m)}$.

Los operadores diferenciales elípticos con coeficientes suaves se pueden tratar fácilmente como ligeras perturbaciones de operadores diferenciales elípticos con coeficientes constantes. Malgrange y Hörmander consideraron una clase de operadores diferenciales hipoelípticos que se pueden estudiar de manera similar, como ligeras perturbaciones de operadores diferenciales hipoelípticos con coeficientes constantes (véase [6, capítulo VII]). En su momento, los resultados que obtuvieron parecían bastante generales, pero Treves pronto encontró operadores hipoelípticos para los que estos resultados no eran aplicables. En 1961, Hörmander desarrolló las ideas de Treves como una versión incompleta y muy primitiva de la teoría de operadores pseudodiferenciales. Más tarde, ya en el marco pseudodiferencial, Hörmander probó que si P es un operador pseudodiferencial con símbolo $p \in S^m_{\varrho,\delta}$ y se verifican las condiciones

$$|p(x,\xi)^{-1}\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}|\xi|^{-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \qquad |\xi| > C,$$
$$|p(x,\xi)^{-1}| \leq C|\xi|^{m'}, \qquad |\xi| > C,$$

entonces P es hipoelíptico (cf. [8], donde también se prueba un resultado más general para sistemas).

Es fácil probar que, cuando $\delta \geq 1-\varrho$, los operadores diferenciales de segundo orden que satisfacen las condiciones anteriores son elípticos. Esto llevó a Hörmander a estudiar en detalle los operadores hipoelípticos de segundo orden (cf. [10]). En este contexto, la ecuación de Kolmogorov es una ecuación modelo clásica. Esta ecuación surge en la teoría del movimiento browniano, y seguramente es más conocida por los probabilistas que por los expertos en ecuaciones en derivadas parciales. El operador de Kolmogorov está dado por

$$P = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 + x\,\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t},$$

con coordenadas $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. Kolmogorov construyó una solución fundamental explícita, singular sólo sobre la diagonal, mostrando que este operador es hipoelíptico.

Los resultados de Hörmander no se pueden aplicar a este operador puesto que, al congelar los coeficientes, se obtiene un operador con coeficientes constantes que actúa sólo sobre un subespacio bidimensional. Sin embargo, los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$ no satisfacen la condición de integrabilidad de Frobenius, de forma que el operador no actúa exclusivamente sobre subvariedades. Hörmander puso de manifiesto la importancia de este hecho y probó, de forma más general, que si

$$P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c, \tag{3}$$

donde $X_0, X_1, \ldots, X_r$ son campos vectoriales reales suaves en una variedad M de dimensión n, y entre los operadores X_j, $[X_j, X_k]$, $[X_j, [X_k, X_l]], \ldots$, obtenidos tomando conmutadores repetidamente, es posible encontrar una base del espacio tangente en cualquier punto de M, entonces el operador P es hipoelíptico. La condición sobre los campos vectoriales es necesaria en el sentido de que si el rango es menor que n en un subconjunto abierto, entonces el operador sólo actúa sobre un número de coordenadas locales inferior a n (si éstas se escogen de forma adecuada), de manera que el operador no puede ser hipoelíptico. Esta condición se puede relajar en subconjuntos más pequeños.

Un operador pseudodiferencial P de orden m y tipo $1, 0$ se dice *subelíptico con pérdida de δ derivadas*[14] $(0 < \delta < 1)$ si para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se verifica que

$$Pu \in H_{(s)}^{\mathrm{loc}} \;\Rightarrow\; u \in H_{(s+m-\delta)}^{\mathrm{loc}}. \tag{4}$$

Para $\delta = 0$, esta condición es equivalente a la elipticidad; la hipótesis $\delta < 1$ implica que la condición (4) sólo depende del símbolo principal del operador. Hörmander probó que si el operador P no es elíptico y satisface la condición (4), entonces $\delta \geq \frac{1}{2}$ (véase [9]), y demostró que si $\delta = \frac{1}{2}$, la condición (4) es equivalente a la siguiente:

$$\{\mathrm{Re}(p(x,\xi)), \mathrm{Im}(p(x,\xi))\} > 0, \qquad \text{cuando } p(x,\xi) = 0, \tag{5}$$

donde $\{\cdot,\cdot\}$ denota el *corchete de Poisson*. Existen operadores pseudodiferenciales con esta propiedad, pero no existen operadores diferenciales verificando (5) debido a que el corchete de Poisson en ese caso es una función impar de ξ.

En [9], Hörmander obtuvo una condición implícita de subelipticidad con pérdida de $\frac{1}{2}$ derivadas para sistemas. Más tarde, en [20], consiguió probar una condición algo más explícita. Lo cierto es que no hay resultados realmente satisfactorios sobre subelipticidad para sistemas con pérdida de δ derivadas, ni siquiera cuando $\delta = \frac{1}{2}$.

[14] Hörmander introdujo el término *subelipticidad* en [24] para el caso $\delta = \frac{1}{2}$.

Por contra, en el caso escalar, Egorov encontró condiciones necesarias y suficientes para la subelipticidad con pérdida de δ derivadas; la prueba de suficiencia fue completada por Hörmander en [19]. Los resultados muestran que el mejor δ es siempre de la forma $\frac{k}{(k+1)}$, donde k es un entero positivo, y las condiciones que sustituyen a (5) involucran los corchetes de Poisson de $\mathrm{Re}(p)$ e $\mathrm{Im}(p)$ de orden $\leq k$ sobre las características.

Los operadores hipoelípticos considerados lo son también microlocalmente ya que la igualdad de los soportes singulares de u y Pu que se exige a un operador hipoelíptico se puede sustituir por la siguiente condición:

$$WF(u) = WF(Pu), \qquad u \in \mathcal{D}'(X).$$

Esto sigue siendo cierto en un subconjunto cónico abierto del fibrado cotangente si las condiciones anteriores sólo se satisfacen allí.

5. Existencia de solución y propagación de singularidades

En 1957, Hans Lewy [3] descubrió que existen ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes $\mathcal{C}^\infty$ que no poseen ninguna solución en ningún subconjunto abierto. Este hallazgo llevó a Hörmander a un estudio sistemático de la existencia de soluciones locales de ecuaciones diferenciales. Hörmander probó que si $p(x,\xi)$ es el símbolo principal de un operador diferencial P de orden m en $\mathbb{R}^n$, entonces la ecuación $Pu = f$ no tiene solución en el sentido de distribuciones en cualquier entorno de un punto x^0 y para la mayoría de $f \in \mathcal{C}^\infty$ salvo que el corchete de Poisson $\{\mathrm{Re}(p), \mathrm{Im}(p)\}$ se anule en los ceros de p en un entorno de x^0, esto es,

$$p(x,\xi) = 0 \;\Rightarrow\; \{\mathrm{Re}(p(x,\xi)), \mathrm{Im}(p(x,\xi))\} = 0. \tag{6}$$

También probó que si

$$\{\mathrm{Re}(p(x,\xi)), \mathrm{Im}(p(x,\xi))\} = \mathrm{Re}(p(x,\xi)a(x,\xi)), \tag{7}$$

en un entorno de x^0, para cierta función a polinomial en ξ y con coeficientes de clase $\mathcal{C}^1$, y si además

$$p'_\xi(x,\xi) \neq 0, \qquad \text{para } \xi \neq 0, \tag{8}$$

entonces la ecuación $Pu = f$ tiene una solución $u \in H^{\mathrm{loc}}_{(s+m-1)}$ en un entorno de x^0, para cualquier $f \in H^{\mathrm{loc}}_{(s)}$. Claramente, entre las condiciones (6) y (7) hay un vacío.

En [9], motivado por el estudio de problemas de contorno para operadores elípticos, Hörmander analizó el problema de la existencia de solución de ecuaciones pseudodiferenciales. Probó que los resultados anteriores son válidos para operadores pseudodiferenciales si las condiciones (6) y (7) se sustituyen, respectivamente, por las siguientes:

$$p(x,\xi) = 0 \;\Rightarrow\; \{\mathrm{Re}(p(x,\xi)), \mathrm{Im}(p(x,\xi))\} \leq 0, \tag{9}$$

$$\{\mathrm{Re}(p(x,\xi)), \mathrm{Im}(p(x,\xi))\} \leq \mathrm{Re}(p(x,\xi)a(x,\xi)). \tag{10}$$

La condición (9) se conoce como *condición* (Ψ). Esta condición impide que $\mathrm{Im}(p)$ cambie de signo de negativo a positivo en un cero simple en la dirección positiva sobre una bicaracterística de $\mathrm{Re}(p)$. Nirenberg y Treves probaron que esos cambios de signo no deben ocurrir en ningún cero de orden finito, y trabajos posteriores basados en una idea de Moyer han mostrado que, si existen soluciones locales, no hay cambios de signo.

Para los operadores diferenciales, se verifica que $p(x,-\xi) = (-1)^m p(x,\xi)$, y por tanto, la condición (Ψ) implica que no hay cambios de signo, lo que se conoce como *condición* (P). Nirenberg y Treves también probaron que, bajo las condiciones (P) y (8), se tiene existencia local si el símbolo principal p es analítico real. Más tarde, Beals y Fefferman consiguieron eliminar la hipótesis de analiticidad real de p. Aún no se sabe si hay existencia local bajo la condición (Ψ).

Los resultados de existencia mencionados se probaron primero en [17] y no son sólo locales. En realidad, son válidos sobre conjuntos compactos arbitrarios que no corten ninguna bicaracterística completa del operador. También garantizan que las soluciones son de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuando lo son los datos. La clave para estos resultados semiglobales es el estudio de la propagación de las singularidades de las soluciones de ecuaciones pseudodiferenciales. En la charla que impartió en el Congreso Internacional de Matemáticos de Estocolmo, en 1962, Hörmander dio un resultado de este tipo muy primitivo. Grushin (1961) facilitó la obtención de resultados más precisos probando, en el caso de coeficientes constantes, que si x^0 está en el soporte singular de u, entonces éste contiene una recta bicaracterística que pasa por x^0. Hörmander anunció en 1969 una extensión de este resultado al caso de operadores con coeficientes variables, pero su conclusión sólo era local, debido a que su demostración dependía de una versión local temprana de la teoría de operadores integrales de Fourier.

Con el fin de eliminar esta carencia, entre 1971 y 1972, Hörmander desarrolló una teoría global que le permitió probar directamente que el soporte singular de u debe contener una bicaracterística completa. Cuando había conseguido cerrar su teoría, concibió la idea del conjunto de frentes de onda. El enunciado preciso sobre la propagación de singularidades es que si $Pu \in \mathcal{C}^\infty$ y $(x^0,\xi^0) \in WF(u)$, entonces la banda bicaracterística que comienza en (x^0,ξ^0) está contenida en $WF(u)$, suponiendo que el símbolo principal es real. Si se elimina la hipótesis $Pu \in \mathcal{C}^\infty$, la conclusión es que la banda bicaracterística permanece en $WF(u)$ hasta que encuentra $WF(Pu)$.

Una curva bicaracterística es la proyección de una banda bicaracterística sobre la base, así que no está determinada por su punto de partida. Como consecuencia, en la versión microlocal del teorema el resultado local implica el global. Hörmander esbozó una demostración sencilla de este resultado en la conferencia que dictó en el Congreso Internacional de Matemáticos de Niza, en 1970.

En [14], Hörmander extendió el teorema de propagación a símbolos con $\mathrm{Im}(p) \geq 0$ y en [1], en colaboración con Duistermaat, probó un resultado análogo para el caso de características en las que las diferenciales de $\mathrm{Re}(p)$ e $\mathrm{Im}(p)$ son linealmente independientes y el corchete de Poisson $\{\mathrm{Re}(p), \mathrm{Im}(p)\}$ se anula en los ceros de p. En [17], Hörmander realizó un estudio bastante completo sobre la propagación de singularidades para operadores pseudodiferenciales arbitrarios que satisfacen la condición (P), resultados que fueron completados por Dencker. Algunos de los resultados sobre propagación de singularidades son válidos para operadores que sólo satisfacen la condición (Ψ), pero no hay resultados generales satisfactorios en este sentido.

6. El Teorema de Unicidad de Holmgren

El teorema de unicidad de Holmgren clásico establece que una solución clásica de una ecuación diferencial lineal $P(D)u = 0$ que se anule en un lado de una superficie $\mathcal{C}^1$, se debe anular en una vecindad de cualquier punto no característico. Hörmander extendió este resultado a soluciones en el sentido de distribuciones (véase [6]). De hecho, usando un argumento geométrico sencillo, concluyó que si la superficie es $\mathcal{C}^2$, el resultado también es cierto en puntos característicos en los que la curvatura de la superficie sea positiva con respecto a la bicaracterística tangente (cf. [5, Teorema 5.1]).

John había observado que la prueba del teorema de unicidad de Holmgren se podía modificar para probar resultados de analiticidad, como la analiticidad de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas con coeficientes analíticos. El recíproco de este resultado es cierto cuando las singularidades analíticas han sido microlocalizadas en un conjunto que denotaremos $WF_A(u)$, siendo u una hiperfunción cualquiera. El conjunto $WF_A(u)$ es similar al conjunto de frentes de onda y su proyección sobre la base es el *soporte singular analítico* de u, $\operatorname{sing\,supp}_A(u)$, que es el complementario del conjunto abierto más grande en el que u es una función analítica real.

La relación con el teorema de unicidad de Holmgren viene dada por los dos resultados siguientes. En primer lugar, si P es un operador diferencial con coeficientes analíticos reales y $Pu = 0$, entonces $WF_A(u)$ está contenido en el conjunto característico de P. Este resultado es una versión microlocal del teorema de regularidad analítica estándar para ecuaciones diferenciales elípticas. En segundo lugar, si u es una hiperfunción que se anula en un lado de una superficie $\mathcal{C}^2$ que pasa por un punto $x^0 \in \operatorname{supp}(u)$, entonces $WF_A(u)$ contiene a (x^0, ν) si ν es conormal a la superficie en x^0. Este resultado es una consecuencia de parte de los argumentos utilizados inicialmente para probar el teorema de unicidad de Holmgren.

Si la parte principal del operador P toma valores reales, entonces, como consecuencia de los dos resultados anteriores y de un resultado sobre la propagación de singularidades analíticas, se tiene que si $Pu = 0$ y u se anula sobre un lado de una hipersuperficie $\mathcal{C}^1$ que pasa por $x^0 \in \operatorname{supp}(u)$, la superficie es característica en x^0 y la banda bicaracterística completa por una conormal debe permanecer en $WF_A(u)$, de modo que la proyección sobre la base permanece en $\operatorname{supp}(u)$. Este resultado representa una gran mejora del Teorema 5.1 de [5] y fue obtenido de forma independiente por Hörmander y Kawai.

Gracias a una comprensión más profunda de los resultados anteriores, se han obtenido muchas otras mejoras del teorema de unicidad de Holmgren. Hörmander hizo una revisión en [22].

7. Estimaciones de Carleman

Hörmander dedicó la sección 6 de [5] y el capítulo VIII de su primer libro (cf. [6]) a estimaciones de Carleman de la forma

$$\tau \int |D^{m-1}u|^2 e^{2\tau\varphi}\,dx \le C_1 \int |Pu|^2 e^{2\tau\varphi}\,dx + C_2 \sum_{j=0}^{m-2} \tau^{2(m-j)-1} \int |D^j u|^2 e^{2\tau\varphi}\,dx,$$

donde $u \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$, siendo $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, y P es un operador diferencial de orden m en una vecindad de K. Este tipo de estimaciones con $C_2 \neq 0$ se utilizaron para probar teoremas de existencia y algunos resultados muy débiles sobre propagación de singularidades. Sin embargo, estos resultados se quedaron obsoletos por los descritos en la sección 5. Las estimaciones con $C_2 = 0$,

$$\tau \int |D^{m-1}u|^2 e^{2\tau\varphi}\,dx \le C_1 \int |Pu|^2 e^{2\tau\varphi}\,dx, \qquad u \in \mathcal{C}_0^\infty(K), \tag{11}$$

aún se utilizan para probar resultados de unicidad.

Hörmander demostró en [6] que, si se verifica la desigualdad anterior, entonces

$$|\xi + i\tau\varphi'(x)|^{2(m-1)} \le C_1 \frac{\{\overline{p(x,\xi+i\tau\varphi'(x))}, p(x,\xi+i\tau\varphi'(x))\}}{2i\tau} \tag{12}$$

si $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ y $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x)) = 0$, siendo p el símbolo principal de P. Si suponemos que se satisface la identidad (7), pasando al límite cuando $\tau \to 0$ en (12), obtenemos que

$$|\xi|^{2(m-1)} \le C_1 \operatorname{Re}\{\overline{p(x,\xi)}, \{p(x,\xi), \varphi(x)\}\}, \tag{13}$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $p(x,\xi) = 0$. Recíprocamente, si se satisface la identidad (7), entonces la condición (12) implica (11) (con una constante C_1 más grande). Más tarde, usando la cota inferior obtenida por Fefferman y Phong para operadores pseudodiferenciales, Hörmander consiguió debilitar la hipótesis (7), sustituyéndola por la siguiente:

$$|\{\overline{p(x,\xi)}, p(x,\xi)\}| \le C_3\, |p(x,\xi)||\xi|^{m-1}. \tag{14}$$

Cuando la estimación (11) se usa para probar resultados de unicidad, sólo son importantes los conjuntos de nivel de φ. Si se sustituye φ por una función convexa creciente de φ, como, por ejemplo, $e^{\lambda\varphi}$ para algún $\lambda > 0$ grande, se añade un término positivo en los segundos miembros de (12) y (13) salvo que

$$\langle p'_\xi(x,\xi+i\tau\varphi'(x)), \varphi'(x)\rangle = \{p(x,\xi+i\tau\varphi'(x)), \varphi(x)\} = 0. \tag{15}$$

Si la hipótesis (12) (resp., (13)) sólo es válida cuando $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x)) = 0$ (resp., $p(x,\xi) = 0$) y se verifica (15), es posible modificar φ como se ha indicado sin cambiar los conjuntos de nivel, de modo que la hipótesis (12) (resp., (13)) es válida con una constante C_1 diferente, suponiendo exclusivamente que $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x)) = 0$ (resp.,

$p(x,\xi)=0$). Usando un argumento de Carleman estándar, se sigue que si $Pu=0$, $u\in H^{\mathrm{loc}}_{(m-1)}$ en una vecindad de x^0 y $u=0$ cuando $\varphi(x)>\varphi(x^0)$, entonces $u=0$ en una vecindad de x^0.

En la sección 8.9 de [6], Hörmander daba algunos ejemplos, basados en construcciones de A. Pliš y P. Cohen, que ponían de manifiesto que la hipótesis de convexidad en este resultado de unicidad, en general, no se puede relajar. En [16], Hörmander realizó un estudio más sistemático de estos ejemplos. Las construcciones de Pliš y Cohen se basaban en perturbaciones del operador mediante términos de orden más bajo pero positivo. Alinhac construyó ejemplos mucho mejores y probó que la unicidad falla en cualquiera de las situaciones siguientes:

- Si se añade a P un término $\mathcal{C}^\infty$ adecuado de orden cero cuando no se verifica la condición (6).
- Si el símbolo principal p tiene coeficientes reales y $\varphi(x)\le\varphi(x^0)$ sobre una curva bicaracterística que pasa por x^0.
- Si el segundo miembro de (12) se anula para una familia adecuada de ceros cuando $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x))=0$ y se satisface (15).

Strauss y Treves probaron que, para operadores diferenciales de primer orden, hay unicidad para todas las superficies no características si se satisface la condición (P). Posteriormente, Colombini y Del Santo probaron que la condición (14) no se puede sustituir por la condición (P) en el resultado de unicidad anterior. En su ejemplo, no hay soluciones no triviales de $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x))=0$ (resp., $p(x,\xi)=0$) que además verifiquen (15).

En 1991, Robbiano hizo un descubrimiento sorprendente relativo a la unicidad del problema de Cauchy. Probó que para un operador diferencial en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma

$$P=D_t^2-A(x,D_x),$$

que es hiperbólico con respecto a t, hay unicidad del problema de Cauchy sobre cualquier superficie cilíndrica en la dirección de t. Esto sería falso en general para términos de orden más bajo con coeficientes dependientes de t. Poco después, Hörmander (cf. [21]) dio una versión más precisa de este resultado. Concretamente, estableció que hay continuación única de las soluciones de la ecuación $Pu=0$ a través de una superficie *tipo tiempo* con conormal (τ,ξ) en un punto (t,x) suponiendo que

$$\tfrac{27}{23}\tau^2-a(x,\xi)<0.$$

En 1995, Tataru probó que hay continuación única a través de todas las superficies no características. Éste es un caso particular de un resultado general que establece que si el símbolo principal es invariante por traslaciones en un subespacio vectorial $\mathcal{A}$ y todos los coeficientes son analíticos reales en la dirección de $\mathcal{A}$, entonces el teorema de unicidad anterior es válido si ξ es una conormal de $\mathcal{A}$, $p(x,\xi+i\tau\varphi'(x))=0$ (resp., $p(x,\xi)=0$), y se satisface la condición de convexidad (12) (resp., (13)) y la condición (15). Dos años después, Hörmander demostró en [23] que es suficiente suponer que la restricción del símbolo principal al fibrado conormal de $\mathcal{A}$ y sus espacios paralelos es invariante por traslaciones (hay mejoras similares de los otros resultados de Tataru).

8. Análisis asintótico espectral

Cuando Hörmander era estudiante de doctorado en Lund, Lars Gårding y Åke Pleijel se dedicaban al estudio de las propiedades asintóticas de los autovalores y autofunciones de operadores diferenciales elípticos. Hörmander escogió una dirección diferente para su tesis doctoral, pero estaba al tanto del estado de este tema.

Desde el trabajo de Carleman en los años treinta, el principal método para abordar estas cuestiones ha sido estudiar el núcleo de alguna función del operador diferencial, como el resolvente o la transformada de Laplace. Los operadores pseudodiferenciales se habían revelado como una potente herramienta para la construcción de parametrices, así que era natural que Hörmander tratara de usarlos en este ámbito.

Sea $P(x,D)$ un operador diferencial elíptico de orden m con coeficientes $\mathcal{C}^\infty$ en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea p su símbolo principal. Denotamos por $\mathcal{P}$ la extensión autoadjunta del operador P en $L^2(\Omega)$, (E_λ) la resolución espectral de $\mathcal{P}$ y $e(x,y,\lambda)$ el núcleo de E_λ. Suponemos que $\mathcal{P}$ está acotada inferiormente. Utilizando propiedades asintóticas del resolvente de $\mathcal{P}$, Gårding demostró que

$$R(x,\lambda) = \lambda^{-n/m} e(x,x,\lambda) - \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{p(x,\xi)<1} d\xi \;\to\; 0, \qquad \text{cuando } \lambda \to +\infty.$$

En el caso de operadores con coeficientes constantes, Gårding probó que $R(x,\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/m})$. Avakumovič obtuvo este resultado para operadores de segundo orden con coeficientes variables. Hörmander utilizó cálculo pseudodiferencial para construir el resolvente $(\mathcal{P}-z)^{-1}$ y consiguió probar que $R(x,\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-\theta/m})$, para cualquier $\theta < 1/2$ ($\theta < 1$ si los coeficientes de la parte principal son constantes); cf. [12]. Agmon y Kannai obtuvieron el mismo resultado de forma independiente usando técnicas diferentes.

Hörmander puso de manifiesto la importancia del valor de θ para las propiedades de sumabilidad del desarrollo en autofunciones con respecto a $\mathcal{P}$. Avakumovič había obtenido el valor óptimo $\theta = 1$ porque había empleado la construcción de parametrices de Hadamard para ecuaciones diferenciales de segundo orden, que aprovecha sistemas de coordenadas geodésicas. En [11], Hörmander consiguió probar que $R(x,\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/m})$ en general, usando operadores integrales de Fourier para construir una parametriz del operador pseudodiferencial hiperbólico

$$i\,\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{P}^{1/m},$$

después de una reducción a una variedad compacta, donde $\mathcal{P}$ es un operador positivo tal que $\mathcal{P}^{1/m}$ es un operador pseudodiferencial bien definido. Esta construcción tiene en cuenta la descripción de la propagación de singularidades de la óptica geométrica y fue el punto de partida para el trabajo sobre operadores integrales de Fourier descrito en la sección 3. Sólo fue necesario entender el operador $e^{-it\mathcal{P}^{1/m}}$ para valores pequeños de $|t|$. Trabajos posteriores, en los que $e^{-it\mathcal{P}^{1/m}}$ se estudia para valores grandes de $|t|$, han llevado a una comprensión mucho más profunda de los autovalores de operadores diferenciales elípticos y, en particular, de la relación entre la distribución de los autovalores y las bicaracterísticas cerradas (véase [24]).

9. Conclusión

Las contribuciones de Hörmander a la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales lineales han sido fundamentales, con importantes aportaciones a la teoría de operadores pseudodiferenciales, el desarrollo de una teoría general de operadores integrales de Fourier, el análisis de la regularidad de las soluciones a través de los operadores hipoelípticos, el estudio de las singularidades de ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes variables utilizando técnicas de análisis microlocal, resultados de existencia local y semiglobal, y extensiones del teorema de unicidad de Holmgren, entre otras.

En su obra, ha dado cuenta de una extraordinaria versatilidad y capacidad técnica. Además, ha sido un matemático muy prolífico. Ha escrito más de un centenar de artículos y varios libros, algunos de ellos considerados verdaderos clásicos, como su obra *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, que apareció por primera vez entre los años 1983 y 1985, o su reconocido libro *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.*

Referencias

[1] J.J. Duistermaat y L. Hörmander, Fourier integral operators II, *Acta Math.* **128** (1972), 183–269.

[2] L. Gårding, Hörmander's work on linear differential operators, *International Congress of Mathematicians* (Estocolmo, 1962), en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Estocolmo, 1963.

[3] H. Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. of Math.* **66** (1957), 155–158.

[4] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.* **94** (1955), 161–248.

[5] L. Hörmander, Existence, uniqueness and regularity of solutions of linear differential equations, en *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Estocolmo, 1962), pp. 339–346, *Inst. Mittag-Leffler*, Djursholm, 1963.

[6] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[7] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. van Nostrand Co., Princeton, 1966.

[8] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Amer. Math. Soc. Symp. on Singular Integrals*, pp. 138–183, 1966.

[9] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, *Ann. of Math.* **83** (1966), 129–209.

[10] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.

[11] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, *Acta Math.* **121** (1968), 193–218.

[12] L. Hörmander, On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, en *The Belfer Graduate School Science Conference Nov. 1966*, pp. 155–202, 1969.

[13] L. Hörmander, Fourier integral operators I, *Acta Math.* **127** (1971), 79–183.

[14] L. Hörmander, On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, *Ens. Math.* **17** (1971), 99–163.

[15] L. Hörmander, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), 671–704.

[16] L. Hörmander, Non-uniqueness for the Cauchy problem, *Springer Lecture Notes in Math.* **459** (1974), 36–72.

[17] L. Hörmander, Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-)differential operators of principal type, *Ann. of Math.* **108** (1978), 569–609.

[18] L. Hörmander, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 359–443.

[19] L. Hörmander, Subelliptic operators, en *Seminar on singularities of solutions of differential equations*, pp. 127–208, Princeton University Press, 1979.

[20] L. Hörmander, On the subelliptic test estimates, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), 339-363.

[21] L. Hörmander, A uniqueness theorem for second order hyperbolic differential equations, *Comm. Partial Differential Equations* **17** (1992), 699–714.

[22] L. Hörmander, Remarks on Holmgren's uniqueness theorem, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **43** (1993), 1223–1251.

[23] L. Hörmander, On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions, en *Geometrical Optics and Related Topics*, F. Colombini y N. Lerner (editores), Birkhäuser, Boston, 1997.

[24] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*, Springer, 1983–85.

[25] L. Hörmander, Autobiography, en *Fields Medallists' Lectures*, M. Sir Atiyah & D. Iagolnitzer (editores), World Scientific, 2003.

[26] L. Hörmander, Looking forward from ICM 1962, en *Fields Medallists' Lectures*, M. Sir Atiyah & D. Iagolnitzer (editores), World Scientific, 2003.

[27] J.J. Kohn y L. Nirenberg, On the algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), 269–305.

[28] K.-O. Widman, Household names in Swedish mathematics: Some who should be and some others, *EMS*, June 2004, 17–20.

María González Taboada, Dpto. de Matemáticas, Universidad de La Coruña
Correo electrónico: `mgtaboad@udc.es`