Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de septiembre de 2008.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 97. *Propuesto por Cezar Lupu y Cosmin Pohoata (estudiantes), Bucarest, Rumanía.*

Sean x, y y z números reales positivos. Probar que

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}-4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\geq 1-\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Problema 98. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaiyán.*

Supongamos una circunferencia inscrita en un cuadrado $ABCD$ tangente al lado AD en un punto M. Sean F y E dos puntos pertenecientes a los segmentos AM y MD, respectivamente, equidistantes de M. Demostrar que si el segmento BE es paralelo a la tangente a la circunferencia trazada por F y distinta de FM, entonces F es el punto medio del segmento AM.

PROBLEMA 99. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Sean $k, n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$G(k,n) = \sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2k\right)\Gamma\left(\frac{1}{3} - 2k\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n} - 2k\right)},$$

donde Γ denota la función Gamma. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} G(k, n+1) - G(k,n).$$

PROBLEMA 100. *Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.*

Probar la identidad

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}.$$

PROBLEMA 101. *Propuesto por Glenier L. Bello Burguet (estudiante), I. E. S. Hermanos d'Elhuyar, Logroño.*

Dos jugadores van escribiendo los dígitos de un número de n cifras; el primero escribe la primera cifra por la izquierda (distinta de cero), el segundo la segunda, y así sucesivamente. Si el número resultante es múltiplo de 11, gana el jugador que ha escrito la última cifra; en caso contrario, gana el otro. ¿Alguno de los jugadores puede aplicar una estrategia que le permita ganar siempre?

PROBLEMA 102. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Inscribir en un triángulo dado el triángulo equilátero de área mínima.

Soluciones

PROBLEMA 73. *Propuesto por Florian Luca, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia (Michoacán), México.*

Si $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de un entero positivo n, diremos que n es multiplicativamente perfecto si $n \mid \sigma(n)$. Probar que sólo existen un número finito de valores de n tales que $\binom{2n}{n}$ es multiplicativamente perfecto.

Solución enviada por el proponente.

Denotamos por $\log x$ el logaritmo natural de x. Suponemos que n es grande. Como $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2 = (n+1)\cdots(2n)/n!$, deducimos que si $p \in [n+1, 2n)$, entonces $p \mid \binom{2n}{n}$. Además, como $2p \geq 2n+2 > 2n$, p^2 no divide a $\binom{2n}{n}$. Sea $m = \prod_{n+1\leq p<2n} p$. Entonces $\binom{2n}{n} = m\ell$, donde ℓ es un entero positivo coprimo con m. Entonces

$$\sigma\left(\binom{2n}{n}\right) = \sigma(m)\sigma(\ell) = \sigma(\ell) \prod_{n+1\leq p<2n} (p+1).$$

Como $p+1$ es par para todo $p \geq n+1$ si $n > 1$, deducimos que $\sigma(\binom{2n}{n})$ es un múltiplo de $2^{\pi(2n)-\pi(n+1)}$, donde usamos $\pi(x) = \#\{p \leq x\}$. Por otro lado, es bien conocido que si $2^\alpha|\binom{2n}{n}$, entonces

$$\alpha = \sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \right).$$

Como $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$ y, si $2^k > 2n$, entonces los términos correspondientes a estos valores de k en la suma de arriba son cero, deducimos que, si κ es el mayor entero positivo tal que $2^\kappa \leq 2n$, entonces $\alpha \leq \kappa$. Pero, claramente, $\kappa = \lfloor \log(2n)/\log 2 \rfloor$. Ahora supongamos que $\binom{2n}{n}$ es multiplicativamente perfecto, es decir

$$\sigma\left(\binom{2n}{n}\right) = \binom{2n}{n} u$$

para algún entero u. Sea β el exponente de 2 en la factorización de u. Por los argumentos anteriores,

$$\beta \geq \pi(2n) - \pi(n+1) - \kappa \geq \pi(2n) - \pi(n+1) - \frac{\log(2n)}{\log 2}.$$

Por el Teorema del Número Primo, $\pi(2n) \sim (2n)/\log(2n) \sim 2n/\log n$ y $\pi(n+1) \sim n/\log n$ si $n \to \infty$. Por lo tanto, $\pi(2n) - \pi(n) \sim n/\log n$ para $n \to \infty$, lo que prueba que

$$\pi(2n) - \pi(n+1) - \frac{\log(2n)}{\log 2} > \frac{n}{2\log n} \qquad \text{si } n > n_0.$$

Por tanto, $u \geq 2^{n/(2\log n)}$. Sin embargo, es bien conocido que $\sigma(m)/m < c_1 \log\log m$ para todo $m > 3$, donde c_1 es una constante. Como $\binom{2n}{n} < 2^{2n}$, obtenemos que si $n > n_0$ entonces

$$2^{n/(2\log n)} \leq u = \frac{\sigma\left(\binom{2n}{n}\right)}{\binom{2n}{n}} \leq c_1 \log\log \binom{2n}{n} < c_1 \log\log(2^{2n}) = c_1 \log(2n \log 2),$$

lo que obviamente implica que n es acotado.

PROBLEMA 74. *Propuesto por Cezar Lupu (estudiante), Universidad de Bucarest, Bucarest, Rumanía.*

Dados a, b y c números reales positivos, probar que

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Solución enviada por David Garcés Urzainqui (estudiante), Universitat de València, Valencia.

Mediante sencillas manipulaciones algebraicas podemos ver que la desigualdad a probar es equivalente a

$$\frac{(a-c)(a-b)}{(b+c)^2}+\frac{(b-a)(b-c)}{(c+a)^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)^2}\geq 0. \tag{1}$$

Sin perdida de generalidad, podemos suponer $a\leq b\leq c$. Entonces, teniendo en cuenta que $a-c\leq a-b\leq 0$, obtenemos que el primer sumando del lado izquierdo de (1) es positivo. Para los otros dos sumandos tendremos que

$$\frac{(b-a)(b-c)}{(c+a)^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)^2}=(c-b)\left(\frac{c-a}{(a+b)^2}-\frac{b-a}{(c+a)^2}\right)\geq 0$$

por ser $b\leq c$, $0\leq b-a\leq c-a$ y $(a+b)^2\leq(a+c)^2$.

Además, se observa fácilmente que la igualdad se alcanza cuando $a=b=c$.

También resuelto por M. Fernández, J. C. González, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, A. Munaro, A. Oller, P. Perfetti, X. Ros (dos soluciones), A. Sáez, B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. La desigualdad del problema anterior ha sido probada por procedimientos muy variados. La gran mayoría de las soluciones recibidas utilizan como herramienta resultados muy generales, como la desigualdad de Schur o alguna de sus generalizaciones, la desigualdad de Muirhead o la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Otras soluciones, sin embargo, han sido obtenidas mediante sencillas manipulaciones algebraicas.

PROBLEMA 75. *Propuesto por Esther M. García Caballero y Samuel G. Moreno, Universidad de Jaén, Jaén.*

Aunque los orígenes del *doble cono* son inciertos (el francés Jean Theophile Desaguliers reivindica su descubrimiento en 1734), sí sabemos que su popularización se debe a George Adams, quien lo fabrica y comercializa a partir de 1759. El doble cono, también llamado *paradoja mecánica*, es uno de los más populares mecanismos de la Física Recreativa. El artefacto completo consiste en dos conos iguales, unidos rígidamente por sus bases circulares, y en dos rieles divergentes a modo de plano inclinado. Cuando el doble cono se sitúa cerca de la intersección de los rieles, en la parte inferior del plano inclinado, comienza a «girar hacia arriba». La Figura 1 muestra un doble cono; una ilustración animada del fenómeno descrito puede verse, por ejemplo, en `http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/esim.asp?c=500137`.

Si designamos por α al ángulo entre el plano inclinado y el plano horizontal, por β al ángulo de apertura de los rieles y por γ al ángulo que forma la generatriz del cono con la base del mismo, ¿puede obtenerse una relación entre α, β y γ para que el fenómeno ocurra tal como se ha descrito?

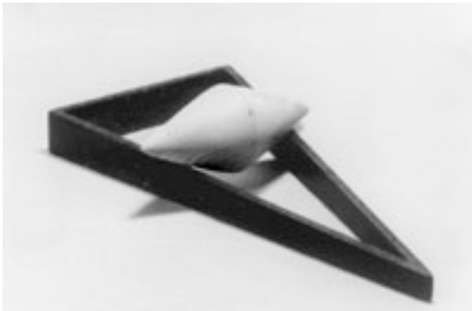
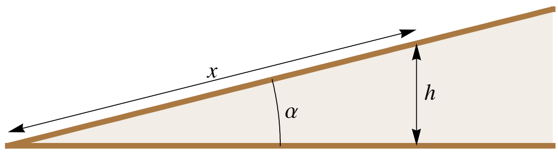


Figura 1: Imagen del doble cono

Solución enviada por Víctor López Ferrando (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Si llamamos Δh al incremento de la altura de los rieles y ΔH al incremento negativo de la altura del centro de masas del cono cuando se produce un desplazamiento Δx sobre los rieles, la condición que se debe satisfacer para que el cono «suba» es $\Delta h < \Delta H$.

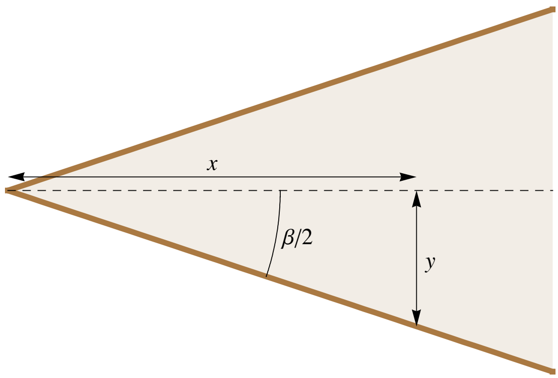
Considerando una vista de perfil de los rieles



tendremos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{x} \Longrightarrow \Delta h = \Delta x \operatorname{sen}\alpha.$$

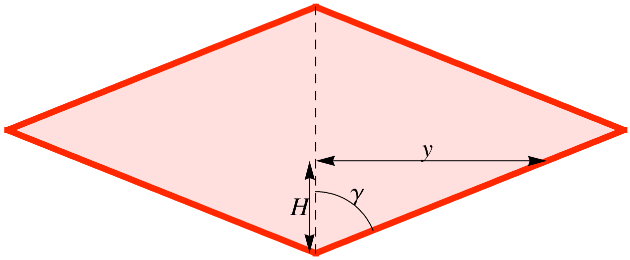
Esquematizando una vista desde arriba de los rieles



deducimos que

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{y}{x} \Longrightarrow \Delta y = \Delta x \tan\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{1}$$

Con una sección del cono



llegamos a la expresión

$$\tan\gamma = \frac{y}{H} \Longrightarrow \Delta H = \frac{\Delta y}{\tan\gamma},$$

de donde deducimos, usando (1), la relación

$$\Delta H = \Delta x \frac{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\gamma}.$$

De este modo, a partir de la condición $\Delta h < \Delta H$, obtenemos que debe cumplirse la desigualdad

$$\operatorname{sen}\alpha < \frac{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\gamma}.$$

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

PROBLEMA 76. *Propuesto por J. Manuel Gutiérrez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Supongamos que tenemos un retículo (puntos de coordenadas enteras) en el que para pasar de un punto a otro sólo es posible hacerlo avanzando hacia la derecha o hacia arriba; es decir, del punto (m, n) sólo podemos ir a los puntos $(m+1, n)$ y $(m, n+1)$. En estas condiciones, calcular, para $k, p \geq 1$, el número de caminos que unen los puntos $(0, 0)$ y $(k, k+p-1)$ sin tocar la recta $y = x + p$.

Solución enviada por Manuel Fernández López, I. E. S. María Sarmiento, Lugo.

Probaremos que el número de caminos es $\frac{p}{k+p}\binom{2k+p-1}{k}$. Observamos que en el caso $p = 1$ la solución son los números de Catalan $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

Identificamos cada camino con una sucesión ordenada formada por k letras H (desplazamientos horizontales) y $k+p-1$ letras V (desplazamientos verticales). Así, el número de caminos uniendo $(0, 0)$ con $(k, k+p-1)$ (pudiendo tocar la recta $y = x + p$) es $P_{2k+p-1}^{k,k+p-1} = \binom{2k+p-1}{k}$. Para determinar el número de caminos que no tocan la recta $y = x+p$ hallaremos el número de caminos que sí la tocan. Lo haremos estableciendo una biyección con el conjunto de caminos que unen los puntos $(0,0)$ y $(k-1, k+p)$, cuyo cardinal es $P_{2k+p-1}^{k-1,k+p} = \binom{2k+p-1}{k-1}$.

Sea c un camino uniendo el punto $(0,0)$ con el punto $(k, k+p-1)$ que toca la recta $y = x+p$. Entonces existe un entero i de forma que en los i primeros pasos de c se cumple que: número de letras V = número de letras $H + p$. Supongamos que i es el menor entero que cumple la anterior propiedad y escribimos $i = 2j+p$, siendo j = número de letras H. A c le hacemos corresponder el camino c' definido de la siguiente forma:

i) c' y c coinciden en los $2j+p$ primeros pasos,

ii) los $2(k-j)-1$ siguientes pasos de c' se obtienen a partir de c cambiando cada letra H en c por una V y cada V por una H.

Puesto que las $2(k-j)-1$ últimas posiciones de c contienen $k-j$ letras H y $k-j-1$ letras V, en el camino c' aparecen $j+k-j-1 = k-1$ letras H y $j+p+k-j-1 = k+p$ letras V. Es decir, c' es un camino uniendo $(0,0)$ y $(k-1, k+p)$. Obviamente a cada camino c le corresponde un único c'.

Recíprocamente, cualquier camino c' uniendo $(0,0)$ con $(k-1, k+p)$ debe tocar la recta $y = x+p$. De forma totalmente análoga a como hicimos anteriormente, asociamos a c' un único camino c que, como se comprueba fácilmente, une el punto $(0,0)$ con el punto $(k, k+p-1)$ y toca la recta $y = x+p$.

Por tanto, el número de caminos que une $(0,0)$ con $(k, k+p-1)$ sin tocar la recta $y = x+p$ es

$$\binom{2k+p-1}{k} - \binom{2k+p-1}{k-1} = \frac{p}{k+p}\binom{2k+p-1}{k}.$$

También resuelto por R. Granero y A. Ortega, D. Lasaosa, A. Sáez y el proponente.

Problema 78. *Propuesto por Javier Rodrigo, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.*

Llamamos triangulación de un polígono P a toda subdivisión de P en regiones triangulares de interiores disjuntos dos a dos, de modo que los vértices de las regiones sean también vértices del polígono P. Los lados de los triángulos los denominaremos aristas de la triangulación. El grado de un vértice indicará el número de aristas incidentes en él.

a) Sean $n \in \mathbb{N}$ y P un n-gono convexo. Probar que si n es múltiplo de tres, P admite una triangulación con todos los vértices de grado par, y que si n no es múltiplo de tres, existe una triangulación en la que todos los vértices excepto dos de ellos son de grado par.

b) Sean $k \in \mathbb{N}$ y C un $(3k+2)$-gono convexo. Si denotamos por a y b dos vértices adyacentes del mismo, probar que existe una triangulación de C en la que todos los vértices son de grado par excepto a y b.

Solución enviada por Andrea Munaro (estudiante), Universidad de Trento, Italia.

a) Si un polígono admite una triangulación verificando las propiedades dadas lo llamaremos *bueno*. En todas las situaciones supondremos los vértices numerados en sentido horario. Si el polígono es un triángulo es, obviamente, bueno. Si se trata de un hexágono podemos obtener una triangulación con todos sus vértices de grado par uniendo los etiquetados con un número impar.

Supongamos que $n = 3k$, entonces se cumple que

(1) Si un n-gono es *bueno* entones un $2n$-gono también es *bueno*.

(2) Si un $2n$-gono es *bueno* entonces un $(2n + 3)$-gono también es *bueno*.

Prueba de (1): Unimos los vértices del $2n$-gono que tienen número impar para obtener un n-gono *bueno*. Así, cada uno de los vértices impares tiene un grado dos unidades mayor que el que tiene respecto del n-gono y, por tanto, es de grado par. Además, cada vértice con un número par tiene grados dos.

Prueba de (2): Suponiendo que el polígono que une los vértices $1, \ldots, 2n$ es *bueno*, unimos el vértice etiquetado como $2n+2$ con 1 y $2n$, el $2n+1$ con $2n$ y $2n+2$, y el $2n + 3$ con 1 y $2n + 2$. De este modo, el vértice $2n + 2$ tiene grado cuatro mientras que los vértices 1 y $2n$ han aumentado su grado en dos unidades, no variando la paridad.

De (1) y (2), usando inducción, obtenemos que cada $3k$-gono es *bueno*.

Sea ahora $n = 3k + 1$. Supongamos que el polígono uniendo los $3k$ primeros vértices es *bueno*. Si conectamos el vértice $3k + 1$ con 1 y $3k$ estos últimos tendrán grado impar y el resto par.

Para $n = 3k + 2$, igual que antes, consideramos que el polígono uniendo los $3k$ primeros vértices es bueno y unimos el vértice $3k$ con $3k + 1$ y $3k + 2$, y el $3k + 2$ con 1 y $3k + 1$. Con esto, el vértice $3k$ aumenta su grado en dos unidades, el $3k + 1$ tiene grado dos, el $3k + 2$ es de grado tres y el grado del 1 aumenta en una unidad y pasa a ser impar.

b) Se sigue del apartado anterior cuando se ha analizado $n = 2k + 3$ tomando $a = 3k + 2$ y $b = 1$.

También resuelto por M. Fernández, D. Lasaosa, M. Peña, A. Sáez y el proponente.

PROBLEMA 79. *Propuesto por Ovidiu Bagdasar, Universidad Babes Bolyai, Cluj Napoca, Rumanía.*

Probar que si $n = 3m$, $m \in \mathbb{N}$, y $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i+1} \cdots a_{i+m} + a_{i+1} \cdots a_{i+2m}}\right) \geq n,$$

donde $a_{n+i} = a_i$.

Solución enviada por Juan Carlos González Vara, Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid.

Comenzamos demostrando la desigualdad en el caso $m = 1$, para el cual $n = 3$. Veamos que para $x, y, z > 0$ se verifica

$$(1 + xyz)\left(\frac{1}{x(1+y)} + \frac{1}{y(1+z)} + \frac{1}{z(1+x)}\right) \geq 3. \tag{1}$$

En efecto, tenemos

$$\frac{1+xyz}{x(1+y)} = \frac{1+x}{x(1+y)} + \frac{y(1+z)}{1+y} - 1, \qquad \frac{1+xyz}{y(1+z)} = \frac{1+y}{y(1+z)} + \frac{z(1+x)}{1+z} - 1$$

y

$$\frac{1+xyz}{z(1+x)} = \frac{1+z}{z(1+x)} + \frac{x(1+y)}{1+x} - 1.$$

Como $t + 1/t \geq 2$ para $t > 0$, resulta

$$\frac{1+xyz}{x(1+y)} + \frac{1+xyz}{y(1+z)} + \frac{1+xyz}{z(1+x)} \geq 2 + 2 + 2 - 3 = 3,$$

y se obtiene (1). Además, teniendo en cuenta que $t + 1/t = 2$ si y sólo si $t = 1$, la igualdad en (1) se alcanza para $x = y = z = 1$.

Sea ahora $m > 1$. Para $k = 1, 2, \ldots, m$, sean

$$x_k = a_{k+1} \cdots a_{k+m}, \qquad y_k = a_{k+m+1} \cdots a_{k+2m}, \qquad z_k = a_{k+2m+1} \cdots a_{k+n},$$

donde $a_{n+i} = a_i$. Si aplicamos (1) a los números reales positivos x_k, y_k, z_k, tenemos en cuenta que $x_k y_k z_k = \prod_{i=1}^{n} a_i$ para todo k, y sumamos en k, obtenemos la desigualdad propuesta. La igualdad se obtiene cuando $a_1 = \cdots = a_n = 1$.

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.