Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de diciembre de 2009.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 127. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaiyán.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo $\triangle ABC$. Si R y r denotan, respectivamente, el radio de la circunferencia circunscrita y el radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$, determinar todos los valores reales λ para los que se verifica la desigualdad

$$\lambda - 3(\lambda - 2)\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \leq \frac{R}{r}.$$

Problema 128. *Propuesto por Zdravko F. Starc, Vrsac, Serbia.*

Sean a, b y c tres números reales positivos. Probar que

$$\frac{2(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2} < \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} < \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4abc}.$$

PROBLEMA 129. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{\ln n}{2}-\frac{\gamma}{2}-\ln 2\right),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni definida mediante la identidad

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

PROBLEMA 130. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Determinar todos los enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$x^y+y^x=4x+3y.$$

PROBLEMA 131. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con el ángulo recto en A. Sean D y E dos puntos en BC que verifican $BD=DE=EC=a$. Si $AE=b$ y $AD=c$, probar que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3a\sqrt{\frac{6}{ab+bc+ca}}.$$

PROBLEMA 132. *Propuesto por Xavier Ros, estudiante, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión definida por la recurrencia

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{1}{x_n}\right).$$

¿Para qué valores de $x_0\in\mathbb{R}$ está bien definida la sucesión? En caso de estar bien definida, ¿cuándo es una sucesión periódica? (Entenderemos que una sucesión es periódica si existen n_0 y k tales que $x_n=x_{n+k}$ para $n\geq n_0$.)

NOTA. El Problema 125, aparecido en el número 1 del volumen 12, es exactamente igual que el Problema 1809 de la revista *Mathematics Magazine*, publicado en el número 5 de 2008 (correspondiente al mes de diciembre). Tras consultar con el proponente hemos decidido cambiar la propuesta correspondiente al Problema 125 por otra completamente nueva. Los lectores que hayan elaborado una solución para la primera propuesta del Problema 125 pueden enviarla a la revista *Mathematics Magazine*.

Problema 125 (nuevo). *Propuesto por Manuel Rodríguez Sánchez, Barcelona, España.*

Sea r el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo $\triangle ABC$. Sean m, n y p las distancias desde el incentro I a los vértices A, B y C respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{r^3} - \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{2}{mnp} = 0.$$

Soluciones

Problema 103. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx.$$

Solución enviada por Manuel Fernández López, I. E. S. María Sarmiento, Lugo.

Probaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Supongamos que $f(0) = 0$. Puesto que f es continua en $x = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$ para todo $x \in [0,\delta]$. Como f es continua en $[\delta,1]$, $f_n(x) = \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f_0(x) = 0$ en $[\delta,1]$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^1 f_n(x)\,dx = \int_\delta^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_\delta^1 f_0(x)\,dx = 0.$$

Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\int_\delta^1 f_n(x)\,dx| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq N$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| &\leq \int_0^\delta |f_n(x)|\,dx + \left|\int_\delta^1 f_n(x)\,dx\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{\pi}\arctan(n\delta) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $n \geq N$. Por tanto, hemos probado que, cuando $f(0) = 0$, el límite pedido es 0. En el caso general, la solución del problema se obtiene de las igualdades

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n(f(x) - f(0))}{1+n^2x^2}\,dx = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(0)}{1+n^2x^2}\,dx = f(0)\lim_{n\to\infty}\arctan n = \frac{\pi}{2}f(0).$$

También resuelto por A. Godoy, J. C. González, A. Martínez-Finkelshtein, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, X. Ros, J. Vinuesa y el proponente.

PROBLEMA 104. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaiyán.*

Probar que existe una única terna de sucesiones de números reales positivos a_i, b_i y c_i, con $i = 0, 1, 2, \ldots$, tales que $a_0+b_0+c_0 = 1$, $a_{i+1} = b_i+c_i-a_i$, $b_{i+1} = a_i+c_i-b_i$ y $c_{i+1} = a_i + b_i - c_i$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Solución enviada por Julio Benítez López, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.

Las sucesiones $a_n = b_n = c_n = 1/3$ cumplen trivialmente las condiciones del problema. Veamos que estas sucesiones son las únicas. Sean $\mathbf{x}_n = (a_n, b_n, c_n)^{\mathrm{t}}$ y $\mathbf{u} = (1/3, 1/3, 1/3)^{\mathrm{t}}$ (el superíndice $^{\mathrm{t}}$ denota transposición). Como

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= (b_n + c_n - a_n) + (a_n + c_n - b_n) + (a_n + b_n - c_n) \\ &= a_n + b_n + c_n, \end{aligned}$$

se prueba trivialmente por inducción que $a_n + b_n + c_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n + c_n - a_n \\ a_n + c_n - b_n \\ a_n + b_n - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n + c_n - 2a_n \\ a_n + b_n + c_n - 2b_n \\ a_n + b_n + c_n - 2c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2a_n \\ 1 - 2b_n \\ 1 - 2c_n \end{pmatrix} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{u} = (-2)(\mathbf{x}_n - \mathbf{u})$. De nuevo, otro argumento de inducción prueba que $\mathbf{x}_n - \mathbf{u} = (-2)^n(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u})$. Puesto que las componentes de $\mathbf{x}_n$ son positivas, de la igualdad anterior se deduce que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}$; y, por tanto, $\mathbf{x}_n = \mathbf{u}$ para cualquier natural n. En otras palabras: $a_n = b_n = c_n = 1/3$.

También resuelto por G. Bello, M. Fernández, A. Godoy, D. Lasaosa, P. Pefetti, J. Rivero, X. Ros, B. Salgueiro, J. A. Torné, J. Vinuesa y el proponente.

PROBLEMA 105. *Propuesto por Marius Olteanu, Rimnicu–Vilcea, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales no negativos. Probar que

$$9(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1) \geq 8(a^6+a^3+1)^{2/3}(b^6+b^3+1)^{2/3}(c^6+c^3+1)^{2/3}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos la siguiente generalización de la propuesta: sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a_i \in \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq n$; entonces

$$72^{n/3} \prod_{i=1}^{n} (a_i^6 + a_i^3 + 1)^{2/3} \geq 3^{2n/3} \prod_{i=1}^{n} (a_i^4 + 1) \geq 2^n \prod_{i=1}^{n} (a_i^6 + a_i^3 + 1)^{2/3}, \qquad (1)$$

con igualdad en el lado izquierdo de (1) si y sólo si todos los $a_i = -1$, y en el lado derecho si y sólo si todos los $a_i = 1$. La desigualdad propuesta se corresponde con el caso $n = 3$ del lado derecho de (1) y, por tanto, la igualdad se alcanzará cuando $a = b = c = 1$.

Para probar (1) consideremos, para todo $x \in \mathbb{R}$, la función

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{(x^6 + x^3 + 1)^{2/3}}$$

(nótese que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Al ser

$$f'(x) = \frac{2(x+1)x^2(x-1)^3}{(x^6 + x^3 + 1)^{5/3}},$$

tendremos que $f(x)$ crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decrece en $(-1, 1)$, presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. Como además $f(-1) = 2$, $f(1) = 2/3^{2/3}$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, y f es continua en $\mathbb{R}$, dichos extremos relativos son, en realidad, absolutos; es decir,

$$2 \geq f(x) \geq \frac{2}{3^{2/3}} \qquad (2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, con igualdad en el lado izquierdo si y sólo si $x = -1$, y en lado derecho si y sólo si $x = 1$. Ahora, particularizando (2) para $x = a_i$, con $1 \leq i \leq n$, y multiplicando miembro a miembro las n desigualdades que resultan, se obtiene que

$$2^n \geq \prod_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \frac{2^n}{3^{2n/3}},$$

con igualdad en el lado izquierdo si y sólo si $a_i = -1$, para $1 \leq i \leq n$, y en el lado derecho si y sólo si $a_i = 1$, $1 \leq i \leq n$. Como resulta sencillo comprobar, esta última desigualdad es equivalente a (1), con lo que concluimos.

También resuelto por G. Bello, M. Fernández, O. Furdui, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, J. Rivero, X. Ros y el proponente.

Problema 106. *Propuesto por C. Balbuena, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y P. García Vázquez, Universidad de Sevilla, Sevilla.*

Sean $c \geq 1$ un número real fijo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un conjunto de números reales con media aritmética $\overline{x}$ y tales que $x_i \geq 2c$. Demostrar que

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - c)^{x_i} \geq (\overline{x} - c)^{n\overline{x}}.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

La función $f(x) = x\ln(x-c)$ es convexa en $[2c, +\infty)$, ya que su derivada segunda es $f''(x) = \frac{x-2c}{(x-c)^2}$. Basta aplicar la propiedad de las funciones convexas que dice que la media de los valores de la función es mayor que el valor de la función en la media (conocida habitualmente como desigualdad de Jensen) para obtener que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f(\overline{x});$$

es decir,

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-c)^{x_i}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-c)^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ln(x_i-c)\\ &\geq n\overline{x}\ln(\overline{x}-c) = \ln(\overline{x}-c)^{n\overline{x}},\end{aligned}$$

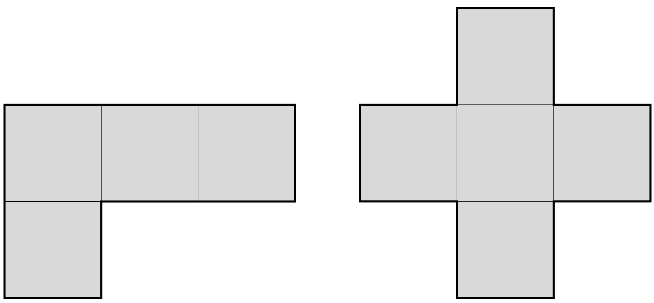
que es equivalente a la desigualdad propuesta.

NOTA. La restricción $c \geq 1$ no es necesaria. Para los valores $c < 0$ se deberá tomar $x_i > c$, ya que si no existirán expresiones sin sentido.

También resuelto por M. Fernández, D. Lasaosa, P. Pefetti, J. Rivero, X. Ros, B. Salgueiro y los proponentes.

PROBLEMA 107. *Propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.*

Para cubrir, sin solapamientos y sin dejar huecos, una superficie cuadrada de $n \times n$ unidades de área, se dispone de piezas de dos tipos como las que se muestran en la figura que aparece a continuación, donde cada cuadradito tiene una superficie unidad. Utilizando el mismo número de piezas de un tipo y de otro, ¿qué valores puede tomar n para que el recubrimiento sea posible?



Solución enviada por Joaquín Rivero Rodríguez, I. E. S. Antonio de Nebrija, Zalamea de la Serena, Badajoz.

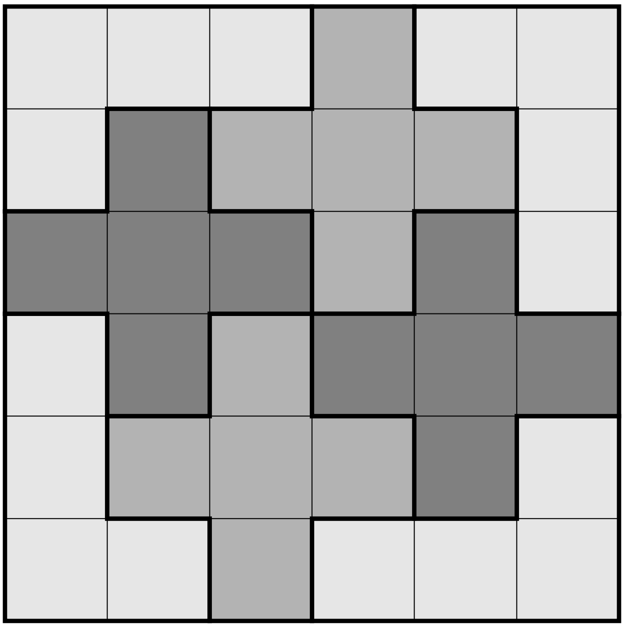
En primer lugar, al utilizarse el mismo número de piezas de ambos tipos, el número de unidades de área que componen la superficie total, n^2, debe ser múltiplo de 9 y, por tanto, n debe ser múltiplo de 3.

Por otro lado, si coloreamos los cuadraditos que componen la superficie que queremos recubrir como si fuera un tablero de ajedrez, alternando casillas blancas y negras, tenemos que:

- si n es par, hay el mismo número de casillas blancas que negras; mientras que
- si n es impar, la diferencia entre casillas blancas y negras es de una a favor de alguno de estos colores.

Si observamos esta diferencia (entre casillas blancas y negras) en los dos tipos de piezas que debemos usar, ésta es nula para el primero y vale tres para el segundo, por lo que no hay forma de obtener una diferencia de una casilla más de alguno de estos colores usando estas piezas. Podemos concluir, por tanto, que n debe ser par y, como debía ser múltiplo de 3, debe ser a su vez múltiplo de 6.

Para demostrar que $n = 6k$ (para algún k natural) es, no sólo una condición necesaria, sino también una condición suficiente, basta con dividir la superficie cuadrada de dimensiones $6k \times 6k$ en k^2 superficies de dimensiones 6×6, y recubrir éstas como en la figura que mostramos a continuación:



También resuelto por G. Bello, X. Ros, Ll. Sabater, C. Sánchez y el proponente. Se han recibido dos soluciones incorrectas.

PROBLEMA 108. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Dado un paraboloide elíptico en $\mathbb{R}^3$, determinar el lugar geométrico de los centros de las esferas que lo cortan en dos circunferencias.

NOTA. Como ya comentamos cuando se publicó el Problema 108, la propuesta no es original. Antes de aparecer en esta sección, ya había sido publicada como *Problema 1014* en *The Pi Mu Epsilon Journal*, vol. 11, n.º 4, 2001, pág. 216 (con solución enviada por el proponente publicada en el vol. 11, n.º 6, 2002, págs. 334–336 de la misma revista), y como *Problema A64* en la revista de la Societat Catalana de Matemàtiques *SCM/Notícies*, n.º 20, 2004, pág. 36. La idea del proponente al volver a plantear el problema era que apareciesen nuevas soluciones, esencialmente distintas de la dada por él. Hasta la fecha no hemos recibido ninguna aportación en este sentido y es por esto por lo que en este momento no publicamos ninguna solución al mismo. Los responsables de esta sección están abiertos a publicar cualquier aportación de interés sobre la propuesta que puedan realizar los lectores.