Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2010.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 139. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right) g(x)\, dx,$$

donde $\{a\}$ denota la parte fraccionaria de a.

Problema 140. *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego, Córdoba, y Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Dado un triángulo $\triangle ABC$, supongamos que la circunferencia Γ_b, con centro B y radio BA, corta en B' al lado AC, y que la circunferencia Γ_c, de centro C y radio CA, corta en C' al lado AB. Las circunferencias Γ_b y Γ_c, que se cortan en A y en un cierto punto X, vuelven a cortar al segmento $B'C'$ en los puntos Y y Z, respectivamente. Probar que XY es perpendicular a AB y que XZ es perpendicular a AC.

PROBLEMA 141. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Consideremos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ cuyos lados miden a, b y c. Sean H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$, y d_a, d_b y d_c las distancias de H a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar o refutar la desigualdad

$$\frac{a^2bc^2}{a+b} + \frac{b^2ca^2}{b+c} + \frac{c^2ab^2}{c+a} \geq \frac{8}{3}(d_a + d_b + d_c)^4.$$

PROBLEMA 142. *Propuesto por Cezar Lupu (estudiante), Universidad de Bucarest, Rumanía.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Probar que

$$\left(\sum_{1\leq i\leq n} \frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}\right) \leq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \frac{a_i a_j a_k}{i+j+k-2}.$$

PROBLEMA 143. *Propuesto por Tuan Le (estudiante), Fairmont High School, Anaheim, California.*

Sean x, y, x números reales positivos. Probar que

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}} + \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}} \geq \sqrt[3]{3} + 1.$$

PROBLEMA 144. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

En un triángulo $\triangle ABC$, sean M el punto medio del lado AC, N el punto medio del arco AC de la circunferencia circunscrita que no contiene al vértice B, I el incentro, y T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC. Se denotan por a, b y c las longitudes de los lados del modo usual, y por r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $a + c = 2b$, (b) $AT \cdot TC = 3r^2$, (c) $MN = r$, (d) $IA \cdot IC = 2r \cdot IB$.

Soluciones

Problema 115. *Propuesto por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean A, B y C los ángulos de un triángulo acutángulo, r el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo y R el de la circunscrita. Probar que

$$\sqrt{2\cos A\cos B\cos C} \leq \frac{r}{R}.$$

Nota. Muchas de las elaboradísimas soluciones que hemos recibido acreditan con abundantes referencias que este problema no era nuevo en la literatura. Concretamente, V. Vicario indica su aparición reciente en la forma:

> Supóngase que A, B y C son los ángulos de un triángulo ABC y que r y R son, respectivamente, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. Probar que
>
> $$4\cos A\cos B\cos C \leq 2\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Esta propuesta corresponde al Problema 2889 de la revista *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, volumen **29** (2003), página 514, y fue planteado por Vedula N. Murty. No debemos, entonces, hacer otra cosa aquí sino remitir al lector interesado a consultar la solución de este problema anterior, y las referencias aportadas allí, en el volumen **30** (2004), páginas 522–523, de la revista citada.

Otras referencias de interés aportadas por nuestros lectores son las siguientes:

(a) J. Wolstenholme, *Mathematical Problems on the first and second division of the schedule of subjects*, 1.ª ed., Macmillan, Londres, 1867. La segunda edición de este texto, de 1878 y editada por Macmillan and Co., se encuentra disponible en `http://www.archive.org/details/mathematicalprob00wolsuoft`. Los problemas 517 (pág. 92) y 567 (pág. 99) guardan una gran relación con la desigualdad propuesta en el Problema 115.

(b) D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić y V. Volenec, *Recent Advances in Geometrical Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, The Nederlands, 1989, pág. 154.

(c) The Olympiad Corner: Solución al Problema 18 en *Baltic Way–92*, *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem* **23** (1997), págs. 460–461.

(d) Solución al Problema S67, *Mathematical Reflections* **1** (2008), págs. 11–13 (publicación on-line disponible en `http://reflections.awesimemath.org`).

(e) Solución al Problema 134, *Revista de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática* **28** (2006) (publicación on-line disponible en `http://www.oei.es/oim/revistaoim`).

Se han recibido soluciones de E. Hysnelaj y E. Bojaxhiu, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, R. Peiró, J. B. Romero, B. Salgueiro, V. Vicario y el proponente.

PROBLEMA 116. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sea $\{a_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} a_j < \infty.$$

Probar que, para $p > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{2}{p}-1}\sum_{j=k}^{2k-1}(a_j)^{1/p} = 0.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j,$$

la serie $\sum_{j=1}^{\infty} j a_j$ es convergente y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{j=n}^{2n-1} a_j \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{2n-1} j a_j = 0.$$

Pongamos $A_n = n^{\frac{2}{p}-1}\sum_{j=n}^{2n-1}(a_j)^{1/p}$. En virtud de la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\sum_{j=n}^{2n-1}(a_j)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=n}^{2n-1} 1\right)^{1/q}\left(\sum_{j=n}^{2n-1} a_j\right)^{1/p} = n^{1/q}\left(\sum_{j=n}^{2n-1} a_j\right)^{1/p},$$

donde q es el exponente conjugado de p (es decir, $p^{-1}+q^{-1}=1$), y

$$\lim_{n\to\infty} A_n \leq \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{p}-1+\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=n}^{2n-1} a_j\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty}\left(n\sum_{j=n}^{2n-1} a_j\right)^{1/p} = 0.$$

Finalmente, aplicando el criterio de Stolz,

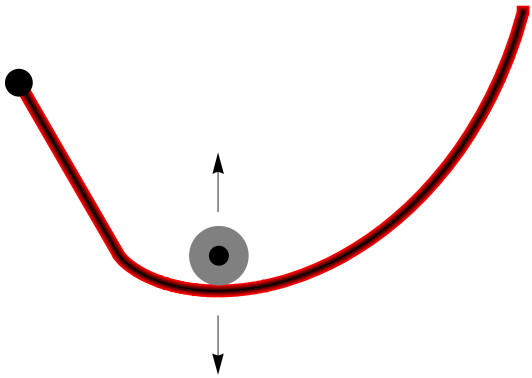
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{2}{p}-1}\sum_{j=k}^{2k-1}(a_j)^{1/p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

NOTA. La primera condición del enunciado no es necesaria, ya que es consecuencia de la segunda. Por otra parte, el resultado es válido para $p \geq 1$.

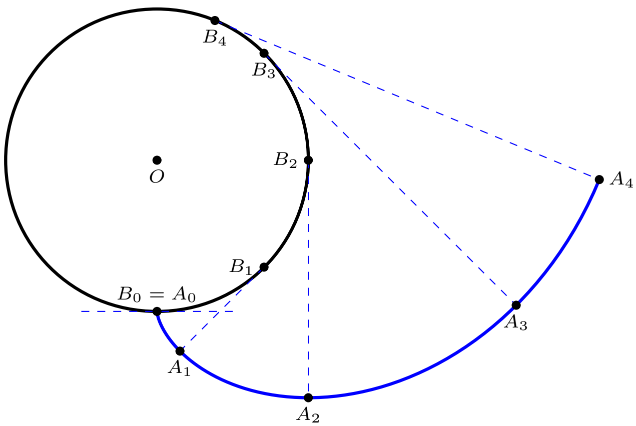
También resuelto por O. Furdui, D. Lasaosa, X. Ros y el proponente.

Problema 117. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

¿Cómo debe ser el perfil de una palanca para que la fuerza que transmite al peso que se desea elevar tenga en todo momento la dirección de la vertical? O bien, más concretamente: supongamos que una palanca rígida tiene su punto de apoyo en el origen de coordenadas, que la dirección de la vertical es la del eje OY, y que sobre el perfil de la palanca puede rodar sin rozamiento un objeto puntual pesado. Encontrar una ecuación para dicho perfil de modo que, al mover la palanca, el objeto pesado, situado inicialmente en un punto de coordenadas $(a, -h)$ (donde $a > 0$ y $0 \leq h < \infty$), pueda ser elevado hasta el punto $(a, 0)$ manteniéndose siempre sobre la recta vertical $x = a$.



Solución enviada por Jesús María Sanz Serna, Universidad de Valladolid, Valladolid.



Sean $A_0, A_1, \ldots,$ puntos de la palanca $\mathcal{P}$. La tangente a $\mathcal{P}$ en el punto, digamos A_2, en que ahora se halla el objeto debe encontrarse en posición horizontal y por tanto la correspondiente normal ha de ser la vertical a distancia a del fulcro O, el punto de apoyo de la palanca. Más tarde la palanca habrá girado contra las agujas, el objeto se hallará en A_1 y entonces la normal en A_1 estará vertical y a distancia a de O. Por tanto la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y radio a es la *envolvente* de la familia de normales a la palanca en los puntos que van siendo ocupados por el objeto. En lenguaje clásico, $\mathcal{C}$ es la curva *evoluta* de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ la *evolvente* de $\mathcal{C}$. Esto resuelve el problema.

CUATRO NOTAS:

(1) Ecuación de la palanca: basta observar que los puntos de tangencia $B_1, B_2, \ldots,$ son los centros de curvatura de $\mathcal{P}$ en $A_1, A_2, \ldots,$ (el centro de curvatura es la posición límite del punto de intersección de normales próximas). Por tanto, la evolvente puede describirse como el lugar geométrico de los puntos $A_0, A_1, \ldots,$ que sucesivamente ocupa el extremo libre de un hilo, inicialmente arrollado a $\mathcal{C}$, al irse desenrollando. Así en la figura las longitudes de los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots,$ coinciden con las de los arcos $B_0B_1, B_0B_2, \ldots,$ y en definitiva

$$x = a \operatorname{sen} t - at \cos t, \qquad y = -a \cos t - at \operatorname{sen} t,$$

donde el parámetro t es el ángulo entre la vertical descendente y OB.

(2) El razonamiento anterior no determina la forma de la palanca entre O y los puntos de tangencia, forma que evidentemente puede ser arbitraria.

(3) La evolvente es ilimitada (t puede ser arbitrariamente grande) y por ello pueden construirse palancas espirales para que el objeto suba desniveles h tan grandes como se desee.

(4) Alternativamente, la ecuación de $\mathcal{P}$ puede determinarse planteando la ecuación diferencial que expresa que las normales a una curva distan a del origen. Como esta condición es invariante por rotación, conviene escribir la ecuación en coordenadas polares para que resulte autónoma. Cálculos sencillos dan

$$\pm \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a\rho}\, d\rho = d\phi,$$

donde ρ es la distancia de A a O y ϕ el ángulo entre la vertical descendente y OA. Para que la evolvente gire contra las agujas hay que tomar el signo positivo e integrando desde $\rho = a$, donde $\phi = 0$, se tiene

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc\,sec} \frac{\rho}{a} = \phi.$$

Esta ecuación expresa que en la figura el ángulo polar ϕ de A es la diferencia entre el ángulo polar $t = \sqrt{\rho^2 - a^2}/a$ de B y el ángulo AOB.

También resuelto por V. Arnaiz, D. Lasaosa y el proponente.

NOTA. El proponente nos indica en su solución que el problema está basado en la patente n.º 15515 registrada en la *Oficina Española de Patentes y Marcas* en 1894 por el ingeniero extremeño Darío Bacas Montero. La patente aparece como anexo en la biografía *Darío Bacas, Ingeniero Naval, 1845–1913*, de Pilar Bacas Leal, editada por la Diputación de Cáceres en 1998.

Problema 118. *Propuesto por Juan Carlos González Vara, Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar que

$$ab\sqrt{(a+b)^3} + bc\sqrt{(b+c)^3} + ca\sqrt{(c+a)^3} \geq \frac{\sqrt{3abc\left[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}\right]^3}}{a+b+c}.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.

Por la convexidad de la función $x^{3/2}$, tenemos que

$$\alpha x^{3/2} + \beta y^{3/2} + \gamma z^{3/2} \geq (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{3/2}.$$

Entonces, tomando $\alpha = ab$, $\beta = bc$, $\gamma = ca$, $x = a+b$, $y = b+c$ y $z = c+a$,

$$ab\sqrt{(a+b)^3} + bc\sqrt{(b+c)^3} + ca\sqrt{(c+a)^3} \geq \frac{\left[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right]^{3/2}}{(ab+bc+ca)^{1/2}}.$$

Así, probando que

$$\frac{\left[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right]^{3/2}}{(ab+bc+ca)^{1/2}} \geq \frac{\sqrt{3abc}}{a+b+c}\left[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}\right]^{3/2}$$

habremos concluido.

Puesto que $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, la desigualdad anterior se verificará si

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq (abc)^{1/3}\big((a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}\big)$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{\text{cíclica}} a^2(b+c) \geq (abc)^{1/3} \sum_{\text{cíclica}} (a+b)\sqrt{ab}.$$

Ahora, usando la sustitución $a = x^6$, $b = y^6$, $c = z^6$ la desigualdad se convierte en

$$\sum_{\text{cíclica}} x^{12}y^6 \geq \sum_{\text{cíclica}} x^{11}y^5z^2,$$

que se sigue de la desigualdad de Muirhead ya que $[12,6,0] \succ [11,5,2]$; esto concluye la demostración.

Nota. La última desigualdad puede probarse usando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, evitando así el uso de la desigualdad de Muirhead. En efecto, aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a cada dos sumandos de la siguiente suma, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cíclica}} x^{12}y^6 &= \frac{5}{6}x^{12}y^6 + \frac{1}{6}z^{12}x^6 + \frac{5}{6}y^{12}z^6 + \frac{1}{6}x^{12}y^6 + \frac{5}{6}z^{12}x^6 + \frac{1}{6}y^{12}z^6 \\ &\geq \sqrt[6]{(x^{12}y^6)^5 z^{12}x^6} + \sqrt[6]{(y^{12}z^6)^5 x^{12}y^6} + \sqrt[6]{(z^{12}z^6)^5 y^{12}z^6} \\ &= \sum_{\text{cíclica}} x^{11}y^5z^2.\end{aligned}$$

También resuelto por D. Lasaosa, X. Ros y el proponente.

Problema 119. *Propuesto por Cezar Lupu (estudiante), Universidad de Bucarest, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable verificando que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Probar que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$x_0 f(x_0) = f'(x_0) \int_0^{x_0} x f(x)\,dx.$$

Solución enviada por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Demostraremos el siguiente resultado más general: Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables verificando que $g(0) = 0$, g monótona y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Entonces existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$f(x_0)g(x_0) = f'(x_0) \int_0^{x_0} f(x)g(x)\,dx.$$

Sea

$$z(x) = e^{-f(x)} \int_0^x f(t)g(t)\,dt.$$

Notemos que

$$z'(x) = \left(f(x)g(x) - f'(x) \int_0^x f(t)g(t)\,dt \right) e^{-f(x)}$$

y, por lo tanto, lo que queremos ver es que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $z'(x_0) = 0$.

Consideremos las funciones

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad H(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,dt.$$

Integrando por partes tenemos que

$$H(x) = g(x)F(x) - \int_0^x g'(t)F(t)\,dt.$$

Supongamos que la función F alcanza su mínimo y su máximo, respectivamente, en $F(a)$ y $F(b)$ para ciertos $0 < a < b$ (podemos tomar a y b no nulos porque $F(0) = F(1) = 0$). Entonces, considerando que g es creciente (el razonamiento para g decreciente es análogo), tendremos que $g'(t) \geq 0$,

$$H(a) \leq g(a)F(a) - \int_0^a g'(t)F(a)\,dt = g(a)F(a) - [g(a) - g(0)]F(a) = 0$$

y

$$H(b) \geq g(b)F(b) - \int_0^b g'(t)F(b)\,dt = g(b)F(b) - [g(b) - g(0)]F(b) = 0.$$

De esta forma, por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in [a, b]$ tal que $H(c) = 0$.

Finalmente, como $z(x) = e^{-f(x)}H(x)$, tenemos que $z(0) = z(c) = 0$ y, por el teorema de Rolle, concluimos la existencia de $x_0 \in (0, c)$ tal que $z'(x_0) = 0$, como queríamos demostrar.

También resuelto por D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, P. Perfetti y el proponente.

Problema 120. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Pantelimon George Popescu, Bucarest, Rumanía.*

Hallar todas las ternas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 3,$$
$$x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3,$$
$$x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} = 3.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos que la única solución del sistema es $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Es obvio que

$$(x^{2008} + y^{2008} + z^{2008}) - 2(x^{2009} + y^{2009} + z^{2009}) + (x^{2010} + y^{2010} + z^{2010}) = 0.$$

Entonces, se cumple

$$(x^{2008} - 2x^{2009} + x^{2010}) + (y^{2008} - 2y^{2009} + y^{2010}) + (z^{2008} - 2z^{209} + z^{2010}) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$x^{2008}(1 - x)^2 + y^{2008}(1 - y)^2 + z^{2008}(1 - z)^2 = 0.$$

Puesto que x, y, z son reales, tendremos que $x^{2008}(1-x)^2 = y^{2008}(1-y)^2 = z^{2008}(1-z)^2 = 0$ y, por tanto, cada incógnita del sistema sólo podrá tomar los valores 0 ó 1. Así, de manera elemental, podemos comprobar que $(1, 1, 1)$ es la única solución.

También resuelto por O. Furdui, E. Hysnelaj y E. Bojaxhiu, D. Lasaosa, R. Peiró, P. Perfetti, J. Rivero, X. Ros, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.

NOTA. Bruno Salgueiro en su solución se plantea estudiar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: Dados un número entero $n \geq 3$ y dos números reales a y p, hallar todas las n-tuplas de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfacen

$$\begin{cases} x_1^{2p} + x_2^{2p} + \cdots + x_n^{2p} = a, \\ x_1^{2p+1} + x_2^{2p+1} + \cdots + x_n^{2p+1} = a, \\ \qquad\qquad \cdots \\ x_1^{2p+n-2} + x_2^{2p+n-2} + \cdots + x_n^{2p+n-2} = a, \\ x_1^{2p+n-1} + x_2^{2p+n-1} + \cdots + x_n^{2p+n-1} = a. \end{cases}$$

Su solución, que es una generalización de la seleccionada, establece que, si $p \leq 0$, el sistema tiene solución únicamente cuando $a = n$ y está dada por $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 1, \dots, 1)$; en el caso $p > 0$, el sistema tiene solución para $a = 0, 1, \dots, n$, y está formada por cada una de las permutaciones de a unos y $n - a$ ceros.