
EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María José González

Se cumplen ahora doce años desde que La Gaceta comenzó su andadura. Desde ese momento y hasta el presente, María Luz Callejo ha coordinado la Sección de Educación, que ha publicado 43 trabajos en este periodo. Autores procedentes del ámbito de la Matemática y de la Educación Matemática, profesores todos ellos en distintos niveles educativos, han aportado resultados de investigación, experiencias, reflexión y opinión sobre aspectos que interesan a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La historia, la tecnología, las competencias, el talento matemático, la formación de profesores o la enseñanza de distintos conceptos matemáticos son algunos de los temas que han orientado la reflexión educativa en los artículos publicados en este periodo. También se han publicado trabajos que vienen siendo recurrentes, incluso a nivel internacional, sobre el estatus de la investigación en Educación Matemática, sobre su vínculo con la práctica docente o sobre las relaciones entre Matemáticas y Educación Matemática. Y se han difundido las tendencias en investigación que han surgido en congresos y reuniones representativos del área. Esta variedad da cuenta de la gran cantidad de intereses que confluyen en esta sección y de la multiplicidad de facetas relacionadas con la Educación Matemática que preocupan a una amplia comunidad y que tienen cabida en una publicación como La Gaceta.

Ante el relevo voluntario que se produce ahora en la coordinación de la Sección de Educación quisiera, en primer lugar, agradecer a María Luz su dedicación y buen hacer durante todo este tiempo. La labor que ha llevado a cabo ha cubierto con éxito los objetivos de esta sección: ofrecer reflexiones sobre la educación matemática en todos los niveles de enseñanza, presentar sus teorías y prácticas en un lenguaje accesible a toda la comunidad matemática y estimular el intercambio de informaciones, documentación e ideas. Confío en poder mantener la calidad alcanzada, para lo cual espero contar con la colaboración de los investigadores y profesores de matemáticas españoles que vienen contribuyendo al desarrollo de conocimiento en el ámbito de la Educación Matemática de una forma sostenida y creciente desde hace unos 25 años. Si bien el actual contexto administrativo promueve que los resultados de investigación se publiquen en lugares especializados con altos índices de impacto, no debemos olvidar la necesidad de difundir el trabajo en las comunidades de las que surgen los problemas de investigación y a las que puede resultar de utilidad. La Sección de Educación, junto con la dedicada a las Matemáticas en las aulas de Secundaria, constituyen el foro adecuado para ello. Lógicamente, la investigación especializada dentro de un ámbito tiene sus modos de

expresión específicos, no necesariamente entendidos por el público no experto. Pero la educación matemática forma parte de las preocupaciones de muchos sectores profesionales y resulta imprescindible, para el reconocimiento de esta disciplina, que los resultados obtenidos se difundan y expliquen de un modo que permita apreciar el interés que tienen. Animo, por tanto, a participar a todos los compañeros, enviando a esta Sección alguno de los numerosos trabajos que están desarrollando.

EN ESTE NÚMERO. . .

El artículo que se presenta a continuación está firmado por Irene Polo Blanco, una joven profesora de la Universidad de Cantabria del área de Didáctica de la Matemática que ha desarrollado su trabajo hasta el momento en la confluencia entre la Educación Matemática, la Historia de la Matemática y la Geometría. En este trabajo plantea la necesidad de que el profesor de matemáticas desarrolle explícitamente habilidades de visualización y propone una serie de actividades para ello. La propuesta está basada en el método que desarrolló, de forma autodidacta, Alicia Boole Stott para obtener secciones paralelas de politopos en la cuarta dimensión. Puede parecer sorprendente una propuesta de estas características para el profesorado de secundaria, cuando los contenidos que se abordan no pertenecen al currículo de matemáticas de esta etapa. Sin embargo, las actividades planteadas constituyen un reto para el profesor y se implementan de forma que éste tome conciencia de las relaciones que tiene que establecer entre las representaciones de los objetos geométricos y los razonamientos que tiene que llevar a cabo para resolver las actividades con éxito. De esta forma, al tiempo que se implica en la resolución de una tarea matemática muy motivadora, lleva a cabo una reflexión didáctica de interés profesional, como es la percepción de las interrelaciones que se dan entre los procesos de visualización y los de razonamiento deductivo sobre los que descansa la resolución de problemas geométricos en la etapa secundaria.

Actividades de visualización para la formación de profesores de matemáticas: el método de Alicia Boole Stott

por

Irene Polo Blanco

Distintas elaboraciones teóricas caracterizan la visualización describiendo el compendio de nociones y procesos implicados, por un lado, en la construcción y transformación de imágenes mentales de tipo visual y, por otro lado, en la interpretación y producción de las variadas representaciones externas implicadas en la actividad matemática [3, 9, 10, 17, 19]. Estos procesos constituyen un condicionante esencial del aprendizaje. En la literatura abundan estudios que muestran las ventajas de utilizar la visualización como apoyo al desarrollo de los distintos tipos de razonamiento matemático, a las conexiones entre ellos o a la resolución de problemas (por ejemplo, [1, 13, 14, 18, 22]). Pueden encontrarse interesantes investigaciones que estudian los procesos de visualización en el ámbito de la geometría tridimensional, pero prácticamente no hay ningún estudio en dimensiones más altas.

En el trabajo con nociones geométricas en la cuarta dimensión, se ponen de manifiesto de manera particular características genuinas de los procesos implicados en la visualización. Por ejemplo, como noción geométrica, el hipercono es un concepto sobre el cual manejamos simultáneamente conocimiento expresado de forma conceptual y de forma figural [8]. Su descripción conceptual suele hacer referencia a la generalización a dimensión mayor de conceptos en el espacio tridimensional, al tiempo que se expresa mediante descripciones que hacen intervenir información visual, por ejemplo, cuando se describe el hipercono como un cono desplazado en una dimensión perpendicular a las tres primeras, compuesto por conos tridimensionales. Además, no disponemos de información pictórica directa ni de modelos manipulativos del hipercono que nos permitan obtener *representaciones externas cercanas* del mismo, esto es, representaciones de la misma dimensión y que mantengan con el objeto un cierto parecido [13]. Las representaciones externas habituales del hipercono —su desarrollo tridimensional o su proyección— exigen interpretaciones que requieren un alto nivel de sofisticación. Para vincular el concepto abstracto con las representaciones externas, el sujeto está obligado a poner en juego los dos procesos coordinados de procesamiento visual y de interpretación de información figurativa descritos por Bishop [3]. En el caso de la cuarta dimensión, estos procesos habitualmente requieren reinterpretar la situación en dimensión menor, resolver aquí, haciendo uso de imágenes mentales y de representaciones externas de carácter visual, y regresar a la cuarta dimensión por un proceso de generalización que ha de respetar restricciones conceptuales no visuales. En cualquiera de estas fases los procesos de visualización condicionan los distintos modos de razonamiento matemático que se ponen en juego y es preciso que el sujeto los manifieste de forma explícita.

Volviendo a la utilidad de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas y centrándonos en el ámbito educativo de la etapa secundaria, algunas investigaciones ponen de manifiesto que los estudiantes son reacios a realizar razonamientos basados en la visualización [7], aunque este hecho parece ser consecuencia de la poca utilización que se hace del razonamiento visual en las clases de matemáticas, del bajo estatus que los profesores conceden a este tipo de razonamiento [7, 18, 20], o de las dificultades asociadas a una forma de proceder poco algorítmica [6]. Esto se une a la habitual consideración de la visualización como una capacidad innata, idea reforzada por el hecho constatado de que se aprecian muchas diferencias individuales en alumnos de la misma edad y a lo largo de toda su etapa formativa [5, 12]. No obstante, la investigación también ha mostrado que la calidad de la visualización matemática, tanto para adultos como para niños, puede mejorarse a través de actividades adecuadas, y que el profesor juega un papel fundamental en este proceso [2, 14, 18].

Si bien la visualización en la cuarta dimensión no forma parte del currículo de secundaria, el desarrollo del conocimiento del profesor sobre la influencia de la visualización en el aprendizaje requiere que éste tome conciencia de la complejidad de los procesos y habilidades implicados [11, 18, 20, 21]. Como hemos indicado, la visualización en la cuarta dimensión proporciona un ámbito muy rico para ello. Por ello, en este trabajo proponemos una serie de actividades para la formación del profesor en los procesos de visualización que están basadas en el método utilizado por Alicia Boole Stott en 1900 [4] para obtener las secciones paralelas de los polítopos regulares en la cuarta dimensión. Este método resulta muy intuitivo y es válido en cualquier dimensión. Es especialmente interesante, por ejemplo, en el espacio tridimensional cuando se estudian poliedros complicados. Boole Scott describió el método y elaboró numerosas representaciones y modelos de poliedros que se encuentran depositados en el University Museum de Groningen (Holanda).

Este artículo comienza presentando brevemente la vida de Boole Stott y su método. Continúa con una propuesta de actividades para la formación de profesores en la que se introduce el método de Boole Stott, empezando por una particularización al espacio tridimensional que sirve de base para llevar a cabo el proceso más complejo de la cuarta dimensión. La propuesta se presenta acompañada de una serie de explicaciones sobre el modo de implementar las actividades propuestas. Estas explicaciones son fruto de la experiencia desarrollada en cursos de formación de profesores en los que se ha llevado a la práctica la propuesta. Finaliza indicando algunas conclusiones y perspectivas de trabajo futuro en la investigación sobre este método.

1. ALICIA BOOLE STOTT Y LA CUARTA DIMENSIÓN

Alicia nació en Castle Road (Irlanda) en 1860. Fue hija del famoso logista George Boole (1815–1864), que murió cuando ella tenía tan solo 4 años, y de la pedagoga Mary Everest Boole (1832–1916). Debido a que las universidades inglesas de la época no ofrecían títulos a mujeres, éstas podían tan solo aspirar a estudiar algo de literatura clásica y otras artes. Por ello, Alicia nunca estudió matemáticas, aunque pudo desarrollar su extraordinaria capacidad para la geometría gracias al ambiente

tan particular en el que creció. Everest Boole recibía numerosas visitas en su casa, entre las que se encontraba la del aficionado matemático Howard Hinton, profesor de matemáticas de escuela enormemente interesado en la cuarta dimensión. Durante sus visitas a la familia Boole, Hinton solía juntar varios cubos de madera intentando que Alicia y sus hermanas visualizaran el hipercubo en cuatro dimensiones. Alicia pronto comenzó a sorprender a Hinton con su habilidad para llevar a cabo procesos de visualización en la cuarta dimensión. Alrededor de 1900, Boole Stott (se casó en 1890 con Walter Stott) calculó las secciones tridimensionales de los seis polítopos regulares en la cuarta dimensión, realizó dibujos y construyó modelos de cartón de las secciones tridimensionales de algunos de ellos (ver figuras 1, 2 y 3).

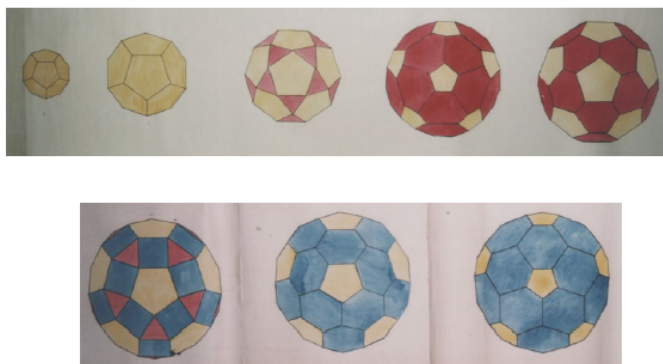


Figura 1: Dibujos de Boole Stott de las secciones paralelas de la 120-celda. University Museum, Groningen (Holanda).

La presencia de varios de los modelos en la Universidad de Groningen (Holanda) dan testimonio de su colaboración con el geómetra holandés P. H. Schoute (1846–1913). Dicha colaboración duró más de 20 años, combinándose los métodos analíticos de Schoute con la inusual habilidad para visualizar la cuarta dimensión de Boole Stott. Después de la muerte de Schoute, Boole Stott permaneció aislada de la comunidad matemática hasta 1930, cuando conoció al geómetra H. S. M. Coxeter, con quien colaboró hasta su muerte en 1940. Una biografía más detallada de la vida de Boole Stott puede consultarse en [15].

El método empleado por Boole Stott [4] para la obtención de secciones tridimensionales (en adelante 3D) de polítopos regulares en cuatro dimensiones (en adelante 4D) ha pasado prácticamente desapercibido en la comunidad matemática, a pesar de encerrar ideas muy originales que ayudan a la visualización de estos objetos geométricos. Describiremos el método en detalle en la sección siguiente, aunque adelantamos que consiste en obtener desarrollos 3D de los objetos de la cuarta dimensión, realizar representaciones externas adecuadas de estos desarrollos, sobre dichas representaciones calcular y representar las secciones razonando sobre las ideas de distancia y simetría, y reconstruir finalmente el poliedro solución a partir de la identificación de una serie de aristas y vértices en las secciones obtenidas. Precisamente porque Boole Stott no tenía formación en geometría analítica, su método es sintético

y está basado en la realización de construcciones euclídeas. La puesta en práctica del mismo conlleva la realización coordinada de los procesos de procesamiento visual y de interpretación de información figurativa descritos por Bishop [3]. Se generan



Figura 2: Dibujos de Boole Stott de los desarrollos planos de las secciones perpendiculares de la 600-celda. University Museum, Groningen (Holanda).



Figura 3: Modelos de Boole Stott de las secciones perpendiculares de la 600-celda. University Museum, Groningen (Holanda).

y manipulan imágenes mentales y sus representaciones externas, al tiempo que se respetan las restricciones conceptuales que requieren las nociones y procesos geométricos empleados.

2. ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Las actividades que proponemos siguen una secuenciación natural desde el punto de vista conceptual al introducir al sujeto en la cuarta dimensión como una generalización de lo que ocurre en dimensiones más pequeñas. Además, con el propósito de que los futuros profesores conozcan el método de Boole Stott contando con el soporte de las representaciones externas, comenzamos presentando la particularización de dicho método al caso de los sólidos platónicos. Esta particularización servirá de base para trabajar después el caso 4D.

Presentamos las actividades enunciando el ejercicio que recibe el profesor en formación junto con indicaciones para el formador sobre el modo de llevarlas a cabo y comentarios sobre su utilidad. Estos comentarios son el fruto de la experiencia de la puesta en práctica de estas actividades en un seminario de formación de profesores de matemáticas (mayoritariamente profesores de secundaria) que tuvo lugar en Praga, en julio del 2007, en la *5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*. En el seminario participaron alrededor de 20 profesores de matemáticas (ver [16]). Además, la metodología de Boole Stott ha sido también recientemente planteada como actividad a 15 estudiantes del Máster de Formación de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Cantabria.

2.1. PARTICULARIZACIÓN DEL MÉTODO DE BOOLE STOTT A LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Comenzamos planteando el siguiente ejercicio, que se realiza conjuntamente entre el formador y los profesores, y sirve para que el formador presente el método de Boole Stott sobre un ejemplo sencillo.

EJERCICIO 1. Calcular las secciones paralelas del tetraedro.

Inicialmente el ejercicio se resuelve sin ningún material adicional, excepto lápiz y papel, ya que en el caso del tetraedro se espera que los profesores en formación dispongan de estrategias y habilidades de visualización que les permitan obtener respuestas de forma sencilla. Por ejemplo, es habitual que imaginen un plano que contiene a una de sus caras (triángulos) tal que al irlo desplazando de forma perpendicular a la cara interseque al tetraedro formando una serie de triángulos decreciendo en tamaño, como aparece en la figura 4. Para algunas personas puede ser necesario manipular alguna representación concreta del tetraedro, por ejemplo, Polydron, a partir de la cual representan sin dificultad los triángulos.

Una vez obtenidas las secciones de esta forma, el formador presenta el método propuesto por Boole Stott particularizado al caso del tetraedro, para lo cual se considera el desarrollo plano del tetraedro y se calculan las secciones como sigue:

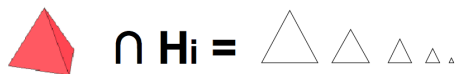


Figura 4: Secciones paralelas del tetraedro.

1. La primera sección, resultado de intersecar el tetraedro con un plano que contiene al triángulo negro (ver figura 5), será claramente un triángulo del mismo tamaño.
2. La siguiente sección, resultado de intersecar en el espacio 3D el tetraedro con un plano paralelo a este triángulo que pasa por el punto a , se obtiene en el desarrollo 2D del tetraedro *trasladando* las aristas del triángulo negro paralelamente a la misma distancia hasta que pasan por el punto a (figura 5). Se obtienen así las tres aristas en guiones de la figura.
3. Para terminar, estas tres aristas se han de *pegar* dando lugar a un triángulo (en guiones en la figura) de tamaño menor que el negro.

De manera similar se obtienen las secciones paralelas que pasan por los puntos b y c dando lugar al triángulo punteado y al punto c de la figura, respectivamente.

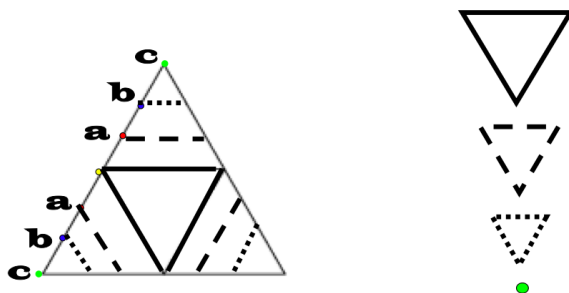


Figura 5: Secciones paralelas del tetraedro, desde su desarrollo plano.

Al presentar este método sobre un ejemplo que los profesores ya saben resolver de otra forma se consigue que, por un lado, tengan la convicción de que el proceso es correcto y, por otro lado, puedan reproducirlo en el caso 4D, aunque en esta dimensión no dispongan de representaciones cercanas de los objetos tratados. De hecho, el método es especialmente interesante en situaciones en las que las representaciones externas son complejas, no sólo en la cuarta dimensión sino también en el caso de poliedros complicados.

En todos los casos se demanda a los profesores que elaboren las representaciones externas que acompañan a su razonamiento. Ese requisito es especialmente interesante cuando, a partir de una representación plana de puntos y aristas, han de reconstruir mentalmente un polígono, dibujarlo y verificar —mentalmente o sobre algún modelo físico— que la solución obtenida coincide con la que ya conocían por otros métodos.

Seguidamente se propone el Ejercicio 2, que tiene el propósito de reforzar el conocimiento del método de Boole Stott sobre situaciones que poseen representaciones externas cercanas. Notar que, al igual que en el caso del tetraedro, se ha elegido un desarrollo plano del cubo y del octaedro donde las aristas que confluyen en la cara de partida en el sólido 3D, también confluyen en dicha cara en el desarrollo plano. Esta elección facilita la visualización de las secciones, sobre todo en el caso del octaedro, donde aumenta la complejidad debido al incremento del número de caras en el sólido y al incremento del número de dichas caras que confluyen en cada uno de sus vértices.

EJERCICIO 2. Calcular las secciones paralelas del cubo y del octaedro.

Los profesores realizan el Ejercicio 2 individualmente siguiendo las mismas pautas que el Ejercicio 1, es decir, primero obtienen las secciones imaginando las intersecciones de un plano con el poliedro y realizando las correspondientes representaciones externas, posiblemente ayudados de algún modelo físico, cosa que suele ser especialmente útil en el caso del octaedro. Después, vuelven a calcular las secciones aplicando el método de Boole Stott, manipulando los desarrollos planos del cubo y del octaedro como indica la figura 6. Al igual que en el caso anterior, se considerarán secciones paralelas a distancia $1/3$ de la longitud de la arista del sólido 3D. La cara del poliedro respecto a la que se considerarán las secciones paralelas aparece en negro en la figura 6 (un cuadrado en el caso del cubo y un triángulo en el caso del octaedro). Los puntos por donde pasan los planos que dan lugar a la segunda, tercera y cuarta sección son a , b y c . Explicaremos a continuación con más detalle el caso del octaedro, por su mayor complejidad.

La primera sección del octaedro, resultado de intersecar el sólido con un plano que contiene a una de sus caras (triángulo negro en la figura 6), será claramente un triángulo del mismo tamaño. A continuación se consideran todas las aristas que confluyen en la cara triangular de partida, y se dividen en tres segmentos iguales. Para calcular la segunda sección, se consideran los puntos de dichas aristas a distancia $1/3$ del triángulo inicial (ver figura 7). Por cada cara una de las 6 caras triangulares que confluye en el triángulo de partida hay dos de estos puntos, que definen un segmento contenido en dicha cara. Trazando estos seis segmentos (imagen de la derecha en la figura 7) y realizando las identificaciones necesarias, se obtiene un hexaedro no regular. De manera análoga, se consideran los puntos en las aristas a distancia $2/3$ dando lugar a la tercera sección, de nuevo un hexaedro no regular (líneas con guiones de la figura 8). Finalmente, la tercera sección es un triángulo (líneas punteadas de la figura 8).

2.2. SECCIONES PARALELAS DE LOS POLITOPOS REGULARES EN 4D

A continuación se generaliza el método anterior para calcular las secciones 3D de los seis politopos en 4D, tal como Boole Stott propuso en [4]. Los nombres de los seis politopos regulares junto con su número de vértices, aristas, caras y celdas (denotados por v , a , f y c , respectivamente) vienen dados en la siguiente tabla.

En el caso 4D el método de Boole Stott cobra especial importancia al proporcionar un algoritmo que produce las secciones y que, desde el punto de vista de la

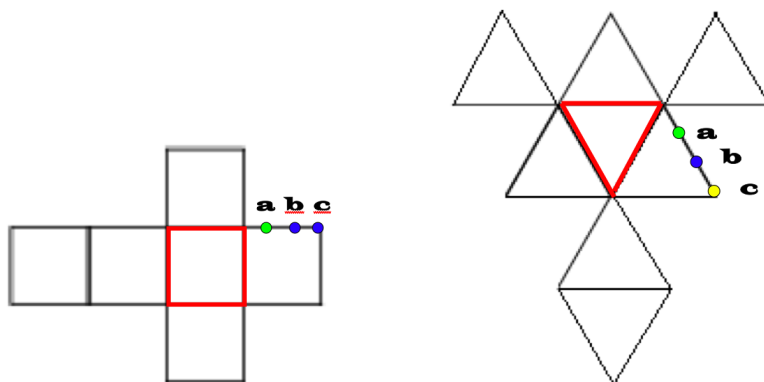


Figura 6: Desarrollo plano del cubo y octaedro para el cálculo de sus secciones paralelas.

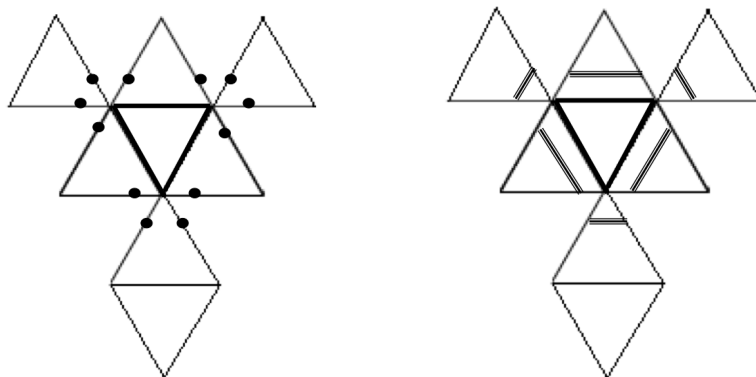


Figura 7: Secciones paralelas del octaedro desde su desarrollo plano.

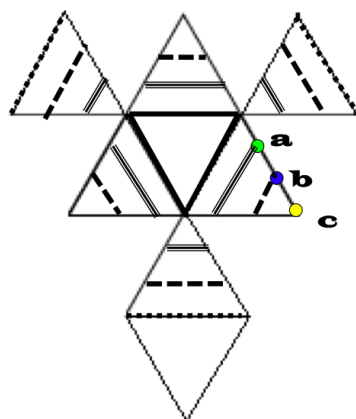


Figura 8: Secciones paralelas del octaedro desde su desarrollo plano.

Politopo	v	a	f	c	tipo de celda
Hipertetraedro	5	10	10	5	tetraedro
Hipercubo	16	32	24	8	cubo
Hiperoctaedro	8	24	32	16	tetraedro
24-celda	24	96	96	24	octaedro
120-celda	600	1200	720	120	dodecaedro
600-celda	120	720	1200	600	tetraedro

Figura 9: Politopos regulares en la cuarta dimensión.

visualización, proporciona el apoyo de representaciones 3D cercanas. Al llevar a cabo las actividades 4D, será el único método que utilizemos, a diferencia del caso 3D en el que teníamos la posibilidad de obtener las secciones de otra forma. Como primer ejercicio en 4D se propone el cálculo de las secciones 3D paralelas del hipercubo.

EJERCICIO 3. Calcular las secciones 3D paralelas del hipercubo.

El método de Boole Stott para calcular estas secciones comienza realizando una representación plana del desarrollo 3D del hipercubo. El hipercubo en 4D está compuesto por 8 cubos (ver tabla de la figura 9). Su desarrollo tridimensional aparece en la figura 10 junto con una proyección tridimensional. Estas representaciones externas pueden considerarse habituales en el tratamiento del hipercubo. Es importante que los profesores en formación se familiaricen previamente con ellas antes de proceder al cálculo de sus secciones. La representación del desarrollo tridimensional será el apoyo visual fundamental para llevar a cabo el proceso de obtener y desplazar los polígonos que resultan al intersecar el hipercubo con un espacio 3D. La proyección tridimensional, en la que se aprecia la coincidencia de las caras de todos cubos adyacentes, será útil como apoyo a la reconstrucción del poliedro solución a partir de los polígonos anteriores.

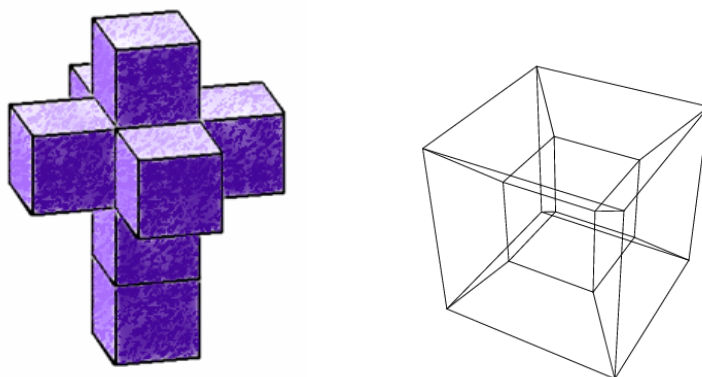


Figura 10: De izquierda a derecha: desarrollo tridimensional del hipercubo y su proyección en diagrama de Schlegel.

Aunque en el caso 3D el formador no se detiene a explicar cuáles son las secciones que se quieren calcular, precisamente porque las representaciones cercanas permiten hablar de intersecciones entre poliedros y planos sin necesidad de detallar lo que esto quiere decir, en el caso 4D es necesario que el formador precise cuáles son las secciones buscadas. Para ello, proponemos utilizar la notación que aparece en un dibujo original de Boole Stott [4] que aparece en la figura 11 y que muestra parte del desarrollo tridimensional del hipercubo. En concreto, se aprecian los 4 cubos que concurren en el vértice A . Los profesores han de notar que los vértices que aparecen duplicados deben ser identificados para recuperar el hipercubo en la cuarta dimensión. Las secciones que se van a calcular son las siguientes, donde denotamos por P al hipercubo y por H_1 a un espacio 3D que contiene al cubo $ABCDEFGH$ (ver figura 11).

1. La primera sección es $H_1 \cap P$.
2. La segunda sección es $H_2 \cap P$ con H_2 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto a .
3. La tercera sección es $H_3 \cap P$ con H_3 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto K .

En el momento en que se da esta explicación, la representación externa que está presente (figura 11) sólo se usa para hacer referencia a la notación de puntos y vértices ya que, a pesar de estar manejando objetos 3D, éstos aún se están manipulando como parte de la cuarta dimensión y es su posición como parte de este espacio la que los caracteriza. Así pues, ya desde el primer momento, el ejercicio requiere la manipulación de imágenes mentales sin apoyo de representaciones externas.

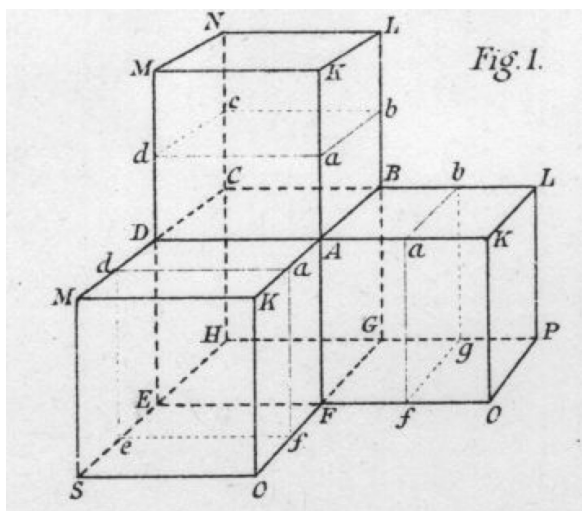


Figura 11: Cuatro cubos del hipercubo desdoblado [4].

La primera sección, $H_1 \cap P$, será la celda $ABCDEFGH$ (cubo punteado de la figura 12). Los profesores en formación obtienen este primer resultado en 4D como una generalización de lo que ocurre en 3D.

El cálculo de la siguiente sección ya hace uso del método de Boole Stott: se desplazan las caras paralelamente hasta que pasan por el punto a (cuadrados con líneas en guión de la figura 12), y se realizan las identificaciones necesarias. Esto da lugar a un cubo de nuevo del mismo tamaño que el cubo $ABCDEFGH$. En este proceso interviene la generalización al caso 3D de lo ocurrido en el caso de los desarrollos 2D de los sólidos platónicos, pero también se desarrollan procesos de visualización sobre la representación externa 3D que son utilizados para reconstruir en situación 3D el poliedro solución y concebirlo como una sección del hipercubo 4D.

De la misma manera, se obtiene la tercera sección (cubo formado por cuadrados negros de la figura 12).

Notar que la representación de Boole Stott de sólo 4 de los cubos del hipercubo simplifica el método al dibujar tan solo las caras visibles del cubo de partida $ABCDEFGH$. Esta representación conlleva la necesidad de completar mentalmente, por simetría, lo que ocurre sobre los cubos no dibujados.

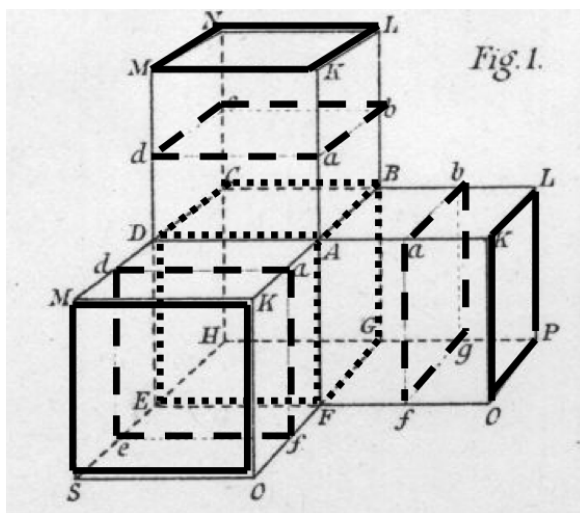


Figura 12: Secciones 3D paralelas del hipercubo [4].

El proceso se repite sobre la 24-celda y el hiperoctaedro, formados por 24 octaedros y 16 tetraedros respectivamente. El desarrollo de parte de estos politopos es aún relativamente sencillo de representar, al contrario de lo que ocurre con la 120-celda y 600-celda, donde el número de celdas del sólido 4D, el número de celdas por vértice, y la complejidad de las simetrías, hacen más difícil la representación externa. Por ello, en la propuesta que se realiza sólo se trabaja con la 24-celda y el hiperoctaedro. Las figuras que utilizamos son las realizadas por Boole Stott en [4].

EJERCICIO 4. Calcular las secciones 3D paralelas de la 24-celda.

La 24-celda está formada por 24 octaedros. La figura 13 muestra un trozo del desarrollo 3D de este politopo en el que aparecen cuatro de ellos. Denotando por P la 24-celda y por H_1 a un espacio 3D que contiene al octaedro $ABCDEF$ (punteado en la figura 13), calcularemos las siguientes secciones paralelas. Para ilustrar distintos tipos de secciones consideraremos secciones a distancia entre sí de $1/2$ de la longitud de la arista del politopo.

1. La primera sección es $H_1 \cap P$.
2. La segunda sección es $H_2 \cap P$ con H_2 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto a (ver figura 13).
3. La tercera sección es $H_3 \cap P$ con H_3 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto AC (ver figura 13).
4. La cuarta sección es $H_4 \cap P$ con H_4 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto a_1 (ver figura 13).
5. La quinta sección es $H_5 \cap P$ con H_5 un espacio 3D paralelo a H_1 y que contiene al punto A' (ver figura 13).

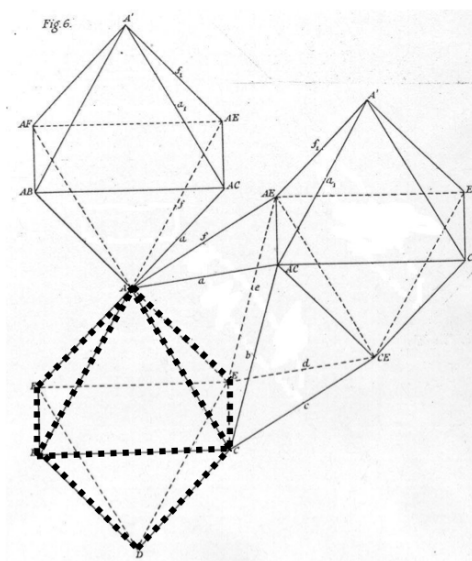


Figura 13: Cuatro octaedros del desarrollo 3D de la 24-celda [4].

La primera sección, resultado de intersecar el politopo 4D con el espacio 3D que contiene al octaedro $ABCDEF$ será el octaedro $ABCDEF$ (punteado en la figura 14). La segunda sección contendrá al rectángulo y al hexágono en negro en la figura 14. De nuevo, el método se aplica tan solo a los octaedros visibles de la figura 13. Notar que se obtiene en realidad un hexágono por cada uno de los 8 octaedros que comparten una cara triangular con el octaedro de partida, es decir,

la sección 3D será un poliedro con 8 hexágonos. De la misma manera, esta sección contendrá tantos rectángulos como octaedros comparten un vértice con el octaedro inicial, es decir, contendrá 6 rectángulos. La sección final es el poliedro semirregular de la figura 14.

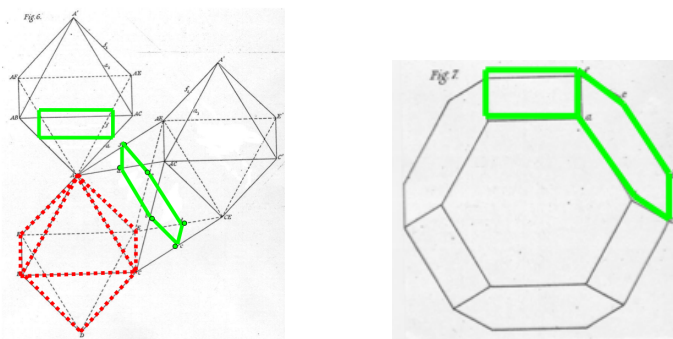


Figura 14: Segunda sección paralela de la 24-celda [4].

De manera análoga se procede para calcular la tercera sección. Notar que la cuarta sección coincide con la segunda y la quinta con la primera, debido a la simetría del politopo (ver figura 15).

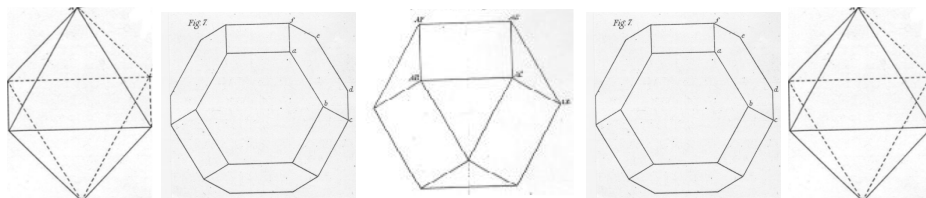


Figura 15: Secciones paralelas de la 24-celda.

EJERCICIO 5. Calcular las secciones 3D paralelas del hiperoctaedro.

El hiperoctaedro está formado por 16 tetraedros (ver tabla de la figura 9). Cinco de estos tetraedros en el desarrollo 3D de este politopo aparecen en la figura 16 (dibujo original por Boole Stott (1900)). Las secciones a considerar serán las paralelas a la celda $ABCD$ (tetraedro punteado de la figura). La primera de ellas consiste en un poliedro formado por rectángulos y triángulos como aparece (en negro) en la figura.

De manera similar se obtiene la siguiente sección, y siguiendo el razonamiento del caso anterior, el resto de la serie (ver figura 17). De nuevo, la primera y quinta sección coinciden (ambas son tetraedros), así como la segunda y la cuarta.

En la experimentación llevada a cabo en el seminario impartido en Praga en la *5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* no se propuso el cálculo de las secciones de los dos politopos regulares que

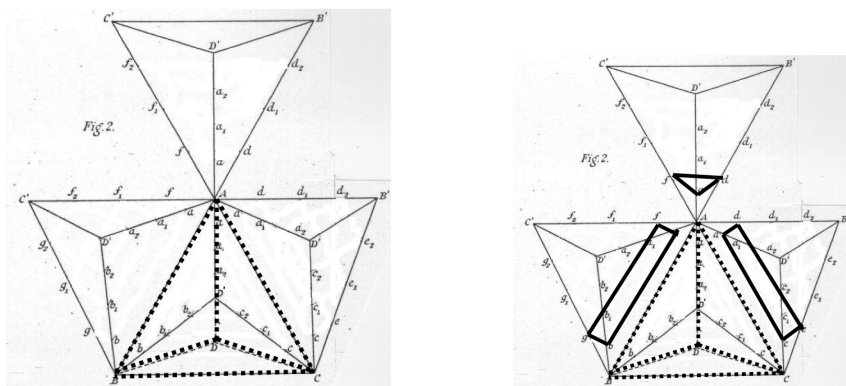


Figura 16: Primera y segunda sección del hiperoctaedro.

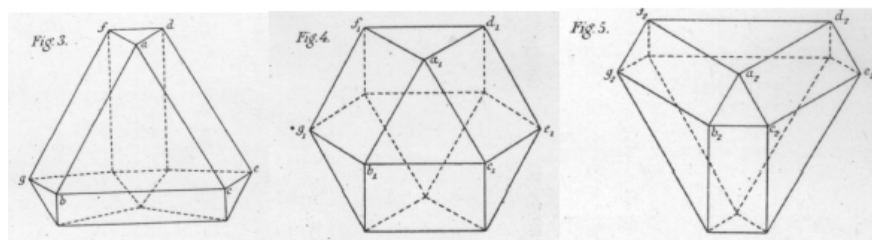


Figura 17: Segunda, tercera y cuarta secciones paralelas del hiperoctaedro.

quedan, es decir, la 120-celda y 600-celda. Como hemos comentado, la complejidad de las representaciones de estos dos objetos es elevada. No obstante, como hemos visto anteriormente en las figuras 1, 2 y 3, Boole Stott también calculó las secciones para estos polítopos y realizó representaciones y modelos físicos de las mismas, aunque no detalló el proceso como en los casos anteriores.

3. CONCLUSIÓN

Asumiendo que es posible y deseable desarrollar un conjunto de habilidades de visualización en el trabajo en matemáticas, hemos propuesto un conjunto de actividades para la formación de profesores que las trabajan de forma explícita. Con esta propuesta se presenta la visualización como herramienta imprescindible para la resolución de problemas geométricos, al tiempo que se da a conocer un método intuitivo y útil para el trabajo con poliedros complejos y con polítopos.

La propuesta se ha implementado en dos contextos distintos de formación de profesores y ha sido recibida con gran interés. Desde el punto de vista de los formadores, las actividades han puesto en juego la coordinación pretendida entre formas de razonamiento y representaciones mentales o externas. Queda pendiente, como trabajo futuro, realizar un análisis más profundo sobre la influencia de este tipo de

formación en la práctica docente del profesor, para lo cual estamos completando la propuesta con actividades de carácter profesional.

REFERENCIAS

- [1] A. ARCAVI, The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **52** (2003), 215–241.
- [2] M. T. BATTISTA, G. H. WHEATLEY Y G. TALSMA, The importance of spatial visualization and cognitive development for Geometry learning in preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* **13** (1982), no. 5, 332–340.
- [3] A. J. BISHOP, Space and Geometry. R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press (1983), 175–203.
- [4] A. BOOLE STOTT, On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **7** (1900), no. 3, 1–21.
- [5] D. L. BROWN Y N. C. PRESMEG, Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference* **2** (1993), 137–144.
- [6] T. DREYFUS, On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education, *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Assisi, Italia (1991), 33–48.
- [7] T. EISENBERG Y T. DREYFUS, On the reluctance to visualize in Mathematics. W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics. M.A.A. Notes and Report Series* **19** (1991), 25–37.
- [8] E. FISCHBEIN, The Theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics* **24** (1993), 139–162.
- [9] A. GUTIERREZ, Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **1** (1996), no. 3, 3–19.
- [10] R. HERSHKOWITZ, Visualization in geometry: Two sides of the coin, *Focus on learning problems in Mathematics* **11** (1989), no. 1, 61–76.
- [11] N. MALARA, On the difficulties of visualization and representation of 3-D objects in middle school teachers, *Proceedings of the 22th PME Conference* **3** (1998), 239–246.
- [12] D. MOORE-RUSSO Y T. SCHROEDER, Preservice and Inservice Secondary Mathematics Teachers Visualization of Three-dimensional Objects and Their Relationships, *Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Nevada,

- Reno (2007). Disponible el 24 de enero de 2010 en http://www.allacademic.com/meta/p191175_index.html
- [13] B. PARZYSZ, “Knowing” vs. “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics* **19** (1988), 79–92.
 - [14] I. PLASENCIA, Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos. *Tesis Doctoral*, Universidad de La Laguna, Tenerife (2000).
 - [15] I. POLO-BLANCO, Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension, *Historia Mathematica* **35(2)** (2008), 123–139.
 - [16] I. POLO-BLANCO, Regular and semi-regular polytopes: a didactic approach using Boole-Stott methods, *5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, Praga (2008), 513–520.
 - [17] N. C. PRESMEG, Visualisation in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics* **6(3)** (1986), 42–46.
 - [18] N. C. PRESMEG, Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school Mathematics, *Proceeding of the XV International Conference for the Psychology of Mathematics Education* **15** (1991), 191–198.
 - [19] N. C. PRESMEG, Research on visualization in learning and teaching mathematics. A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, Rotterdam: Sense Publishers (2006), 205–235.
 - [20] D. STYLIANOU, On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* **4** (2001), 225–232.
 - [21] G. TORREGOSA Y H. QUESADA, Coordinación de procesos cognitivos en Geometría, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **10(2)** (2007), 275–300.
 - [22] I. S. YAKIMANSKAYA, The development of spatial thinking in schoolchildren, *Soviet Studies in Mathematics Education* **3**, N.C.T.M.: Reston, USA (1991).

IRENE POLO BLANCO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
Correo electrónico: irene.polo@unican.es