Sobre un contraejemplo a la conjetura de Hirsch

por

Francisco Santos*

Resumen. Se describe someramente el origen e historia de la Conjetura de Hirsch sobre el diámetro posible del grafo de un politopo, así como las ideas principales que llevaron al contraejemplo a la misma recientemente anunciado por el autor.

1. La conjetura y su contexto

En el año 2000 la revista *Computing in Science and Engineering* pidió a Jack Dongarra y a Francis Sullivan que eligieran los «10 Algoritmos del Siglo XX» [11]; es decir, los algoritmos más influyentes en el desarrollo de la ciencia y la ingeniería del pasado siglo. Uno de los diez elegidos fue el *método del símplice* [28].

Programación lineal y método del símplice[1]

La programación lineal es el problema de encontrar el máximo (o mínimo) de una función lineal en un dominio definido por desigualdades también lineales. Nació hacia 1939 con los trabajos del ruso L. V. Kantorovitch (1912–1986) [16], quien en 1975 recibió por ello el Premio Nobel de Economía. Pero su trabajo no tuvo mucho impacto y quedó dormido durante muchos años, por razones estratégicas[2] y políticas.[3] Acabada la guerra, George Dantzig (1914–2005), que por entonces trabajaba en la Oficina de Control Estadístico del ejército estadounidense, recibió el encargo de desarrollar modelos que permitieran la planificación («programación», en el lenguaje militar) a gran escala del uso de recursos y horas de trabajo. En 1947 publicó

*Financiado parcialmente por el proyecto MTM2008-04699-C03-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

[1]La mayoría de la literatura sobre optimización en español se refiere a este método como el *método del símplex* o el *método símplex*, dejando sin traducir la palabra inglesa que denota a las celdas de un complejo simplicial, o a los politopos con vértices afínmente independientes. Pero, puesto que en combinatoria geométrica y topológica es más habitual utilizar *símplice* para referirse a estos objetos, hemos decidido aquí aplicar esta palabra también al método.

[2]No en vano se trata de la teoría de cómo organizar de la mejor manera posible una cantidad limitada de recursos (o defensas) para obtener de ellos el mayor rendimiento (o conseguir los mínimos daños).

[3]Aunque la economía planificada de la URSS podría parecer el caldo de cultivo perfecto para las ideas de Kantorovitch, los economistas soviéticos eran muy reticentes a que los precios, producción, etc. fueran «decididos» por el propio sistema, y en general a cualquier intrusión matemática en su ámbito.

Figura 1: Kantorovitch, Dantzig y von Neumann, padres de la programación lineal.

su método del símplice [6], que resolvía los problemas de programación lineal de manera extraordinariamente eficiente, como él mismo ilustró con la resolución de un problema con 70 variables [7]. En la terna de «padres de la programación lineal» suele incluirse también al eminente John von Neumann (1903–1957) quien, también en 1947, desarrolló la teoría de la dualidad en programas lineales.[4]

La relevancia de la programación lineal queda expresada, por ejemplo, en las siguientes citas:

> *Se usa para asignar recursos, planificar producción, organizar turnos de trabajo, diseñar carteras de inversión y formular estrategias de mercado, o militares. La versatilidad e impacto económico de la programación lineal en el mundo industrial de hoy es verdaderamente admirable.*[5] (Eugene Lawler [23])

> *Si hiciéramos estadísticas sobre qué problema matemático está usando más tiempo de computación en este momento en el mundo (excluyendo problemas de manejo de bases de datos, como búsqueda u ordenación) la respuesta sería probablemente la programación lineal.*[6] (László Lovász [24])

[4]Dantzig relata en [9] cómo, tras exponerle a von Neumann sus nuevas ideas en una visita privada en octubre de 1947, éste le sorprendió con una improvisada «conferencia de hora y media sobre la teoría matemática de los programas lineales». Ante el asombro de Dantzig, von Neumann confesó que lo único que había hecho era resumir la teoría de juegos que acababa de desarrollar con Oscar Morgensten, y que su conjetura era que los dos problemas eran equivalentes.

[5]*It is used to allocate resources, plan production, schedule workers, plan investment portfolios and formulate marketing (and military) strategies. The versatility and economic impact of linear programming in today's industrial world is truly awesome.*

[6]*If one would take statistics about which mathematical problem is using up most of the computer time in the world, then (not including database handling problems like sorting and searching) the answer would probably be linear programming.*

El método del símplice

Durante más de 30 años el método del símplice fue el único método practicable para resolver grandes problemas de programación lineal. Sin embargo, aún a fecha de hoy no sabemos si es un algoritmo polinómico, en el sentido de la teoría de la complejidad. Es decir, no sabemos si un problema de programación lineal con un número d de variables y un número n de restricciones puede ser resuelto mediante el método del símplice en un tiempo que dependa de manera polinómica de los parámetros n y d. La razón fundamental de ese desconocimiento es que no sabemos, dada una región poliédrica de dimensión d y definida por n desigualdades lineales, si su *grafo* tiene *diámetro* polinómico en los parámetros n y d.

Expliquemos esto: Todo dominio (acotado, el caso no acotado es similar) de $\mathbb{R}^d$ definido por restricciones lineales es un *politopo* [36] (lo que en dimensión tres llamamos comúnmente un poliedro) y tiene vértices, aristas y caras de diversas dimensiones. Los vértices y aristas forman un grafo, cuyo *diámetro* es el máximo número de aristas que puede ser necesario recorrer para viajar desde un vértice a otro por el camino más corto. El método del símplice funciona en dos etapas: primero busca un vértice arbitrario del dominio definido por las restricciones y después va moviéndose de vértice a vértice, recorriendo en cada paso una arista del politopo y haciendo siempre que el funcional que queremos maximizar aumente. El método tiene cierta libertad a la hora de elegir a qué vértice vecino del actual dirigirse, y el criterio utilizado para la elección de uno u otro se llama la «regla de pivote». Esta indefinición hace que muchos autores no hablen del método del símplice como un único algoritmo sino como una familia de ellos, cuya complejidad y características pueden depender de la regla elegida, que bien puede tener una componente aleatoria.

En todo caso, encontrar el nuevo vértice al que nos queremos mover es computacionalmente sencillo. Pero el número de veces que hay que hacerlo será, como mínimo, la distancia del vértice original al vértice óptimo en el grafo del politopo. Si tenemos mala suerte, esa distancia puede ser el diámetro del grafo.

Las conjeturas de Hirsch y de los d pasos

Es decir, para poder acotar la complejidad del método del símplice es necesario ser capaces primero de acotar el diámetro de los grafos de politopos.[7] Aquí es donde entra la Conjetura de Hirsch:

Conjetura 1.1 (Hirsch, 1957). *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d definido por n desigualdades no puede ser nunca mayor que $n - d$.*

Esta conjetura fue formulada por Warren M. Hirsch (1918–2007) en una carta dirigida a Dantzig en 1957. Dantzig la incluyó en su libro «Linear programming and extensions» [8], considerado la «Biblia» de la programación lineal. Desde entonces ha atraído la atención de matemáticos tanto puros como aplicados. Sin embargo,

[7] El recíproco no es cierto; aunque supiéramos que el diámetro es pequeño, quedaría el problema de cómo hacer que el algoritmo del símplice encuentre un camino corto.

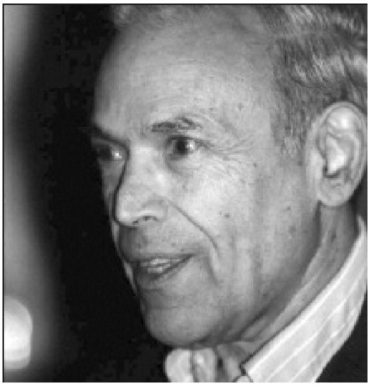 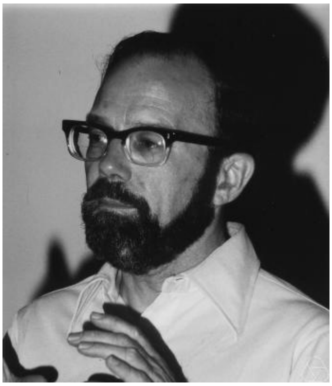

Figura 2: Hirsch (izquierda), autor de la conjetura que lleva su nombre; Klee (derecha) demostró, junto con Walkup, su equivalencia con la *Conjetura de los d pasos*. Ambos fallecieron en 2007.

más de 50 años después nuestro conocimiento sobre el problema sigue siendo humillantemente escaso: ¡no se conoce ninguna cota superior polinómica para el diámetro que se conjetura lineal!

Pero algunas cosas sí que se conocen.[8] Una de las personas que más contribuyó a ello es Victor Klee (1925–2007), profesor de la Universidad de Washington en Seattle, quien, por ejemplo, en 1967 demostró, junto con D. W. Walkup, que el estudio de la conjetura en general es equivalente al estudio del caso $n = 2d$. (Obsérvese que éste es, por ejemplo, el caso del d-cubo):

Teorema 1.2 (Teorema de los d pasos [22]). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d definido por n desigualdades no puede ser nunca mayor que $n-d$ (Conjetura de Hirsch).*
2. *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d definido por $2d$ desigualdades no puede ser nunca mayor que d (Conjetura de los d pasos).*

En el mismo artículo, Klee y Walkup demostraron la Conjetura de los d pasos para $d \leq 5$. El caso $d = 6$ ha sido verificado computacionalmente hace apenas dos años por Bremner y Schewe [5]. De él se deduce la Conjetura de Hirsch para $n \leq d+6$, porque la equivalencia a que se refiere el Teorema 1.2 no es «para cada d» sino, más bien, «para cada $n - d$»: Klee y Walkup demuestran que, si llamamos $H(n, d)$ al diámetro máximo que puede tener un politopo de dimensión d con n facetas, se tiene que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \max_{d \in \mathbb{N}} \{H(d+m, d)\} = H(2m, m).$$

[8]El lector interesado en los detalles puede consultar el survey clásico de Klee y Kleinschmidt [20] o el que yo he escrito recientemente con Eddie Kim [19].

Complejidad de la programación lineal

En 1979 y 1984, L. G. Khachiyan [18] y N. Karmarkar [17] encontraron sendos algoritmos polinómicos para resolver la programación lineal: el *método del elipsoide* y el *método de puntos interiores*. El primero, aunque supuso una revolución desde el punto de vista teórico [23, 24], nunca tuvo muchas implicaciones prácticas por su dificultad de implementación y sus pobres resultados. El segundo sí, pero aún hoy el método del símplice compite con él en utilización, y suscita interés (y perplejidad) por varias razones. Entre otras:

- Aunque no sabemos si el método del símplice es polinómico, en la práctica es un método muy rápido. Por ejemplo, en un survey sobre programación lineal Todd [33] dice: *«El método del símplice, típicamente, encuentra el óptimo en como mucho* $2m$ *ó* $3m$ *pasos»*,[9] donde $m = n - d$ representa el número de desigualdades menos la dimensión.[10] En una recensión que acaba de ser publicada en el *Bulletin of the American Math. Society* [34], Todd repite esa estimación y añade: *«El método del símplice sigue siendo, si no el método a elegir, sí uno de los métodos a elegir, a la misma altura de, y en ciertas clases de problemas superior a, aproximaciones más modernas.»*[11]

  Esto se ha considerado tradicionalmente evidencia a favor de la Conjetura de Hirsch o, al menos, a favor de una versión «polinómica» de la misma. Pero también puede ser debido a otras razones. Por ello, hay una vasta literatura dedicada a estudiar qué pasa en el método del símplice para politopos aleatorios, o para reglas de pivote aleatorias en politopos fijos, o cuando se permite perturbar ligeramente los coeficientes de las desigualdades que los definen, etc. [4, 14, 21, 25, 26, 27, 30, 32, 35].

- Los métodos de Khachiyan y Karmarkar son polinómicos cuando la complejidad se mide en el *modelo de bits*. O sea, el «tamaño del input» no son los parámetros n y d sino el tamaño en bits de la matriz que define a nuestro politopo.[12] Aunque el modelo de bits es muy bueno para el análisis teórico, se considera que el *modelo real*, introducido por Blum, Shub y Smale hacia 1990 [2, 3], describe mejor la eficiencia práctica de un algoritmo. La pregunta de si existe un algoritmo para programación lineal que sea polinómico en el modelo real está abierta, y fue incluida en el año 2000 por Steven Smale en su lista de *«Problemas matemáticos para el siglo que viene»* [31]. Si se encontrase una regla de pivote polinómica para el método del símplice, la respuesta a la pregunta de Smale sería automáticamente afirmativa.

[9] *«The (primal) simplex method typically requires at most* $2m$ *to* $3m$ *pivots to attain optimality.»*

[10] En su *forma estándar*, el dominio de un problema de programación lineal se presenta mediante n variables no negativas restringidas por m ecuaciones lineales. La no-negatividad de cada variable produce una faceta, y las ecuaciones bajan la dimensión del dominio a $n - m$.

[11] *«The simplex method has remained, if not the method of choice, a method of choice, usually competitive with, and on some classes of problems superior to, the more modern approaches».*

[12] Básicamente, eso da $nd \log(K)$ donde K es la cota máxima para los coeficientes de la matriz.

2. El contraejemplo

El 10 de mayo envié lo siguiente como resumen para mi conferencia en el congreso *The Mathematics of Klee and Grünbaum: 100 years in Seattle* [1]:

> *Sólo he estado en Seattle una vez, en enero de 2002, para impartir un coloquio en la U. de Washington. Aunque Victor Klee ya estaba jubilado —tenía 76 años— vino al Departamento de Matemáticas para charlar conmigo. Tuvimos una amena conversación en el transcurso de la cual me preguntó: ¿Por qué no intentas refutar la Conjetura de Hirsch? [...] Esta charla da respuesta a esa pregunta. En ella describiré la construcción de un politopo de dimensión* 43 *con* 86 *facetas y diámetro mayor que* 43*. La prueba se basa en una generalización del Teorema de los d pasos de Klee y Walkup.*[13]

Ese mismo día Gil Kalai publicó la noticia en su muy visitado blog [15] y la entrada de «Hirsch conjecture» en la Wikipedia fue actualizada para hacerse eco de ella. Incluso, alguien escribió un soneto al respecto [13].

El contraejemplo que anuncio en el resumen tiene dos ingredientes: una generalización del Teorema de los d pasos, y la construcción explícita de cierto politopo de dimensión cinco con 48 facetas y unas propiedades concretas.

El Teorema generalizado de los d pasos

El *Teorema generalizado de los d pasos* se refiere a una clase muy particular de politopos, que llamaremos *husos*:

Definición 2.1. *Un* huso *es un politopo que posee dos vértices con la propiedad de que toda* faceta *(cara de codimensión uno) contiene a alguno de ellos. A esos dos vértices los llamamos los* extremos *del huso.*

Dicho de otro modo, un huso es la intersección de dos conos poliédricos no acotados, cuyos ápices son los extremos del huso, como en la Figura 3.

Obsérvese que las facetas de un politopo se corresponden exactamente con las desigualdades que lo definen (cada faceta está contenida en el hiperplano donde una de las desigualdades se satisface con igualdad). Por tanto, el número de facetas es el número de desigualdades en el problema de la programación lineal (salvo que haya desigualdades superfluas).

Teorema 2.2 (Teorema generalizado de los d pasos). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

[13] *I have been in Seattle only once, in January 2002, when I visited to give a colloquium talk at UW. Although Victor Klee was already retired—he was 76 years old—he came to the Department of Mathematics to talk to me. We had a nice conversation during which he asked: Why don't you try to disprove the Hirsch Conjecture? [...] This talk is the answer to that question. I will describe the construction of a* 43*-dimensional polytope with* 86 *facets and diameter bigger than* 43*. The proof is based on a generalization of the d-step Theorem of Klee and Walkup.*

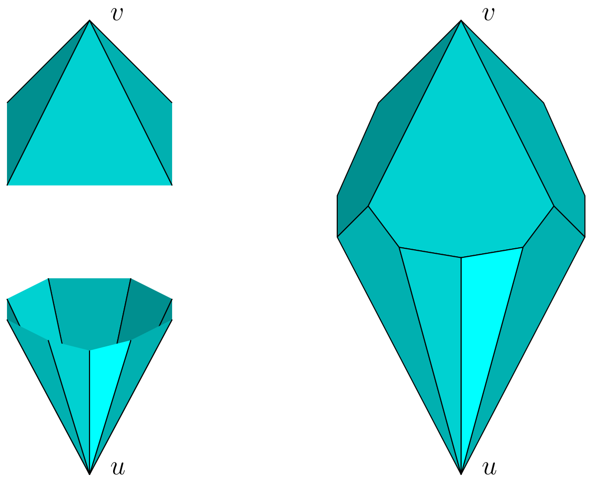

Figura 3: Un huso se obtiene al intersecar dos conos no acotados.

1. *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d definido por n desigualdades no puede ser nunca mayor que $n-d$ (Conjetura de Hirsch).*
2. *En todo huso de dimensión d se puede ir de un extremo al otro atravesando como mucho d aristas.*

Lo importante aquí es que el número de facetas del huso ya no aparece en el enunciado, como ocurría en el Teorema de los d pasos original.

La demostración del Teorema 2.2 se basa en el siguiente lema:

Lema 2.3 (Lema del Huso). *Si P es un huso de dimensión d, con m facetas, y en el que hacen falta k pasos para ir de un extremo a otro, y si $m > 2d$, entonces existe otro huso de dimensión $d+1$, con $m+1$ facetas, y en el que hacen falta $k+1$ pasos para ir de un extremo a otro.*

El Lema del Huso nos da la implicación de (2) a (1) en el Teorema 2.2 por inducción sobre $m-2d$, donde m es el número de facetas de nuestro huso: Si $m \leq 2d$ entonces no hay nada que demostrar (el huso es ya un contraejemplo a la Conjetura de Hirsch); y si $m > 2d$, aplicando $m-2d$ veces el lema obtenemos un politopo (un huso, aunque esto ya no es importante) de dimensión $d+(m-2d) = m-d$, con número de facetas $2m-2d$, y en el que hacen falta $k+(m-2d) > d+(m-2d) = m-d$ pasos para ir de un extremo a otro. O sea, hemos violado la Conjetura de los d pasos «tradicional» y, en particular, la Conjetura de Hirsch.

Es fácil demostrar que en todo huso 3-dimensional bastan tres aristas para ir de un extremo u al otro v: los vértices y aristas no incidentes ni a u ni a v forman un ciclo que necesariamente contiene algún vértice adyacente a u, alguno adyacente a v, y alguna arista que conecta vértices de los dos tipos (ver Figura 3). Pero en dimensión superior no ocurre así. El contraejemplo a la Conjetura de Hirsch se obtiene a partir del siguiente huso:

Teorema 2.4. *Existe un huso de dimensión* 5 *con* 48 *facetas y en el que hacen falta* 6 *pasos para ir de un extremo al otro.*

Como hemos de aplicar el Lema del Huso $n - 2d = 38$ veces, el resultado final es un politopo de dimensión 43 y con 86 facetas.

Husos y prismatoides

El Teorema 2.4 ha sido verificado computacionalmente por Julian Pfeifle y Eddie Kim con la ayuda del software `polymake` [12][14]. Sin embargo, el artículo [29] contiene una demostración del mismo, previa a la verificación computacional y que, de hecho, explica cómo se llegó a la construcción del huso en cuestión. Incluimos aquí algunas de las ideas, que permiten entender un huso de dimensión cinco como un objeto puramente 3-dimensional.

Quizá por «deformación profesional», puesto que he trabajado mucho con triangulaciones y complejos simpliciales [10], mi tendencia es siempre a dualizar la Conjetura de Hirsch: no pienso en cómo ir de un vértice a otro en un politopo a través de sus aristas, sino en cómo ir de una faceta a otra en pasos que consisten en cruzar caras de codimensión dos (*crestas*). Esto hace el problema mucho más combinatorio. Lo primero que debemos entender es en qué se convierten los husos al dualizarlos:

Definición 2.5. *Un* prismatoide *es un politopo cuyos vértices están todos contenidos en la unión de dos facetas, a las que llamaremos* bases*.*

El nombre proviene, por supuesto, de que un prisma es un caso particular de prismatoide. Animamos al lector a que vuelva a pensar qué significa la propiedad de los d pasos para un prismatoide de dimensión tres: al principio nos encontramos en una de las dos bases, digamos la de abajo; en un primer paso vamos a una de las facetas que comparten arista con dicha base. En un segundo paso nos trasladamos a una que comparte arista con la base de arriba, y en un tercero vamos a la base de arriba.

Prismatoides y mapas geodésicos superpuestos

Sea Q un prismatoide de dimensión d, con bases Q^+ y Q^-. Las bases son a su vez politopos de dimensión $d-1$, y no hay pérdida de generalidad en suponerlas paralelas (eso se puede conseguir mediante una transformación proyectiva, que no altera la combinatoria de Q). Sea H un hiperplano paralelo a Q^+ y Q^- e intermedio entre ambos. No es difícil demostrar entonces que:

- La sección $Q \cap H$ es suficiente para recuperar toda la combinatoria de Q. (Ver Figura 4).
- Combinatoriamente, $Q \cap H$ es la suma de Minkowski de Q^+ y Q^-. (Ver Figura 5). En particular, el abanico normal de $Q \cap H$ es la superposición («refinamiento común») de los abanicos normales de Q^+ y Q^-.

[14] Pueden verse algunos detalles en `http://personales.unican.es/santosf`

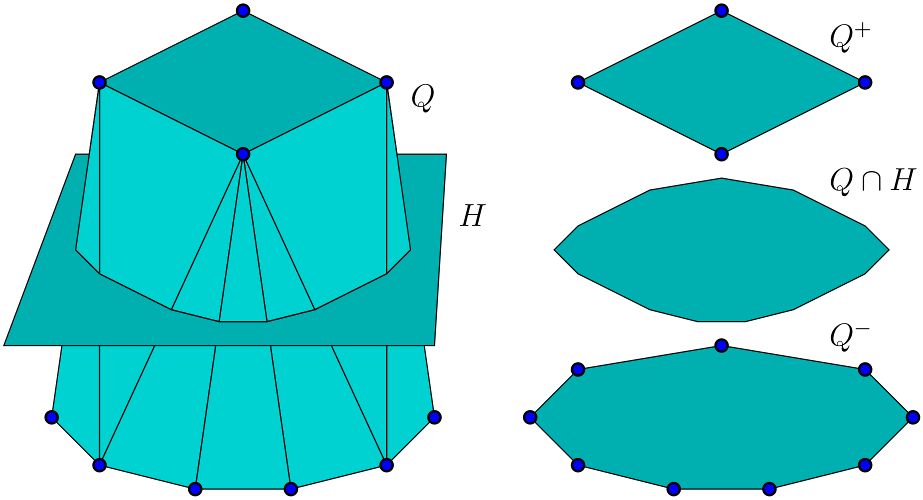

Figura 4: Dos $(d-1)$-politopos Q^+ y Q^+-, el d-prismatoide Q que forman, y su intersección con un hiperplano intermedio.

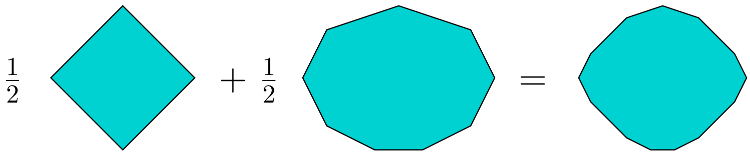

Figura 5: Toda sección paralela del prismatoide es la suma de Minkowski (ponderada) de las bases Q^+ y Q^-.

Recordemos lo que es el *abanico normal* de un politopo P: en cada punto x del borde del politopo se puede definir el cono normal exterior, que no es más que el conjunto de funcionales lineales cuyo máximo en P se alcanza en x. Puntos en (el interior relativo de) una misma cara de P tienen el mismo cono normal, así que P nos da una descomposición del espacio vectorial $(\mathbb{R}^d)^*$ de todos los funcionales lineales en una familia finita de conos con ápice en el origen y que, además, forman un complejo en el sentido habitual (sus intersecciones son siempre en caras completas). Este complejo es el abanico normal de P.

Ahora bien, los abanicos normales de los politopos Q^+ y Q^-, que están formados por conos lineales de dimensión $d-1$, podemos intersecarlos con la esfera unidad S^{d-2} sin perder información sobre ellos. Por tanto, construir un prismatoide de dimensión cinco es básicamente lo mismo que construir dos *mapas geodésicos* (descomposiciones celulares en las que todas las celdas son intersección de hemisferios) en la 3-esfera S^3. El siguiente lema nos dice qué han de cumplir esos dos mapas para que el prismatoide nos dé un contraejemplo a la Conjetura de Hirsch:

Lema 2.6. *Sea Q un prismatoide de dimensión d con bases paralelas Q^+ y Q^- y sean G^+ y G^- los mapas geodésicos que se obtienen al intersecar con S^{d-2} los abanicos normales de Q^+ y Q^-. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Se puede ir de Q^+ a Q^- en Q en a lo más d pasos.*
2. *Al superponer G^+ y G^-, se puede ir de un vértice de G^+ a uno de G^- atravesando a lo más $d-2$ aristas del refinamiento común así obtenido.*

Es decir, construir un prismatoide en dimensión cinco que viole la propiedad de los d pasos es lo mismo que construir una pareja de mapas geodésicos en la esfera S^3 que al superponerlos violen la «propiedad de los $d-2$ pasos» expresada en este último lema. Esto es lo que hace mi construcción, usando en cierto modo para ello la bien conocida *fibración de Hopf* de la 3-esfera: los dos mapas tienen cada uno su «parte interesante» en un toro, y esos dos toros se colocan uno paralelo al otro, y de manera adecuada, en la esfera. Los mapas concretos utilizados, dibujados en un toro, se muestran en la Figura 6. Pero los detalles los dejamos para que el lector interesado los consulte en el artículo [29].

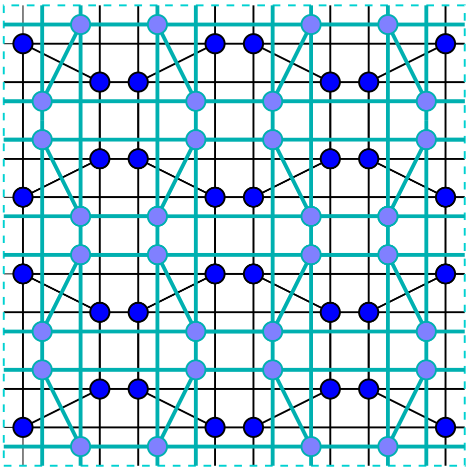

Figura 6: Los mapas geodésicos de las bases Q^+ (oscuro) y Q^- (claro) del prismatoide dual al huso del Teorema 2.4. Los mapas están dibujados en un mismo toro, pero han de entenderse en dos toros paralelos en la 3-esfera.

3. ¿Y ahora qué?

En un survey sobre la Conjetura de Hirsch [20] publicado en 1987, Klee y Kleinschmidt dicen: *Encontrar un contraejemplo a la conjetura no será más que un pequeño primer paso en la línea de investigación de la misma.*[15] Aunque para dar ese «pe-

[15] *Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.*

queño paso» hayan sido necesarios 53 años desde el enunciado de la conjetura y 23 desde que se escribieron esas palabras, suscribo totalmente la frase. Mi contraejemplo se puede convertir, mediante construcciones clásicas, en una familia infinita de contraejemplos a la Conjetura de Hirsch en la que el diámetro de los politopos construidos crece, básicamente, como $1{,}02\,n$. Es decir, se viola la conjetura, que era $n - d$, pero el diámetro obtenido no deja de ser lineal y no nos dice mucho sobre el problema de fondo.

Quizá, por tanto, más significativo que el contraejemplo en sí es el *Teorema generalizado de los d pasos*, que abre una nueva línea de ataque al problema. En este sentido, sería interesante estudiar los siguientes problemas:

1. ¿Existen husos/prismatoides para $d = 4$ en los que no sea posible ir de un extremo/base el otro en d pasos? Como ya hemos dicho, en dimensión tres es fácil demostrar que no existen, y en dimensión cinco se tiene el del Teorema 2.4.
2. Mi prismatoide, con 24 vértices en cada base, con toda seguridad no es el más pequeño posible. Su número de vértices proviene de que la construcción es altamente simétrica, como se desprende de la Figura 6. ¿Existen 5-prismatoides con, digamos, 20 vértices y que necesiten más de cinco pasos para ir de una base a la otra? Si la respuesta es sí tendríamos contraejemplos a la Conjetura de Hirsch en dimensión 15 en vez de 43.
3. Un desafío computacional: ¿cómo construir y verificar explícitamente el politopo de dimensión 43 que viola la Conjetura de Hirsch? Nuestra demostración se basa en aplicar 38 veces el Lema del Huso. Pero cada aplicación del lema duplica (más o menos) el número de vértices del huso (o de facetas del prismatoide dual), con lo cual al final tendremos un politopo de dimensión 43 con más o menos 2^{40} (un billón) de vértices.[16]

   Para empeorar las cosas, la demostración del Lema del Huso necesita de una «perturbación» de los coeficientes. Por tanto, aunque los coeficientes del huso/prismatoide original son extremadamente sencillos (números enteros entre -5 y 5), esa torre de 38 perturbaciones da lugar o bien a coeficientes racionales de un tamaño inmenso si se decide usar aritmética exacta, o bien a problemas muy sofisticados de cálculo numérico si se decide usar aproximaciones numéricas.

Referencias

[1] «The Mathematics of Klee and Grünbaum: 100 years in Seattle», 28–30 de julio de 2010, University of Washington, Seattle. Comité organizador Fred Holt, Isabella Novik, Rekha Thomas y Gordon Williams. `https://sites.google.com/a/alaska.edu/kleegrunbaum/`

[16] Si a algún lector le parece imposible que un politopo definido por una matriz de «sólo» 86 desigualdades y 43 variables tenga ese número de vértices, que piense en el cubo de dimensión 43, que tiene exactamente 2^{43} vértices. Es en ejemplos como éste donde se aprecia la importancia de la distinción entre «polinómico» y «exponencial».

[2] L. Blum, F. Cucker, M. Shub y S. Smale, Complexity and real computation, Springer-Verlag, 1997.

[3] L. Blum, M. Shub y S. Smale, On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: NP-completeness, Recursive Functions and Universal Machines, *Bull. Amer. Math. Soc.* **21** (1) (1989), 1–46.

[4] K. H. Borgwardt, The Average Number of Steps Required by the Simplex Method Is Polynomial, *Zeitschrift fur Operations Research* **26** (1982), 157–177.

[5] D. Bremner y L. Schewe, Edge-graph diameter bounds for convex polytopes with few facets, Preprint `arXiv:0809.0915`, septiembre de 2008.

[6] G. B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, *Activity Analysis of Production and Allocation*, pp. 339–347. Cowles Commission Monograph No. 13. John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y.; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.

[7] G. B. Dantzig, Application of the simplex method to a transportation problem, *Activity Analysis of Production and Allocation*, pp. 359–373. Cowles Commission Monograph No. 13. John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y.; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.

[8] G. B. Dantzig, Linear programming and extensions, Princeton University Press, 1963. Reimpreso en la serie *Princeton Landmarks in Mathematics*, Princeton University Press, 1998.

[9] G. B. Dantzig, Linear programming, en *History of Mathematical Programming: A Collection of Personal Reminiscences*, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and A. Schrijver (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 1991, pp. 19–31.

[10] J. A. De Loera, J. Rambau y F. Santos, *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 2010. ISBN: 978-3-642-12970-4.

[11] J. Dongarra y F. Sullivan, Guest Editors' Introduction: The Top 10 Algorithms, *Comput. Sci. Eng.* **2** (2000), 22–23.

[12] E. Gawrilow y M. Joswig, Polymake: A software package for analyzing convex polytopes. En *Polytopes—combinatorics and computation (Oberwolfach, 1997)*, DMV Sem. **29**, pp. 43–73, Birkhäuser, 2000.

[13] Curt Hopkins, The Hirsch Conjecture, Disproved. *ReadWriteWeb*, `http://www.readwriteweb.com/archives/the_hirsch_conjecture_disproved.php`

[14] G. Kalai, A subexponential randomized simplex algorithm. En *Proceedings of the 24th annual ACM symposium on the Theory of Computing*, pp. 475–482, ACM Press, Victoria, 1992.

[15] G. Kalai, Online blog `http://gilkalai.wordpress.com`.

[16] L. V. Kantorovitch, A new method of solving of some classes of extremal problems, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **28** (1940), 211–214.

[17] N. Karmarkar, A new polynomial time algorithm for linear programming, *Combinatorica* **4** (4) (1984), 373–395.

[18] L. G. Khachiyan, A polynomial algorithm in linear programming (en ruso) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **244** (5) (1979), 1093–1096.

[19] E. D. Kim y F. Santos, An update on the Hirsch conjecture, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, aparecerá en 2010. DOI: 10.1365/s13291-010-0001-8

[20] V. Klee y P. Kleinschmidt, The d-Step Conjecture and Its Relatives, *Mathematics of Operations Research* **12** (4) (1987), 718–755.

[21] V. Klee y G. J. Minty, How good is the simplex algorithm?, en *Inequalities, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, Calif., 1969; dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin)*, Academic Press, New York, 1972, pp. 159–175.

[22] V. Klee y D. W. Walkup, The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$, *Acta Math.* **133** (1967), 53–78.

[23] E. L. Lawler, The great mathematical sputnik of 1979, *The Mathematical Intelligencer* **2** (4) (1980), 191–198.

[24] L. Lovász, A new linear programming algorithm—better or worse than the simplex method? *Math. Intelligencer* **2**, no. 3 (1979/80), 141–146.

[25] J. Matoušek, M. Sharir y E. Welzl, A subexponential bound for linear programming. En *Proceedings of the 8th annual symposium on Computational Geometry*, pp. 1–8, 1992.

[26] N. Megiddo, Linear programming in linear time when the dimension is fixed, *J. Assoc. Comput. Mach.* **31** (1) (1984), 114–127.

[27] N. Megiddo, On the complexity of linear programming. En *Advances in economic theory: Fifth world congress*, T. Bewley, ed., pp. 225–268, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[28] J. C. Nash, The (Dantzig) Simplex Method for Linear Programming, *Comput. Sci. Eng.* **2** (2000), 29–31.

[29] F. Santos, A counter-example to the Hirsch Conjecture, Preprint arXiv:1006.2814, junio de 2010.

[30] S. Smale, On the Average Number of Steps of the Simplex Method of Linear Programming, *Mathematical Programming* **27** (1983), 241–262.

[31] S. Smale, Mathematical problems for the next century. *Mathematics: frontiers and perspectives*, pp. 271–294, American Mathematics Society, Providence, RI, 2000.

[32] D. A. Spielman y S. Teng, Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time, *J. ACM* **51** (3) (2004), 385–463.

[33] M. J. Todd, The many facets of linear programming, *Math. Program., Ser. B* **91** (2002), 417–436.

[34] M. J. Todd, Book review on «The basic George B. Dantzig» (by Richard W. Cottle, Stanford University Press, Stanford, California, 2003), *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, en prensa. Publicado online el 19 de mayo de 2010, DOI: 10.1090/S0273-0979-2010-01303-3.

[35] R. Vershynin, Beyond Hirsch conjecture: walks on random polytopes and smoothed complexity of the simplex method. En *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* **47** (2006), 133–142.

[36] G. M. Ziegler, Lectures on polytopes, Graduate Texts in Mathematics, 152, Springer-Verlag, 1995.

Francisco Santos, Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, 39005 Santander

Correo electrónico: francisco.santos@unican.es

Página web: http://personales.unican.es/santosf