Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Pierre-Louis Lions

por

José M. Rodríguez Seijo

Pierre-Louis Lions fue galardonado con la Medalla Fields durante el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) celebrado en Zúrich en agosto de 1994. El profesor S. R. S. Varadhan, al presentar su trabajo ante los congresistas (véase [30]), hizo hincapié en la variedad de áreas de las matemáticas a las que Pierre-Louis Lions ha contribuido de forma única, aunque probablemente sus aportaciones más importantes son en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales. En este artículo intentaremos presentar brevemente su biografía y una selección de sus trabajos más destacados.

Pierre-Louis Lions.

1. Su biografía

Pierre-Louis Lions nació el 11 de agosto de 1956 en Grasse (Francia), ciudad muy próxima a Cannes y a Niza, en plena Costa Azul, y conocida mundialmente por sus perfumes. Es hijo del famoso matemático francés Jacques-Louis Lions[1] y, cuando éste obtuvo una plaza de profesor en la Universidad de París (Pierre-Louis tenía entonces seis años), toda la familia se trasladó a la capital francesa.

[1] Jacques-Louis Lions es considerado por muchos uno de los fundadores de la matemática aplicada francesa moderna y, entre los numerosos cargos de responsabilidad que desempeñó, podemos destacar que presidió la Unión Matemática Internacional (IMU) de 1991 a 1994. Tras su fallecimiento, y en reconocimiento a su apoyo a la matemática aplicada española, la Escuela de Otoño Hispano Francesa, coorganizada actualmente por la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) y la *Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles* (SMAI), lleva su nombre.

Pierre-Louis Lions ingresó en 1975 en la prestigiosa *École Normale Supérieure* de París, donde estudió hasta 1979. Ese mismo año presentó su tesis de estado[2], bajo la dirección de Haïm Brézis, en la Universidad Pierre y Marie Curie (también conocida por Paris VI), tras lo cual se casó con Lila Laurenti, con quien ha tenido un hijo (Dorian).

Desde 1981 es profesor en la Universidad Paris-Dauphine, donde forma parte del CEREMADE (*Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision*). También es profesor de la *École Polytechnique* desde 1992, donde es miembro del Departamento de Matemática Aplicada.

Actualmente (desde el año 2002) es el titular de la Cátedra «Ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones» en el Colegio de Francia[3]. También es presidente del Consejo de Administración de la *École Normale Supérieure* de París desde el año 2009.

Además de la Medalla Fields en 1994, Pierre-Louis Lions ha recibido otros premios y honores: el Premio Doisteau-Blutet (1986), el Premio IBM (1987), el Premio (de equipo) Philip Morris para la Ciencia (1991), el Premio Ampère (1992), el Premio (de equipo) Instituto de Finanzas Europlace (2003) y el Premio Thomson (2004); es Doctor *Honoris Causa* por la Universidad de Heriot-Watt (Edimburgo) y de la *City University* de Hong Kong; es miembro de la Academia de Ciencias del Instituto de Francia (desde 1994), del Instituto Lombardo (desde 2002) y de la Academia de las Tecnologías francesa (desde 2003).

2. Su obra

No es sencillo clasificar la obra de Pierre-Louis Lions. Ha trabajado en una gran variedad de áreas dentro de las matemáticas, pero el núcleo central de su trabajo es la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, muchas de las cuales surgen de la descripción matemática de problemas que provienen de la física, la ingeniería o la economía. La no linealidad de estas ecuaciones es fuente de un problema: cada ecuación es diferente y requiere de métodos diferentes para su estudio. Uno de los grandes méritos de Pierre-Louis Lions ha sido proponer métodos válidos para amplios grupos de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, que es posiblemente lo más parecido a una teoría general que se puede conseguir en este campo.

[2]Desde 1954 y hasta 1984 han coexistido en Francia dos tipos de tesis: la tesis de tercer ciclo y la tesis de estado. La duración media de la tesis de estado era mayor que la de la tesis de tercer ciclo pero, además de conferir el título de doctor, habilitaba para acceder a ciertos puestos en la Universidad y dirigir investigación. Actualmente existe un solo tipo de doctorado y la capacitación adicional que antes se lograba con la tesis de estado se consigue ahora con un diploma denominado *habilitation à diriger des recherches.*

[3]El Colegio de Francia es una institución de especial relevancia en Francia. Está formada por 52 cátedras de todas las ramas del saber. Cuando hay una cátedra vacante, son el resto de catedráticos quienes escogen al nuevo miembro, sin más restricción que la excelencia en su campo (que no tiene por qué ser el mismo que el de la vacante que cubre), y es el nuevo miembro el que decide el título de su cátedra. Para un investigador supone un gran prestigio formar parte del Colegio de Francia. Para hacernos una idea, son profesores de la Sección de Matemáticas, además de Pierre-Louis Lions, Alain Connes (Medalla Fields 1982), Jean-Christophe Yoccoz (Medalla Fields 1994) y Don Zagier (Premio Frank Nelson Cole en teoría de números 1987).

Siguiendo a [30], [16], [29] y [28], vamos a clasificar sus trabajos previos a la obtención de la Medalla Fields en tres grandes grupos: la ecuación de Hamilton-Jacobi y las soluciones de viscosidad, el cálculo de variaciones y el principio de concentración-compacidad, y la ecuación de Boltzmann y las soluciones renormalizadas. Finalmente, dedicaremos un apartado a los trabajos posteriores a la concesión de la Medalla.

2.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi y soluciones de viscosidad

La ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden muy conocida por los físicos y los ingenieros en el ámbito de la mecánica, pero también aparece en teoría de control óptimo, donde es conocida como ecuación de Bellman. Esta ecuación puede escribirse en su forma estacionaria como un problema de Dirichlet

$$H(\mathbf{x}, u, Du) = 0 \text{ en } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi, \tag{1}$$

o en su forma evolutiva como un problema de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(\mathbf{x}, t, u, Du) = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad u|_{\partial\Omega} = \phi, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \tag{2}$$

donde la función incógnita u toma valores reales, Du denota su gradiente respecto de $\mathbf{x}$, Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$, $T > 0$, ϕ y u_0 son funciones dadas, y H es una función dada (normalmente no lineal) llamada *Hamiltoniano*.

La dificultad principal de las ecuaciones (1) y (2) es que, en general, no tienen soluciones en el sentido clásico (es decir, $u \in C^1(\Omega)$ en (1) y $u \in C^1(\Omega \times (0, T))$ en (2)). Esto nos obliga a trabajar con *soluciones generalizadas*[4], que sólo satisfacen la ecuación en *casi todo punto*[5] y permiten la existencia de más de una solución (en

[4]Uno de los métodos clásicos para estudiar este tipo de ecuaciones es el de las *curvas características*, curvas a lo largo de las cuales la solución es constante (al menos en el caso lineal; el método se puede generalizar al caso cuasi-lineal donde la solución no es necesariamente constante sobre las curvas características). Este método no es aplicable cuando hay no linealidades en Du y puede demostrarse que en muchos de estos casos no existen soluciones en el sentido clásico. Para evitar este problema se define el concepto de solución generalizada (de modo que si existe solución clásica también lo es generalizada, pero donde una solución generalizada podría no ser solución clásica). De esta forma se amplía el conjunto donde buscar soluciones, pero se puede perder la unicidad, algo que no es deseable cuando la ecuación estudiada proviene de la física, porque se pueden introducir soluciones sin sentido físico. La forma más usual de introducir las soluciones generalizadas es a través de las denominadas *soluciones débiles*, que consiste en considerar que las ecuaciones (1) y (2) se satisfacen en el sentido de las *distribuciones* (la *teoría de las distribuciones*, formalizada por Laurent Schwartz, permite derivar funciones cuya derivada no existe en el sentido clásico), multiplicar por una función *test* suficientemente regular e integrar respecto a la variable espacial. Mediante técnicas similares a la integración por partes (pero en $\mathbb{R}^n$) se pueden trasladar las derivadas espaciales de la función incógnita a la función test (que, por ser regular, no presenta problemas al respecto), obteniéndose de esta forma la *formulación variacional* del problema original. Esta formulación permite obtener resultados de existencia mediante técnicas del análisis funcional y está adaptada para aproximar numéricamente las soluciones por métodos como, por ejemplo, los *elementos finitos*.

[5]Dos funciones medibles coinciden en casi todo punto si coinciden salvo en un conjunto de medida nula.

general infinitas). Por ejemplo, el problema de tipo (1), con $\Omega = (0, 1)$, dado por

$$|Du| = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

no tiene solución regular, pero tiene infinitas soluciones generalizadas que satisfacen la ecuación en casi todo punto (basta considerar una línea en zig-zag, con pendientes ± 1, y que satisfaga las condiciones de contorno).

En [17] Pierre-Louis Lions recopila los resultados previos y los obtenidos por él mismo sobre existencia y unicidad de solución de los problemas (1) y (2). La gran aportación de Pierre-Louis Lions (junto con M. G. Crandall) al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales de primer orden es la introducción de la noción de *solución de viscosidad* en [10]. Esta nueva noción de solución permite establecer la existencia y unicidad de solución de los problemas (1) y (2) bajo condiciones muy generales sobre H.

Previamente a dar la definición de solución de viscosidad, vamos a escribir los problemas (1) y (2) de una forma uniforme. Consideremos la ecuación

$$F(\mathbf{y}, u, Du) = 0 \text{ en } \mathcal{O}, \tag{3}$$

donde $\mathcal{O}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$, F es una función continua de $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$ y Du es el gradiente de u respecto de $\mathbf{y}$. Los problemas (1) y (2) son casos particulares de (3), ya que si en (3) tomamos $\mathcal{O} = \Omega$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ y $F = H$ obtenemos (1), y si tomamos $\mathcal{O} = \Omega \times (0, T)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$ y $F(\mathbf{x}, t, u, \mathbf{p}) = p_{n+1} + H(\mathbf{x}, t, p_1, \ldots, p_n)$ obtenemos (2).

DEFINICIÓN 1. *Sea u una función de $\mathcal{O}$ en $\mathbb{R}$ y sea $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{O}$. Llamamos* superdiferencial *de u en $\mathbf{y}_0$ al conjunto*

$$D^+u(\mathbf{y}_0) = \left\{ \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m \ : \ \limsup_{\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}_0) - \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|} \leq 0 \right\},$$

y subdiferencial *de u en $\mathbf{y}_0$ al conjunto*

$$D^-u(\mathbf{y}_0) = \left\{ \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m \ : \ \liminf_{\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0} \frac{u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}_0) - \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|} \geq 0 \right\}.$$

Es claro de la definición anterior que si $\mathbf{p}_0 \in D^+u(\mathbf{y}_0) \cap D^-u(\mathbf{y}_0)$ entonces u es diferenciable en $\mathbf{y}_0$ y $Du(\mathbf{y}_0) = \mathbf{p}_0$.

DEFINICIÓN 2. *Diremos que $u \in C(\mathcal{O})$ es una* subsolución de viscosidad *de*

$$F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y}), Du(\mathbf{y})) = 0 \text{ en } \mathcal{O}, \tag{4}$$

si verifica que

$$F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y}), \mathbf{p}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{O}, \ \forall \mathbf{p} \in D^+u(\mathbf{y}),$$

y diremos que u es una supersolución de viscosidad *si verifica que*

$$F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y}), \mathbf{p}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{O}, \ \forall \mathbf{p} \in D^-u(\mathbf{y}).$$

Definición 3. *Diremos que* $u \in C(\mathcal{O})$ *es una* solución de viscosidad *de* (4) *si es simultáneamente subsolución y supersolución de viscosidad.*

El siguiente resultado de [10] establece la relación entre las soluciones de viscosidad y las soluciones clásicas, demostrando que toda solución clásica es solución de viscosidad, y que si una solución de viscosidad es diferenciable entonces es una solución clásica.

Teorema 1.

(i) Sea $u \in C^1(\mathcal{O})$ *solución clásica de* (3)*, es decir*

$$F(\mathbf{y}, u(\mathbf{y}), Du(\mathbf{y})) = 0 \text{ en } \mathcal{O}, \quad u \in C^1(\mathcal{O}).$$

Entonces u *es una solución de viscosidad.*

(ii) Sea u *una solución de viscosidad de* (3) *tal que es diferenciable en* $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{O}$*. Entonces*

$$F(\mathbf{y}_0, u(\mathbf{y}_0), Du(\mathbf{y}_0)) = 0.$$

Los autores también prueban en [10] el siguiente resultado de estabilidad, muy útil para demostrar la existencia de solución, pues viene a decir que el límite de una sucesión de soluciones de viscosidad es solución de viscosidad del problema límite.

Teorema 2. *Sea* $F_k(\mathbf{y}, s, \mathbf{p})$ *una sucesión de funciones continuas tales que* $F_k(\mathbf{y}, s, \mathbf{p})$ *converge uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *hacia una función* $F(\mathbf{y}, s, \mathbf{p})$*. Sea* u_k *una solución de viscosidad de* $F_k(\mathbf{y}, u_k, Du_k) = 0$ *en* $\mathcal{O}$*. Supongamos que* u_k *converge uniformemente en subconjuntos compactos de* $\mathcal{O}$ *hacia una función* u*. Entonces* u *es solución de viscosidad de* $F(\mathbf{y}, u, Du) = 0$ *en* $\mathcal{O}$*.*

Finalmente, en [10] y [8] demuestran la existencia y unicidad de solución de los problemas (1) y (2) si H verifica ciertas condiciones muy generales sobre su crecimiento y su continuidad. Vale la pena señalar que el nombre de soluciones de viscosidad proviene de que para demostrar la existencia de solución se utiliza el *método de la viscosidad evanescente*[6]:

Teorema 3. *Sea* $\varepsilon > 0$*, y consideremos una familia* $H_\varepsilon(\mathbf{x}, s, \mathbf{p})$ *de funciones continuas tales que convergen uniformemente, cuando* ε *tiende a cero, en subconjuntos compactos de* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *hacia una función* $H(\mathbf{x}, s, \mathbf{p})$*. Supongamos también que* $u^\varepsilon \in C^2(\Omega)$ *es una solución de*

$$-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + H_\varepsilon(\mathbf{x}, u^\varepsilon, Du^\varepsilon) = 0 \text{ en } \Omega, \tag{5}$$

y que u^ε *converge uniformemente en subconjuntos compactos de* Ω *hacia* $u \in C(\Omega)$*. Entonces* u *es una solución de viscosidad de* (1)*.*

No podemos terminar esta sección sin mencionar que la teoría de soluciones de viscosidad ha sido generalizada a las ecuaciones en derivadas parciales no lineales de segundo orden (véase [9]), esto es, de la forma

$$F(\mathbf{x}, u, Du, D^2u) = 0 \text{ en } \Omega,$$

donde D^2u representa a las derivadas de segundo orden de u.

[6] El nombre del método proviene de que en (5) el parámetro ε, que puede interpretarse físicamente como una viscosidad, se hace tender a cero.

2.2. Cálculo de variaciones y principio de concentración-compacidad

El cálculo de variaciones estudia los extremos de los funcionales, es decir, dado un cierto espacio de funciones V, un conjunto (usualmente cerrado) $K \subset V$ y un funcional $J : V \to \mathbb{R}$, entonces queremos resolver el problema

$$\text{buscar } u \in K \text{ tal que } J(u) = \min_{v \in K} J(v). \tag{6}$$

Este tipo de problemas tienen muchas aplicaciones, y así $J(u)$ puede medir la energía asociada al estado determinado por u (en problemas que provienen de la mecánica u otras partes de la física), o bien el *coste* de u (en problemas de optimización o relacionados con la economía). V es el espacio de funciones donde buscamos la solución, y K el conjunto de restricciones sobre la solución, de modo que $K = V$ en ausencia de restricciones o $K \subsetneq V$ si imponemos restricciones (por ejemplo, $K = \{v \in V : \|v\|_V = 1\}$).

Aunque en la exposición que seguimos aquí no insistiremos en ello, el cálculo de variaciones y las ecuaciones en derivadas parciales están muy relacionados. Por ejemplo, la función u solución del problema

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

para Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, es también solución del problema (6), con

$$J(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|Dv|^2 - fv\right] d\mathbf{x}$$

y donde $K = V$ es el espacio de funciones adecuado[7].

La forma más habitual de demostrar la existencia de solución del problema (6) es construir una sucesión minimizante $\{v_k\}$ ($v_k \in K$) tal que

$$J(v_k) \to I = \inf_{v \in K} J(v). \tag{7}$$

Puesto que ahora $\{J(v_k)\}$ está acotado, es probable que podamos demostrar que $\{v_k\}$ también lo está (en V). De aquí se deduce (si el espacio V tiene las propiedades adecuadas) que $\{v_k\}$ converge *débilmente*[8] a un límite u en V. Finalmente, si J tiene buenas propiedades de continuidad respecto a la topología débil, podemos demostrar que $J(u) \leq I$, y terminamos si demostramos que $u \in K$.

[7]En concreto, con $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \partial v/\partial x_i \in L^2(\Omega),\ v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, y donde $L^2(\Omega)$ es el conjunto de funciones medibles y de cuadrado integrable. En la definición de $H_0^1(\Omega)$, las derivadas parciales de v han de entenderse en el sentido de las distribuciones y $v = 0$ en $\partial\Omega$ en el sentido de las trazas.

[8]Si E es un espacio de Banach y E' su dual topológico (esto es, el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de E sobre $\mathbb{R}$), además de la topología original en E (que denominaremos *fuerte*), podemos definir otra inducida por E' (que denominaremos *débil*). Sin entrar en detalles de cómo se define esta topología, sí diremos que se verifica que una sucesión $\{x_k\}$ (en E) converge débilmente (es decir, con la topología débil) a x en E si y sólo si $\{f(x_k)\}$ converge a $f(x)$ para todo $f \in E'$.

Para completar los pasos que acabamos de enumerar, usualmente es necesario hacer uso de resultados del tipo del teorema de Rellich-Kondrachov, que (entre otras cosas) garantiza que de una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ se puede extraer una subsucesión convergente en el *espacio de Lebesgue*[9] $L^q(\Omega)$, siempre que Ω sea un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1, y $1 \leq q < p^* = np/(n-p)$ (cuando $p < n$; si $p \geq n$ entonces la afirmación del teorema es válida para cualquier $q \geq 1$). De lo que acabamos de decir se deduce que el teorema de Rellich-Kondrachov puede fallar (y de hecho falla) si Ω es no acotado o si $q = p^*$ (para $p < n$).

En [18], [19], [20] y [21], Pierre-Louis Lions resuelve el problema (6) en los casos límite en los que Ω no es acotado o bien $q = p^*$, al hallar una forma de extraer una subsucesión convergente de la sucesión minimizante (7) incluso en esos casos extremos. Para ello presenta en [18] el denominado *principio de concentración-compacidad* que le permite afirmar que es posible extraer una subsucesión convergente de dicha sucesión minimizante si y sólo si cierta desigualdad se verifica de forma estricta. La novedad del método presentado por Lions reside en que la generalidad de los argumentos que él utiliza permiten aplicarlo a muy variados ejemplos, algunos de los cuales se presentan en los artículos citados.

2.3. Ecuación de Boltzmann y soluciones renormalizadas

La ecuación de Boltzmann es utilizada en Física para describir la dinámica de las moléculas de un gas rarificado en ausencia de fuerzas exteriores. En concreto, es de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = Q(f, f), \tag{8}$$

donde $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ es una función no negativa que representa la densidad de moléculas que en el instante $t \in \mathbb{R}^+$ y en el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tienen velocidad $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, y $Q(f, f)$ es una expresión integral, cuadrática en f, que tiene en cuenta el efecto en f de las colisiones entre moléculas.

En [11] R. J. DiPerna y P.-L. Lions logran dar la primera demostración rigurosa de la existencia global de solución de (8) para unas condiciones iniciales generales. Hasta ese momento sólo se habían obtenido resultados parciales (existencia global para condiciones iniciales pequeñas, o existencia de solución para un pequeño intervalo de tiempo) y no parecía posible obtener un resultado de existencia tan general como el probado por DiPerna y Lions en [11]. De ahí el impacto que produjo la publicación de este artículo. En él introducen la noción de solución renormalizada, que básicamente es la siguiente:

[9] Los espacios $L^p(\Omega)$ (con $p \geq 1$) se definen como el conjunto de funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medibles (en el sentido de Lebesgue) tales que $|f|^p$ es integrable, y están dotados con la norma $\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f|^p \, d\mathbf{x}\right]^{1/p}$. Los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ($p \geq 1$) se definen como el conjunto de funciones de $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas parciales (en el sentido de las distribuciones) pertenecen también a $L^p(\Omega)$, y están dotados con la norma $\|u\|_{W^{1,p}} = \left[\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p\right]^{1/p}$.

Sea $\beta(t) = \log(1+t)$ y $g = \beta(f)$. Una función no negativa f es una *solución renormalizada* de (8) si es solución en el sentido de las distribuciones de

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g = \frac{Q(f,f)}{1+f} \tag{9}$$

y $Q(f,f)/(1+f)$ es *localmente integrable*[10].

Obsérvese que (8) y (9) son sólo formalmente equivalentes, ya que $Q(f,f)$ podría no tener sentido aunque $Q(f,f)/(1+f)$ lo tenga[11], pero DiPerna y Lions demuestran que, bajo ciertas condiciones de regularidad sobre $Q(f,f)$, f es solución de (8) en el sentido de las distribuciones si y sólo si es solución renormalizada. Finalmente demuestran la existencia de una solución renormalizada y que ésta verifica una interesante desigualdad de entropía (esto último se completa en [13]).

Otra interesante aplicación de las soluciones renormalizadas es obtenida por DiPerna y Lions en [12]. En este artículo obtienen una generalización del teorema de Picard-Lindelöf (o teorema de Cauchy-Lipschitz), demostrando existencia y unicidad de solución del problema

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = b(s, \mathbf{X}), \qquad \mathbf{X}|_{s=0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,$$

sin necesidad de pedir que la función b sea Lipschitz, pidiendo tan solo ciertas condiciones de integrabilidad sobre b y su divergencia, y (para preservar la unicidad) que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, λ, verifique que

$$\exp(-A(s))\lambda \leq \lambda \circ \mathbf{X}(s) \leq \exp(A(s))\lambda, \qquad \text{para todo } s \geq 0,$$

para una función $A(s)$ que depende de la norma de la divergencia de b, y donde $\lambda \circ \mathbf{X}(s)$ es la medida imagen de λ por la aplicación $\mathbf{X}(s)$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (es decir, $\mathbf{X}(s)$ lleva $\mathbf{x}_0$ en $\mathbf{x}$, si $\mathbf{X}|_{s=0} = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}$ y, por tanto, $(\lambda \circ \mathbf{X}(s))(\omega) = \lambda(\mathbf{X}(s)(\omega))$, para todo $\omega \subset \mathbb{R}^n$ medible).

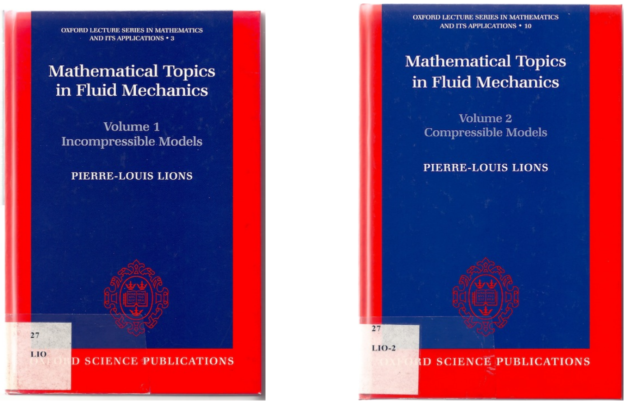
2.4. Otros trabajos

Las tres secciones anteriores no recogen más que una pequeña parte de los trabajos de Pierre-Louis Lions previos a la concesión de la Medalla Fields. Sus publicaciones son tan numerosas y variadas que resultaría imposible recogerlas todas. No podemos, sin embargo, dejar de mencionar algunos artículos que, aunque no se pueden clasificar en ninguna de las tres secciones anteriores, figuran entre los más citados de P.-L. Lions. Por ejemplo, debemos mencionar [4] y [5], sobre las soluciones no nulas de

$$-\Delta u = g(u),$$

[10] Una función medible se dice localmente integrable si es integrable en todo compacto contenido en su dominio de definición. Toda función localmente integrable puede considerarse una distribución.

[11] Podría ocurrir que $Q(f,f)$ no fuese localmente integrable (y ni siquiera una distribución), aunque $Q(f,f)/(1+f)$ sí lo fuese (y, por tanto, una distribución).



Mathematical Topics in Fluid Mechanics (dos volúmenes).

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua impar. Tampoco debemos olvidarnos de [7], donde se mejora un conocido resultado de *compacidad por compensación*; o de [26], donde se introducen las medidas de Wigner; o de [1], sobre el tratamiento de imágenes; o de [27], donde se reformulan los sistemas de conservación escalares mediante el uso de *ecuaciones cinéticas*[12].

Tras obtener la Medalla Fields, la capacidad de trabajo de Pierre-Louis Lions no ha disminuido, y el número de publicaciones y temas por él tratados es enorme. Es muy difícil decidir qué trabajos mencionar aquí, por lo que hemos optado por señalar tan solo algunas de las líneas de investigación que consideramos especialmente interesantes.

Su publicación en dos volúmenes *Mathematical Topics in Fluid Mechanics* (véanse [22] y [23]) es uno de sus trabajos más citados. En él presenta algunos de los resultados más relevantes sobre fluidos newtonianos[13] (muchos de ellos propios).

También están relacionados con la mecánica de fluidos los dos artículos [24] y [25], donde Lions y Masmoudi deducen algunas de las ecuaciones más conocidas de la mecánica de fluidos incompresibles (como las ecuaciones de Navier-Stokes, de Euler o de Stokes) a partir de la ecuación de Boltzmann haciendo tender a cero el *recorrido libre medio*[14].

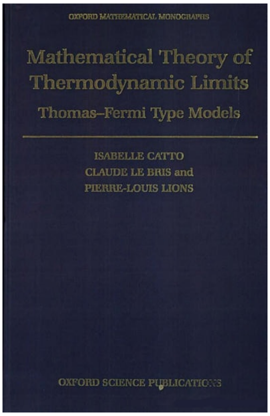
En otra serie de trabajos interesantes, Lions estudia el comportamiento asintótico de ciertos modelos moleculares. Así, en colaboración con otros autores, Lions publica el libro titulado *Mathematical Theory of Thermodynamic Limits: Thomas-Fermi*

[12] Se denominan ecuaciones cinéticas a las ecuaciones de la física estadística que describen la dinámica de las moléculas de un gas rarificado. Así, la ecuación de Boltzmann que presentamos en la subsección 2.3 es un ejemplo de ecuación cinética.

[13] Los fluidos newtonianos son aquéllos en los que el tensor de tensiones es una función afín del gradiente del campo de velocidades. Las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes son las que rigen el movimiento de un fluido newtoniano.

[14] El recorrido libre medio de una molécula es la distancia promedio que recorre entre dos colisiones sucesivas.

Type Models (véase [6]) en el que se estudia el límite termodinámico de un modelo molecular en el ámbito de la química cuántica. Este trabajo se continúa, entre otros muchos artículos, en [2], [15] y [3], donde se obtienen algunos modelos de la mecánica de medios continuos como el límite de modelos moleculares cuando la distancia interatómica tiende a cero.



Mathematical Theory of Thermodynamic Limits: Thomas-Fermi Type Models.

Para finalizar queremos citar el, para nosotros, interesantísimo artículo [14], en el que Lions, junto a J. M. Lasry, desarrolla una teoría de gran utilidad en economía y finanzas. En este artículo estudian algunas situaciones en las que un número elevado de *jugadores racionales* toman sus decisiones siguiendo una estrategia basada en una información global resultante de la acción combinada de todos los jugadores. El nombre de *Mean Field Games*[15] de la teoría lo proponen los autores por analogía con la *Mean Field Theory*[16] en mecánica estadística. A grandes rasgos, los autores hacen tender a infinito el número de jugadores y, en lugar de fijarse en el comportamiento individual de cada uno de ellos, observan el comportamiento promedio de diferentes grupos de ellos.

REFERENCIAS

[1] L. ÁLVAREZ, F. GUICHARD, P.-L. LIONS Y J.-M. MOREL, Axioms and Fundamental Equations of Image Processing, *Arch. Rational Mech. Anal.* **123** (3) (1993), 199–257.

[2] X. BLANC, C. LE BRIS Y P.-L. LIONS, From molecular models to continuum mechanics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **164** (4) (2002), 341–381.

[15] Teoría de juegos en campo medio.
[16] Teoría de campo medio.

[3] X. Blanc, C. Le Bris y P.-L. Lions, Atomistic to continuum limits for computational materials science, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **41** (2) (2007), 391–426.

[4] H. Berestycki y P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (4) (1983), 313–345.

[5] H. Berestycki y P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (4) (1983), 347–375.

[6] I. Catto, C. Le Bris y P.-L. Lions, *The Mathematical Theory of Thermodynamic Limits: Thomas-Fermi Type Models*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[7] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer y S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, *J. Math. Pures Appl. (9)* **72** (3) (1993), 247–286.

[8] M. G. Crandall, L. C. Evans y P.-L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **282** (2) (1984), 487–502.

[9] M. G. Crandall, H. Ishii y P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **27** (1) (1992), 1–67.

[10] M. G. Crandall y P.-L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** (1) (1983), 1–42.

[11] R. J. DiPerna y P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, *Ann. of Math. (2)* **130** (2) (1989), 321–366.

[12] R. J. DiPerna y P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (3) (1989), 511–547.

[13] R. J. DiPerna y P.-L. Lions, Global solutions of Boltzmann's equation and the entropy inequality, *Arch. Rational Mech. Anal.* **114** (1) (1991), 47–55.

[14] J.-M. Lasry y P.-L. Lions, Mean field games, *Jpn. J. Math.* **2** (1) (2007), 229–260.

[15] C. Le Bris y P.-L. Lions, From atoms to crystals: a mathematical journey, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **42** (3) (2005), 291–363.

[16] J. Lindenstrauss, L. C. Evans, A. Douady, A. Shalev y N. Pippenger, Fields Medals and Nevanlinna Prize Presented at ICM-94 in Zürich, *Notices Amer. Math. Soc.* **41** (9) (1994), 1103–1111.

[17] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics 69, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.

[18] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (2) (1984), 109–145.

[19] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (4) (1984), 223–283.

[20] P.-L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1** (1) (1985), 145–201.

[21] P.-L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1** (2) (1985), 45–121.

[22] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 3, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[23] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[24] P.-L. LIONS Y N. MASMOUDI, From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics. I, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158** (3) (2001), 173–193.

[25] P.-L. LIONS Y N. MASMOUDI, From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics. II, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158** (3) (2001), 195–211.

[26] P.-L. LIONS Y T. PAUL, Sur les mesures de Wigner, *Rev. Mat. Iberoamericana* **9** (3) (1993), 553–618.

[27] P.-L. LIONS, B. PERTHAME Y E. TADMOR, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1) (1994), 169–191.

[28] J. J. O'CONNOR Y E. F. ROBERTSON, Pierre-Louis Lions, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lions.html`

[29] M. VANNINATHAN, On the work of P.-L. Lions, *Current Sci.* **70** (2) (1996), 125–135.

[30] S. R. S. VARADHAN, Lecture about Pierre-Louis Lions, `http://www.mathunion.org/o/General/Prizes/Fields/1994/lions.lecture.ps`

JOSÉ M. RODRÍGUEZ SEIJO, DPTO. DE MÉTODOS MATEMÁTICOS Y DE REPRESENTACIÓN, UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Correo electrónico: `jose.rodriguez.seijo@udc.es`