El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Matemagia «básica»[*]

por

Carlos Vinuesa[†]

No debería yo caer en esto. Y menos escribiendo un artículo dedicado a Martin Gardner[1], abanderado de la lucha contra los «fraudes paranormales». Pero a veces las coincidencias pueden llegar ser asombrosas. Y es que me he dado cuenta de que estaba predestinado a escribir este artículo.

Antes de conocer a Javier Cilleruelo, mi director de tesis (y también director de esta sección), a mediados de 2004 descubrí *El diablo de los números* de modo «accidental» al pulsar sobre la palabra «¡Magia!» en la página web de Pablo Fernández Gallardo. *Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos*, curioso título. Leí el artículo [2] de principio a fin y cuando llegué a la bibliografía... ¿Quién puede resistirse a «Los siguientes son libros de magia donde se desvelan trucos profesionales. Sólo se encuentran en tiendas especializadas.»? A partir de ahí, ¡gracias, Vicente Canuto[2]!, la magia se convirtió en mi principal afición.

Recuerdo, mucho antes de eso, haber hojeado los libros de Martin Gardner[3] que había por casa: algunos recopilatorios de sus artículos en *Scientific American*

[*]Sí, el título es un juego de palabras: las matemáticas de este artículo tienen que ver con las bases de numeración.

[†]El autor agradece a la Fundación Ramón Areces la concesión de la beca postdoctoral de la que disfruta en la actualidad.

[1]Martin Gardner nació en 1914. Hombre de diversas inquietudes, saltó a la fama gracias a su «columna» mensual de *Juegos matemáticos* en la revista *Scientific American*, sección que escribió durante 25 años. Dada la calidad divulgativa de sus escritos, recibía de continuo cartas de aficionados y matemáticos (él mismo bromeaba afirmando tener archivadas muchas cartas de matemáticos que no entendía). A todas ellas contestaba con entusiasmo. En mayo de 2010 nos dejaba. También rodeado de muchas matemáticas y cartas (52 por baraja) que intento entender, escribo sobre algunas de las cosas que he aprendido de él. Sirvan estas páginas como pequeño homenaje al gran maestro que inspiró a más de una generación.

[2]Vicente Canuto es el autor del excelente libro *Cartomagia fundamental*, con el que muchos nos hemos adentrado en el mundo de la magia.

[3]En el número anterior de La Gaceta, Pedro Alegría y Santiago Fernández escribieron un artículo sobre Martin Gardner (ver bibliografía, [1]), al final del cual aparecen las referencias de sus obras.

con anotaciones de mi padre en los márgenes, otros que creo que había conseguido mi hermano como *¡Ajá! Inspiración* [7]. Supongo que Martin Gardner (a través de la lectura, claro) fue una de las personas que influyó en que decidiera estudiar matemáticas. Otra de las personas que seguro que influyó, además de algunos de mis profesores del instituto, fue María Gaspar (sí, sus iniciales también son MG, al igual que las de Martin Gardner y *Mathematical Games*, título en inglés de su columna en *Scientific American*, lo cual ya da «miedito»; es más, si cogemos las dos primeras letras de cada palabra obtenemos la sugerente palabra MAGA). Ella siempre dice antes de una competición de matemáticas que «hay que enseñar a la gente lo que sabe, no lo que no sabe», lo que me recuerda, no sé por qué, a las ya míticas palabras de Martin Gardner: «Ese era el secreto del éxito de mi columna. Me llevaba tanto tiempo entender aquello de lo que estaba escribiendo que sabía cómo escribirlo de manera que la mayoría de lectores lo entendiera». Precisamente, hace un par de años compartí una de las charlas de la «IV Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán» con María, en la que recuerdo haber hablado de Gardner.

La cosa va más allá. La sección de *Juegos Matemáticos* de Martin Gardner tuvo una rápida acogida entre los matemáticos profesionales y él mismo cuenta cómo Solomon W. Golomb fue uno de los primeros en aportar material para su sección y uno de los que más material aportó. En concreto, su estudio sobre los poliominós (inspiradores entre otras cosas del legendario juego *Tetris*) fue el protagonista del número de mayo de 1957. El nombre de Golomb es recordado en el mundo matemático por las reglas de Golomb. Al contrario de lo que ocurre con una regla usual, las reglas de Golomb sólo tienen marcas en algunos números enteros. Estas marcas cumplen la condición de que no hay dos pares de ellas a la misma distancia. Y resulta, por tanto, que una regla de Golomb es exactamente lo mismo que un conjunto de Sidon, el tema de mi tesis doctoral y sobre el que el propio Javier escribió en 2008 un artículo en esta misma sección [3].

No sólo eso, desde 2004 he recurrido muchas veces a los escritos de Martin Gardner tanto por motivos divulgativos como mágicos. Por eso, ante la propuesta de Javier de que escribiera algo sobre magia y matemáticas para la sección, pensé que sería una buena idea que este artículo fuera un pequeño homenaje a Gardner. Este curso estoy estudiando en Cambridge. Cuando llegué, a principios de octubre, me hice miembro del círculo local de magos, el *Pentacle Club*, una de las sociedades de magia más antiguas. Tras ello, y con idea de preparar el presente artículo, comienzo a leer el prefacio del libro *Mathematics, Magic and Mistery* y ¿qué me encuentro? ¡Que lo primero que hace Gardner es hablar del fundador del *Pentacle Club*! No acaba ahí la cosa. Resulta que una vez esbozados los temas que quiero tratar en el artículo, comento al secretario del círculo la curiosa anécdota y le digo que entre otras cosas voy a hablar de Alex Elmsley. ¿Y qué me dice? ¡Que Elmsley también fue miembro del *Pentacle Club*!

Estaba claro que tenía que haber una explicación más científica, y al fin la he encontrado: todas las cosas por las que me intereso comparten algo. Desde que M. A. Barracus fuera mi favorito de la serie *El equipo A* (como dato curioso para el que no lo recuerde, las siglas M. A. son de «Mala Actitud»), los asuntos que me rodean y de los que hablaba hace un momento comienzan exactamente por esas dos letras: MArtin, MAtemáticas, MAría, MAgia... Diréis que soy un MAniático, un MAjadero o un MAlandrín (y Jaime Bauzá y Luis Poza saben por qué escribo esa palabra[4]), pero sí, yo también me quedé helado cuando me dijeron que los miembros del *Pentacle Club* se reúnen los MArtes.

1. El juego que todo el mundo se sabe: las 21 cartas

La siguiente situación ocurre con inusitada frecuencia. Un profano (así es como los magos llamamos al resto de las personas) arrebata las cartas al mago para hacer «un juego que se sabe». Toma 21 cartas del mazo y las reparte cara arriba en 3 montones[5], pidiendo a un espectador que piense una de las cartas y le diga en qué montón está. A continuación recoge los montones colocando el montón indicado en el centro. De nuevo repite el tedioso reparto y pregunta al espectador en qué montón se halla ahora su carta. Tras recoger las cartas colocando dicho montón en el centro, le parece que no han sido suficientes repartos y decide realizar un tercero y último. El amable espectador confiesa en qué montón se encuentra ahora su naipe, tras lo que el ejecutante coloca ese montón entre los otros dos y finaliza el juego encontrando la carta de turno. Para ello sí que existen ya diversas variaciones que van desde contar 11 (por cualquiera de los lados) y sacar la carta que hace ese número sin más, a pasar dicha carta abajo del montón y pedir al espectador que lo sostenga en las puntas de sus dedos para, con un golpe fuerte y seco, desparramar todas las cartas por el suelo, menos la elegida, que se quedará en la mano del sorprendido espectador.

Y es que un alto porcentaje de las personas del planeta conocen este juego. Cuando pasamos a preguntar el motivo por el que el juego funciona, el porcentaje de conocedores se reduce drásticamente. En los juegos matemáticos es habitual ver, incluso entre los magos, cómo el ejecutante desconoce muchas veces el motivo por el que funcionan. En cierto sentido, creo yo, el juego es tan «mágico» para el ejecutante como para el espectador, pues ambos desconocen el secreto. Intentaré explicar los efectos claramente para los matemáticos y explicar las matemáticas en detalle para los magos, aun a riesgo de que eso desemboque en un artículo que aburra a ambos...

Tratemos de comprender por qué funciona el juego. La primera vez que el espectador dice en qué montón está su carta, dicho montón va al centro, luego la elegida ocupará una de las 7 posiciones centrales. En el segundo reparto, por tanto, la elegida tendrá que ser una de las tres cartas centrales de su paquete. La figura 1 muestra cómo quedan las cartas en el segundo reparto, donde se han numerado del 1 al 7 las posibles elecciones del espectador (aunque el reparto se realiza cara arriba, se han puesto cara abajo las restantes cartas para enfatizar el hecho de que ninguna de ellas puede ser la que pensó el espectador). Por último, en el tercer reparto la elegida habrá de ser la carta central de su montón. Por eso, al recomponer todo poniendo

[4]Por más que intente explicar esto, sólo va a ser gracioso para Jaime y Luis, así que ni siquiera lo intentaré. Sí, es que los magos siempre tenemos que dejar algo sin explicar.

[5]Salvo que se diga lo contrario, siempre que se reparten cartas en montones se hace de una en una como si de una partida de cartas se tratara. Además, durante toda esta sección, el paquete de cartas se mantendrá cara abajo en la mano y las cartas se irán repartiendo sobre la mesa cara arriba. De esta manera, el orden de las cartas no se invierte al repartir.

ese paquete en el centro, la carta queda en la posición central («el centro del centro es el centro»), tal como se muestra en la figura 2.

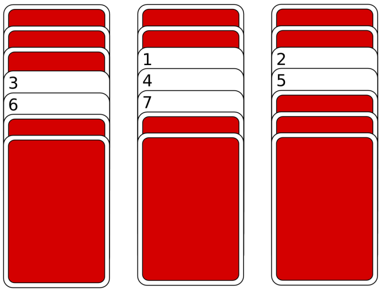

Figura 1: Segundo reparto en «el juego de las 21 cartas».

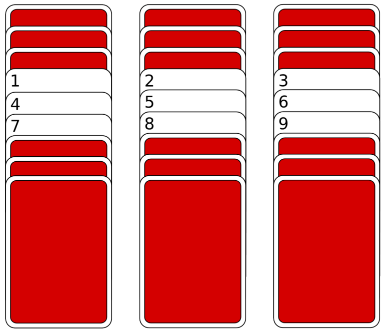

Figura 2: Segundo reparto en «el juego de las 27 cartas».

El lector atento habrá atendido a la «molesta» asimetría que tenemos en el segundo reparto, lo que puede inducir a pensar que quizá 21 no sea el número de cartas adecuado para realizar el juego en cuestión... El lector observador, además, habrá observado que es igual de sencillo llevar la carta al centro que llevarla, por ejemplo, arriba. Basta con colocar siempre el paquete en que esté la elegida arriba y la carta estará primero entre las 7 superiores, luego entre las 3 superiores, y finalmente será la superior. Seguro que ahora mismo te estás haciendo la misma pregunta que el lector inquisidor: ¿será posible llevar la carta a cualquier posición?

Al parecer, el primer matemático que analizó esta pregunta en detalle fue Joseph Diez Gergonne en 1813, lo que ha hecho que se conozca como el «Problema de los montones de Gergonne». Antes de nada, a partir de ahora vamos a centrarnos en el problema para 27 cartas (luego volveremos al caso de las 21 cartas). Como en cada uno de los 3 repartos tenemos 3 posibilidades para colocar el montón (arriba, al centro o abajo), habrá $3^3 = 27$ posibles combinaciones. En el caso de las 27 cartas, cada una de las combinaciones lleva la carta pensada a una de las 27 posibles posiciones.

Hagamos un pequeño paréntesis para hablar de las bases de numeración, que nos acompañarán a lo largo de todo el artículo. En todo el mundo se utiliza el sistema de numeración decimal o base 10, basado en las potencias de 10. Así, cuando escribimos el número 739 queremos decir $739 = 739_{10} = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$. El motivo de que la base 10 esté tan extendida es, casi con total seguridad, que los seres humanos tenemos 10 dedos. Si fuera cierta esta teoría, seguramente los dibujos animados[6] contarían en base 8. Siguiendo con el ejemplo de antes, observamos en

[6] La mayoría de los personajes de dibujos animados (*Mickey Mouse*, los *Simpson*, *Bugs Bunny*, *Bob Esponja*...) tienen cuatro dedos en cada mano.

primer lugar que 739_8 no tiene sentido porque en base 8 sólo tenemos 8 cifras[7] (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7); ¡no vale usar el 9! Sin embargo, lo que sí tiene sentido es que $739_{10} = 1 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 1343_8$. Para evitar líos con el hecho de que el mismo número represente cosas distintas dependiendo de la base, o con el de que la misma cantidad se represente con números distintos en distintas bases, conviene pensar en un número natural como un montón de piedras (después, dependiendo de cómo agrupemos esas piedras, representaremos el número con unos dígitos o con otros). Obviamente, el número 8 no tiene nada de especial, y de hecho todo número natural se puede escribir en cualquier base de manera única.

Tenemos 27 cartas cara abajo en nuestra mano izquierda y vamos a repartirlas cara arriba en tres montones de 9 cartas, tres veces. El espectador debe indicar tras cada uno de los repartos en qué montón está su carta. Imaginemos en primer lugar que, tras decir en qué montón se encuentra su carta, el espectador eligiera dónde colocarlo: arriba, al medio o abajo[8]. Quizá la forma más sencilla de saber en qué posición termina la carta sea ir siguiendo las posiciones en las que quedan primero las 9 cartas del primer montón indicado, después las 3 posibles del segundo montón indicado, y por último la única carta posible del tercer montón indicado. Así, por ejemplo, si tras el primer reparto el primer montón indicado va al medio, sabremos que la carta será una de las tres centrales de su montón en el segundo reparto. Si ahora el segundo montón indicado fuera arriba, sabremos que la carta es la segunda de su montón en el tercer reparto. Si el tercer montón indicado fuera abajo, sabremos que la carta termina en la posición $18+2 = 20$. Resumimos esto en la siguiente tabla:

$$1.^{\text{er}} \text{ reparto} \begin{cases} \text{arriba} & 1 \\ \text{medio} & 2 \\ \text{abajo} & 3 \end{cases} \quad 2.^{\text{o}} \text{ reparto} \begin{cases} \text{arriba} & 0 \\ \text{medio} & 3 \\ \text{abajo} & 6 \end{cases} \quad 3.^{\text{er}} \text{ reparto} \begin{cases} \text{arriba} & 0 \\ \text{medio} & 9 \\ \text{abajo} & 18 \end{cases}$$

Así, para obtener la posición final de la carta elegida basta con sumar los tres números correspondientes a las posiciones en las que fueron colocados los montones que contenían la carta elegida en cada reparto. Pero un momento… ¿a qué nos recuerda esa tabla? Sea a lo que sea, lo cierto es que sería «más bonita» si en la primera columna tuviéramos los números 0, 1 y 2 en lugar de 1, 2 y 3. Pero eso podemos conseguirlo: ¡basta con numerar las posiciones de 0 a 26 y entonces la tabla que nos dirá la posición de la carta elegida será la que tiene los números 0, 1 y 2 en la primera columna! Esto es, en lugar de considerar la posición a la que va la carta elegida, consideramos el número de cartas que le ponemos encima con los repartos. Una vez con nuestra nueva tabla, podemos querer usarla en el sentido contrario, es decir, en lugar de dar libertad al espectador para elegir dónde colocar los montones, podemos darle libertad para elegir un número entre 1 y 27 y llevar

[7] Del mismo modo que en base 8 las cifras 8 o 9 no tienen sentido, en una base mayor que 10 se necesitan nuevas cifras (se suelen utilizar letras mayúsculas: A, B, C, D, E, F…).

[8] Adoptaremos el criterio empleado habitualmente en los libros de magia. La carta superior de un montón de cartas es la que muestra su dorso, tanto si el montón se encuentra cara arriba como si está cara abajo. De esta manera, cuando recojamos los montones (que estarán de cara en la mesa), el montón de arriba será el que quede en el dorso y el de abajo el que quede en la cara del paquete.

su carta a esa posición. Para ello necesitaremos ver cuáles son los tres números que suman la posición elegida (en realidad la posición elegida menos uno, porque nuestra nueva tabla numera las posiciones de 0 a 26). Poner un número como suma de coeficientes 0, 1 o 2 por potencias de tres... ¿A qué nos recuerda eso? ¡Eso es escribir un número en base tres!

Entonces ¡ya está! El 0 es «arriba», el 1 es «al medio» y el 2 es «abajo». Cuando nos digan la posición a la que quieren que vaya la carta elegida, le restamos 1 y escribimos el número obtenido en base 3. Tras cada uno de los repartos colocamos los montones de la carta elegida en las posiciones que indican las cifras del número leídas de derecha a izquierda. ¡Qué bonito! Y como la expresión de un número en base 3 es única, no puede ser que haya dos formas de colocar los montones que lleven la carta elegida al mismo número y tenemos una biyección entre las 27 formas de colocar los montones en los 3 repartos y las 27 posiciones en que puede terminar la carta elegida. De hecho, es facilísimo hacerse una «chuleta»:

⇑⇑⇑	1	⇑⇑⇒	10	⇑⇑⇓	19
⇒⇑⇑	2	⇒⇑⇒	11	⇒⇑⇓	20
⇓⇑⇑	3	⇓⇑⇒	12	⇓⇑⇓	21
⇑⇒⇑	4	⇑⇒⇒	13	⇑⇒⇓	22
⇒⇒⇑	5	⇒⇒⇒	14	⇒⇒⇓	23
⇓⇒⇑	6	⇓⇒⇒	15	⇓⇒⇓	24
⇑⇓⇑	7	⇑⇓⇒	16	⇑⇓⇓	25
⇒⇓⇑	8	⇒⇓⇒	17	⇒⇓⇓	26
⇓⇓⇑	9	⇓⇓⇒	18	⇓⇓⇓	27

«Chuleta» para el juego de las 27 cartas.

Vamos ahora con el juego de las 21 cartas. Tenemos 21 cartas cara abajo en nuestra mano izquierda y vamos a repartirlas cara arriba en tres montones de 7 cartas, tres veces. El espectador debe indicar tras cada uno de los repartos en qué montón está su carta. Imaginemos en primer lugar que, tras decir en qué montón se encuentra su carta, el espectador eligiera dónde colocarlo. Al igual que antes, podemos saber en qué posición termina la carta siguiendo las posiciones en las que quedan primero las 7 cartas del primer montón indicado, después las 2 o 3 posibles del segundo montón indicado, y por último la única carta posible del tercer montón indicado. Así, por ejemplo, si tras el primer reparto el primer montón indicado va abajo, sabremos que la carta será o bien una de las tres últimas del montón de la derecha o bien una de las dos últimas de uno de los otros dos montones tras el segundo reparto. Si ahora el segundo montón indicado fuera arriba, sabremos que la carta es o bien la tercera del montón de la izquierda o bien la segunda de uno de los otros dos montones en el tercer reparto. Si el tercer montón indicado fuera abajo, sabremos que la carta termina o bien en la posición 16 (si estaba en el montón de la izquierda) o bien en la posición 17 (si estaba en alguno de los otros dos tras el tercer reparto). O sea que, si bien podemos ir siguiendo la carta y saber en qué posición termina, ahora la misma secuencia de colocación de los montones puede llevar la carta elegida a posiciones distintas. La «chuleta» sería:

$\Uparrow\Uparrow\Uparrow$	1	$\Uparrow\Uparrow\Rightarrow$	8	$\Uparrow\Uparrow\Downarrow$	15
$\Rightarrow\Uparrow\Uparrow$	1 o 2	$\Rightarrow\Uparrow\Rightarrow$	8 o 9	$\Rightarrow\Uparrow\Downarrow$	15 o 16
$\Downarrow\Uparrow\Uparrow$	2 o 3	$\Downarrow\Uparrow\Rightarrow$	9 o 10	$\Downarrow\Uparrow\Downarrow$	16 o 17
$\Uparrow\Rightarrow\Uparrow$	3 o 4	$\Uparrow\Rightarrow\Rightarrow$	10 u 11	$\Uparrow\Rightarrow\Downarrow$	17 o 18
$\Rightarrow\Rightarrow\Uparrow$	4	$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$	11	$\Rightarrow\Rightarrow\Downarrow$	18
$\Downarrow\Rightarrow\Uparrow$	4 o 5	$\Downarrow\Rightarrow\Rightarrow$	11 o 12	$\Downarrow\Rightarrow\Downarrow$	18 o 19
$\Uparrow\Downarrow\Uparrow$	5 o 6	$\Uparrow\Downarrow\Rightarrow$	12 o 13	$\Uparrow\Downarrow\Downarrow$	19 o 20
$\Rightarrow\Downarrow\Uparrow$	6 o 7	$\Rightarrow\Downarrow\Rightarrow$	13 o 14	$\Rightarrow\Downarrow\Downarrow$	20 o 21
$\Downarrow\Downarrow\Uparrow$	7	$\Downarrow\Downarrow\Rightarrow$	14	$\Downarrow\Downarrow\Downarrow$	21

«Chuleta» para el juego de las 21 cartas.

Por lo tanto, si nos dicen un número al principio, no tenemos forma de saber cómo habrá que colocar los montones para llevar la carta elegida a esa posición. Durante el proceso podremos darnos cuenta de a qué posición va, pero ya no podremos elegirla. O sea, si queremos llevar la carta elegida a la posición 16, en principio podría valernos una de las dos opciones $\Rightarrow\Uparrow\Downarrow$ o $\Downarrow\Uparrow\Downarrow$, pero, en cuanto señalan el montón en que se encuentra la elegida tras el primer reparto y sin más información, tenemos que decidir si lo ponemos en el medio o abajo. Si optamos por ponerlo en el medio y durante los repartos nos damos cuenta de que la carta va en realidad a la posición 15, ya no estamos en condiciones de arreglarlo, pues no podemos volver atrás y comenzar dejando el montón de la elegida abajo.

Puede parecer un poco paradójico que en el caso de 27 cartas, en el que «la información llegaba justita» (27 posibles colocaciones de los montones para llegar a 27 posiciones), todo cuadre, y que en el caso de 21 cartas, en el que «nos sobra información» (27 posibles colocaciones de los montones para llegar a tan sólo 21 posiciones), no podamos hacerlo. Pues sí, a mí también me lo parece. Nunca he leído un análisis del juego de las 21 cartas como éste, pero imagino que mucha gente se habrá dado cuenta de este hecho y le habrá resultado chocante. Además de la imposibilidad de elegir posiciones, en el caso de las 21 cartas también se produce otro fenómeno que no ocurre en el caso de las 27 cartas, uno que podríamos considerar como «bueno», pues consiste en que en algunas ocasiones podemos determinar si el espectador nos miente al decirnos en qué montón está su carta. Imaginemos, por ejemplo, que tras el primer reparto el montón de la carta elegida se coloca arriba, e imaginemos también que tras el segundo reparto la carta queda en cualquier montón que no sea el de la izquierda. Si colocamos de nuevo el montón de la carta elegida arriba, tras el tercer reparto la carta será la primera del primer o del segundo montón. Así, si el espectador dijera que tras el tercer reparto su carta está en el montón de la derecha, podríamos saber que nos miente y tomar represalias contra él.

Los fenómenos de «imposibilidad de elección de posición» y «posibilidad de detección de espectadores mentirosos»[9] se producen siempre que el número de cartas no sea una potencia de un número natural. Si el número de cartas es m^n entonces podemos repartir las cartas en m montones de m^{n-1} cartas n veces y, realizando un estudio análogo al del caso de las 27 cartas (en este caso la base importante será la

[9]Predicción: estos nombres no pasarán a la historia.

base m y el número de cifras de los números será n, claro), veremos que todo cuadra igual que antes (es decir, podemos llevar la carta elegida a cualquier posición y no podemos detectar mentiras).

¿Y entonces, por qué todo el mundo hace el juego con 21 cartas si 27 es mucho mejor y más natural? ¿Y por qué se lleva la carta al centro y no a otra posición? El proceso de repartir cartas en montones es tedioso. Imagino que alguien, con buen criterio, redujo el número de 27 a 21 para acortar un poco el juego. Por otra parte, dentro de las posiciones «naturales» a las que se puede llevar la carta, el centro parece un poco más «despistante» que arriba o abajo, además de que es más flexible, en el sentido de que no tenemos que preocuparnos de si las cartas se invierten o no al repartirlas sobre la mesa ni establecer un criterio para ver qué quiere decir «arriba» o «abajo». Aunque ahora que hemos entendido un poco mejor el juego, puedes experimentar con los números y posiciones que gustes.

Si necesitas alguna sugerencia, Martin Gardner comenta [4] cómo Mel Stover[10], de Winnipeg (Canadá), le escribió con una versión formidable e impresionante del juego que había inventado. Utiliza el sistema decimal (base 10) y 10 000 000 000 de cartas distintas. El espectador nombra un número entre 1 y 10 000 000 000 y el mago reparte las cartas en 10 montones de 1 000 000 000 de cartas 10 veces. El espectador piensa una carta y va diciendo en qué montón está tras cada reparto. Lo genial del juego es que no hay que hacer cálculos. Si el espectador dijera el número 8 072 489 392, bastaría con restarle 1 para tener 8 072 489 391, lo que nos indica, leyendo las cifras de derecha a izquierda, que tras el primer reparto el montón de la carta elegida ha de ir en segunda posición, tras el segundo en décima, . . . , tras el noveno en primera y tras el décimo en novena posición. Eso sí, el señor Stover advierte que se ha de tener cuidado para no cometer ningún error en los repartos, porque eso obligaría a repetir el juego y quizá no muchos espectadores quisieran verlo una segunda vez.

2. El juego que alguna gente se sabe: las tarjetas binarias

El siguiente juego es relativamente popular. Yo recuerdo que estaba en una caja de Magia Borrás que había en mi casa de pequeño, a la que no hice tanto caso como debía; ¡la de años que podía haber estado estudiando magia que he desperdiciado![11]

Piensa un número entre 0 y 31. ¿Ya? No me digas más, es el número veintitrés, ¿verdad?[12] Fuera de bromas, el juego consiste en que el mago pide a un espectador que piense en un número entre 0 y 31 y le ofrece 5 tarjetas de colores, en cada una de las cuales aparecen números entre 0 y 31. A continuación le pide que guarde en su bolsillo aquellas en las que aparezca el número pensado. Tras ello el mago adivina el número pensado por el espectador.

[10] Por supuesto, el señor Stover bromeaba.

[11] Parafraseando al maestro Dai Vernon, que al comienzo de una actuación decía: *Señoras y señores, no soy un jovencito, tengo 78 años y he estudiado magia durante 72 años; ¡desperdicié los primeros seis años de mi vida!*

[12] Vale que a ti no te ha impresionado, pero los lectores que han pensado el 23 todavía se están reponiendo del susto. . .

Las tarjetas se construyen de la siguiente manera. En primer lugar escribimos la expresión en base 2 de los números entre 0 y 31:

	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Expresiones en binario.

Ahora construiremos cinco tarjetas, cada una relacionada con una de las columnas de la tabla anterior. En la primera tarjeta escribiremos todos los números impares, es decir, aquellos que tienen un 1 en la última columna (la que corresponde a las unidades binarias). En la segunda escribiremos todos los números que tienen un 1 en la penúltima columna. En la tercera los que tienen un 1 en la columna central y así sucesivamente. Es decir, el 0 no estará en ninguna tarjeta, el 1 estará sólo en la primera tarjeta, el 2 estará sólo en la segunda, el 3 estará en la primera y la segunda… y el 31 estará en las cinco tarjetas. Estas son las tarjetas que obtendremos:

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31

8	9	10	11	16	17	18	19
12	13	14	15	20	21	22	23
24	25	26	27	24	25	26	27
28	29	30	31	28	29	30	31

Las tarjetas binarias.

Por la forma en que hemos construido las tarjetas, es facilísimo adivinar cuál es el número pensado por el espectador si nos dice todas las tarjetas en las que está (o todas en las que no está). Si el número está en la primera tarjeta, sabemos que tiene un 1 en las última cifra en binario así que sumamos 1. Si está en la segunda sabemos que tiene un 1 en la penúltima cifra en binario así que sumamos 2. Si está en la tercera sumamos 4. Si está en la cuarta sumamos 8. Y, por último, si está en la quinta sumamos 16. De hecho, los números 1, 2, 4, 8 y 16 son los que encabezan cada una de las tarjetas, así que dadas las tarjetas en las que está el número pensado basta sumar el primer número de cada una para obtener dicho número.

De hecho, como decíamos al comienzo de la sección, si cada tarjeta tiene un color y sabemos qué color corresponde a cada tarjeta (algo bien fácil de memorizar) entonces podremos adivinar el número pensado desde una distancia grande sin necesidad de mirar los números de cada tarjeta. Si le decimos al espectador, por ejemplo, que guarde en su bolsillo las tarjetas en las que aparece el número, bastará con saber los colores de esas tarjetas.

Este juego muestra la principal «virtud» y la principal «debilidad» del sistema binario. La mayor ventaja del sistema binario es su simplicidad: al haber sólo dos cifras posibles podemos identificar cada una con un estado físico (encendido o apagado, sí o no...). De hecho, los ordenadores trabajan con el sistema binario por algo... La principal pega es que los números tienen muchas cifras. Así, necesitamos muchas tarjetas para adivinar números en un intervalo relativamente pequeño. Si quisiéramos reducir el número de tarjetas y aumentar el rango de posibles números a pensar, podríamos intentar usar otra base. Por ejemplo, Gérard P. Michon[13] muestra una versión con 4 tarjetas construidas a partir del sistema ternario (base 3). El espectador puede pensar cualquier número entre 0 y 80. En esta ocasión, los números de cada una de las tarjetas, además, están pintados unos de negro y otros de rojo (el negro representa la cifra 1 y el rojo la cifra 2). Es cierto que abarcamos muchos más números con menos tarjetas, pero lo pagamos con la «antinaturalidad» de tener que preguntar al espectador no sólo en qué tarjetas está su número sino de qué color está pintado en cada una. Mi opinión es que se pierde más de lo que se gana y que la versión binaria del juego es mucho mejor. Pero también opino que es muy divertido e interesante pensar en las posibles variantes con otras bases.

3. El juego que nadie se sabe: las tarjetas perforadas

No por ser las más conocidas las tarjetas de la sección anterior son las únicas. Mis favoritas son otras tarjetas que descubrí gracias a Gardner [5] y que están mucho menos vistas (seguramente uno de los motivos es que lleva más trabajo construirlas). Son tarjetas binarias perforadas, como las de la figura 3.

Para construirlas, recortamos 32 rectángulos de cartón, los numeramos del 0 al 31 y les «quitamos» el ángulo superior derecho, lo que nos permitirá conservar las tarjetas en la posición adecuada. En la parte superior de cada tarjeta hacemos ranuras y agujeros[14] (5 en total), las ranuras son los unos y los agujeros los ceros (obsérvese la similitud de las ranuras con el número 1 y la de los agujeros con el número 0, lo que nos proporciona una regla mnemónica sencilla y elegante). Las 5 posiciones representan el número de la tarjeta en binario. En la parte inferior de cada tarjeta hay ranura si arriba hay agujero, y agujero si arriba hay ranura (es decir, las marcas inferiores representan 31 menos el número en binario).

[13] `http://www.numericana.com/answer/magic.htm#ternary`

[14] En realidad, para hacer las tarjetas hacemos primero agujeros en todas ellas y luego recortamos con unas tijeras lo que haya que recortar para hacer las ranuras necesarias en cada una.

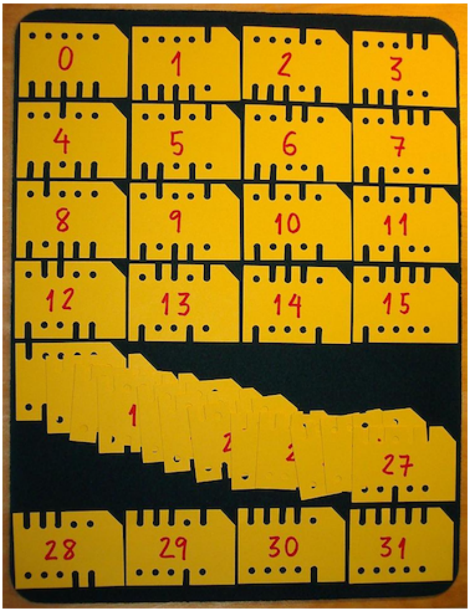

Figura 3: Las tarjetas binarias perforadas.

El diámetro de los agujeros es ligeramente superior al de un palo de *Chupa Chups*. Eso nos permite poder meter dos palos, uno arriba y otro abajo, y separar unas tarjetas de otras, tal como se muestra en las figuras 4 y 5. Como se puede ver, aunque los agujeros de abajo no serían estrictamente necesarios (bastaría dejar caer las tarjetas que se quedan abajo), facilitan mucho la labor e impiden que nos llevemos enganchadas accidentalmente hacia arriba tarjetas que no corresponden (si arriba hay ranura, abajo hay agujero).

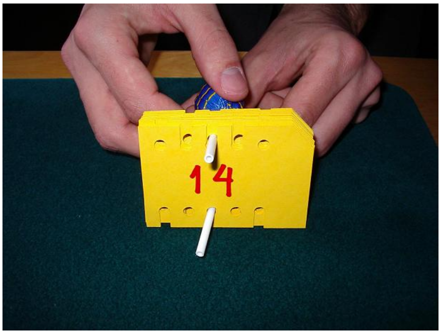

Figura 4: Podemos utilizar dos palos de *Chupa Chups*. . .

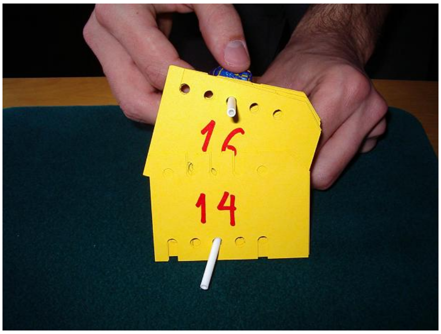

Figura 5: . . . para separar unas tarjetas de otras.

Pues bien, por sorprendente que te parezca, puedes hacer lo siguiente. En primer lugar ofrece las tarjetas a un espectador para que las mezcle. Tras recogerlas y cuadrarlas introduce los palos de *Chupa Chups* en las posiciones situadas más a la derecha, las correspondientes a las unidades binarias (uno arriba y otro abajo). Separa las tarjetas y coloca las que has extraído hacia arriba delante de las otras (es decir, la tarjeta que muestra su número termina en 0 en binario o, dicho de otra forma, el número que se ve es par). Repite lo mismo introduciendo los palos en los agujeros de la siguiente posición. Repítelo también en las otras tres posiciones yendo de derecha a izquierda. Observarás que la tarjeta que muestra su cara es la que tiene escrito el número 0. No sólo eso, detrás de ella estará la que tiene el número 1. Y detrás la del 2. Y es que, por mucho que se haya mezclado al comienzo, ¡todas las tarjetas estarán en orden!

¿Cómo es posible que ocurra esto? Tras la primera extracción, las 16 primeras tarjetas del mazo serán las que acaban en 0 y las 16 últimas las que acaban en 1. A continuación, al meter los dos palos en las siguientes ranuras, extraer de nuevo y colocar las tarjetas extraídas delante de las otras, tendremos el primer cuarto de tarjetas acabando en 00, el segundo cuarto en 01, el tercer cuarto en 10 y el cuarto en 11. Al repetirlo con las terceras ranuras, el mazo estará ordenado por octavos que acaben en 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111. Claramente, tras las 5 pasadas las tarjetas estarán ordenadas del 0 al 31. Magia.

Una aplicación divertida de estas tarjetas se puede realizar escribiendo letras en lugar de números, de modo que tras la ordenación se pueda leer una frase. Escribes cada letra o sílaba de un mensaje en una de las tarjetas (cuando están ordenadas), las mezclas, se las envías a un amigo (con un par de *Chupa Chups* si quieres), le explicas cómo ha de introducir los palos, extraer las tarjetas superiores y colocarlas delante de las otras, siguiendo los agujeros de derecha a izquierda. Cuando termine podrá leer tu mensaje o felicitación, lo cual le sorprenderá mucho. Digo yo.

Con estas tarjetas podemos hacer el mismo juego de la sección anterior sin tener que sumar. Pedimos a un espectador que piense en un número entre 0 y 31 y le ofrecemos las 5 tarjetas binarias de colores que habíamos construido en la sección anterior, en cada una de las cuales aparecen números entre 0 y 31. A continuación le pedimos que nos vaya diciendo si el número aparece en cada tarjeta mientras separamos en dos mitades (gracias a la ayuda de los palos de *Chupa Chups*) nuestras extrañas tarjetas perforadas. Dependiendo de la respuesta, desechamos una mitad u otra. Tras realizar este proceso 5 veces, sobrevive una única tarjeta cuyo número coincide con el pensado por el espectador.

Como ya has adivinado, el secreto es tan sencillo como comenzar a extraer por el agujero de la derecha y, cuando la respuesta del espectador sea «no», quedarnos con las tarjetas que hemos extraído hacia arriba y, cuando sea «sí», quedarnos con las de la mitad inferior. Tras repetir esto con todos los agujeros nos quedará una sola tarjeta que será la que tenga el número pensado por el espectador. De hecho, si lo piensas verás que no es necesario llevar ningún orden concreto: según qué tarjeta tome el espectador para ver si está su número podemos meter los palos en la posición correspondiente, realizar la extracción y quedarnos la mitad adecuada. Una bonita, aunque más aparatosa, forma de adivinar un número pensado.

4. El juego que aunque te sepas no vas a poder hacer: moviendo cartas con mezclas perfectas

En siglos pasados, el *faro*[15] fue un juego muy popular en Europa y Estados Unidos. Su finalidad era emparejar las cartas. Cada vez que se jugaba una nueva mano, era necesario deshacer las parejas formadas. Así nació lo que hoy conocemos como mezcla faro o mezcla perfecta. Una mezcla perfecta consiste en cortar exactamente por la mitad y luego imbricar las cartas una a una. Si el número de cartas del mazo es par, tenemos dos formas de imbricar las mitades:

- De modo que la carta que estaba originalmente en la posición superior termine también en la posición superior (entonces la inferior también terminará en la posición inferior). Esto se llama mezcla faro exterior (las 2 cartas que estaban en el exterior del mazo continúan estándolo tras la mezcla).
- De modo que la carta que estaba originalmente en la posición superior termine en la segunda posición desde arriba (entonces la inferior terminará la segunda por abajo). Esto se llama mezcla faro interior.

Alex Elmsley fue un excelente e ingeniosísimo mago británico. Tristemente, falleció el 8 de enero de 2006. La historia comienza así. Elmsley, además de ilusionista era también programador de ordenadores y se dedicaba tanto a la informática como a la magia. Por si os lo estáis preguntando, sí, dominaba la base 2. Fue uno de los pioneros en explotar las matemáticas de la mezcla faro. Elmsley acuñó los términos *in-shuffle* (mezcla interior) y *out-shuffle* (mezcla exterior) y los abreviaba en sus notas con los símbolos I y O.

Alex Elmsley.

Uno de los primeros problemas que estudió fue el de determinar qué secuencia de faros interiores y exteriores era necesaria para que la carta superior del mazo fuera a una posición deseada. En 1957, Elmsley contaba en una revista de ilusionismo cómo había encontrado una fórmula notabilísima.

Trabajando con una baraja de 52 cartas, supongamos que queremos llevar la carta superior a la posición 14 mediante mezclas faro. Elmsley encontró experimentalmente que la secuencia adecuada era: IIOI. Inmediatamente se dio cuenta de que esta era la expresión del 13 en binario, el número de cartas que había encima de la posición

[15] Antiguamente conocido como *faraón*.

deseada[16]. Y no era casualidad. Sea cual sea el número de cartas de la baraja (da igual par que impar[17]), el procedimiento funciona siempre:

- Restar 1 de la posición a la que se desea llevar la carta.
- Expresar el resultado en base 2.
- El resultado obtenido da la secuencia de mezclas interiores (I) y exteriores (O) que hay que hacer para llevar la carta a esa posición (leyendo de izquierda a derecha).

Merece la pena volver a resaltar la preciosa coincidencia que ocurre de que interpretando las cifras 1 y 0 como las letras I de interior y O de exterior (en inglés) respectivamente, obtenemos la secuencia de mezclas faro para llevar la carta superior a la posición indicada por el número (numerando las posiciones de 0 a 51). De hecho, dado que Elmsley estudiaba tanto informática como magia, es tentador contar la historia de una forma más legendaria diciendo que cierto día Elmsley confundió sus apuntes de informática con los de magia y que, interpretando los unos y ceros como letras que indicaban mezclas faro, descubrió por accidente esta bella relación.

A la vez que paladeas la belleza y la elegancia de este método, otra parte de tu cabeza está pensando: «¡Pero esto no lo voy a poder hacer! ¿Cómo voy a hacer cuatro mezclas perfectas?». Si has leído el título de la sección verás que no te quito razón. Dominar las mezclas perfectas no es sencillo. También hay que decir que no es tan imposible como puede parecerte ahora mismo. Si practicas durante algunos años llegarás a dominarlas y hacerlas sin esfuerzo. Señalo esto porque es un hecho que ocurre muchas veces en la magia: es bien distinto saber el secreto de un juego a saber realizarlo con maestría. De una cosa a la otra hay un mundo.

La explicación no es muy complicada. Basta numerar las posiciones de las cartas de la baraja de 0 a 51 y observar que, si tenemos una carta en la posición x (digamos que es menor o igual que la mitad de las cartas del mazo), va:

- a la posición $2x$ con una mezcla faro exterior;
- a la posición $2x + 1$ con una mezcla faro interior.

Pero, en base 2, esas operaciones son facilísimas:

- multiplicar por 2 es poner un 0 al final;
- multiplicar por 2 y sumar 1 es poner un 1 al final.

De aquí es obvio que para llevar una carta a la posición x hay que hacer mezclas interiores y exteriores siguiendo los unos y ceros de su expresión binaria de izquierda a derecha, que es lo que queríamos. Al igual que ocurría cuando analizábamos el

[16] Puedes encontrar en Youtube un vídeo que grabé hace tiempo con este ejemplo: `http://www.youtube.com/watch?v=gmnZgn0S4aM`. Aunque las mezclas son un poco «tensas» (grabaría otro vídeo ahora que habré hecho unas 10 000 mezclas perfectas más, pero da mucha pereza) se puede ver la idea.

[17] Si el número de cartas del mazo es impar, una de las mitades tendrá una carta menos que la otra y siempre meteremos la pequeña dentro de la grande. Tenemos dos formas de cortar: si la mitad grande es la que tiene la carta de arriba es una faro exterior y, si no, es interior.

juego de los tres montones, lo de restar 1 al número al que queramos llevar la carta es porque numeramos las posiciones desde 0.

El problema «inverso» de llevar cualquier carta a la posición 1 mediante mezclas perfectas es más difícil de analizar, como ya apuntaba el propio Martin Gardner [6]. Sin embargo, Sarnath Ramnath y Daniel Scully [8] resolvieron el problema más general de llevar cualquier carta a cualquier posición mediante mezclas perfectas. Pero quizá sea un buen momento para detenernos y practicar un poquito de magia. . .

Referencias

[1] Pedro Alegría y Santiago Fernández, Martin Gardner, el mago de la divulgación, *La Gaceta de la RSME*, vol. **13** (2010), no. 4, 671–704.

[2] Venancio Álvarez, Pablo Fernández y M. Auxiliadora Márquez, Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos, *La Gaceta de la RSME*, vol. **5** (2002), no. 3, 711–735.

[3] Javier Cilleruelo, Conjuntos de enteros con todas las diferencias distintas, *La Gaceta de la RSME*, vol. **11** (2008), no. 1, 151–170.

[4] Martin Gardner, *Mathematics, Magic and Mistery*, Dover Publications, New York, 1956.

[5] Martin Gardner, *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Alianza Editorial, 1981.

[6] Martin Gardner, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, 1981.

[7] Martin Gardner, *¡Ajá! Inspiración*, Editorial Labor, 1981.

[8] Sarnath Ramnath y Daniel Scully, Moving Card i to Position j with Perfect Shuffles, *Mathematics Magazine*, vol. **69** (1996), no. 5, 361–365.

Carlos Vinuesa, Universidad Autónoma de Madrid - Universidad de Cambridge
Correo electrónico: carlosvinuesadelrio@gmail.com
Página web: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cvinuesa/