HISTORIA

Sección a cargo de

Luis Español González

Comenzamos de nuevo el ciclo anual de la «Sección de Historia» de LA GACETA, pero esta vez en un año de profundo y emotivo significado histórico, pues la RSME se hace centenaria. Lo primero que quiero hacer al iniciar este nuevo paseo alrededor del Sol es felicitar por este cumpleaños tan especial a todos los miembros de la comunidad matemática española, entendida ésta en el sentido más amplio posible, pero muy especialmente a los que son socios de la RSME. Los numerosos estudios que se han realizado sobre el papel de la ciencia en la sociedad —más definido desde la Revolución Científica operada en el siglo XVII— ocupándose del desenvolvimiento de las diversas instituciones que conforman el universo de la ciencia, han puesto de manifiesto la creciente importancia de las sociedades independientes creadas por los científicos, en diálogo con los poderes públicos, para el avance de la ciencia en todos sus frentes, ya sea en la creación, las aplicaciones o la transmisión del saber entre iguales y en la educación. Desde avanzado el siglo XIX el mundo asiste a la proliferación creciente de este tipo de sociedades, que han llegado a conformar en el siglo XX una red internacional.

Te darás cuenta, querido lector con motivos germinales para ello todavía sin florecer, que te estoy invitando desde la razón histórica a que ofrezcas a la RSME tu boletín de inscripción como regalo de centenario.

LA SECCIÓN DE HISTORIA

En cierto modo, también LA GACETA se hace centenaria, si consideramos que nuestra revista es la nueva estampa de la vieja *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1911–1917), que inició su andadura a la vez que la propia Sociedad, en mayo de 1911, con una esperanza que marchitó. Esta filiación es bastante verosímil si adoptamos como parientes intermedios, aunque haya periodos de carencia, a *Matemática Elemental* (1931–1949) y *Gaceta Matemática* (1949–1982, 1988). La continuidad con la primera *Revista* que supuso la *Revista Matemática Hispano-Americana* (1919–1982) está afectada por el fuste investigador que la segunda siempre pretendió y a veces alcanzó.

Al margen de las precisiones sobre los antecedentes, lo cierto es que la trayectoria de la actual nueva estampa de la revista de los matemáticos españoles se inició en 1998, cien años después del «Desastre de Cuba» que aceleró el movimiento intelectual de regeneración nacional en el que se inscribe la creación de la RSME. En su primer número, Antonio Durán Guardado presentó la «Sección de Historia» de LA GACETA con un breve enunciado de su «filosofía» y sus «objetivos», sobre los que se exployó

en el número siguiente, convertido ya en coordinador de dicha sección. A la altura del volumen 6, fechado en 2003, le sustituyó en esta responsabilidad José Ferreirós Domínguez, quien se estrenó publicando también un sustancioso y amplio texto programático en continuidad con la tarea de su antecesor. Ferreirós firmó una página de despedida en el volumen 10 de 2007, trescientos años después del nacimiento de Euler, tomando entonces el relevo Jesús Hernández Alonso, quien prolongó la línea editorial mantenida desde el inicio hasta que ocupé su lugar el pasado año. La labor de los tres que me han precedido ha sido magnífica, a la lista de los artículos publicados me remito¹, y a mí me queda, tras declarar la admiración que les profeso, la ardua tarea de mantener el tono de gran calidad en la trayectoria general de la sección y las modulaciones necesarias para que la enorme variedad que puede ofrecer el trabajo histórico se siga reflejando, siempre bien hecho, en LA GACETA.

En el reconocimiento por el trabajo bien hecho, en LA GACETA no hay que olvidar a la sección hermana «Mirando hacia atrás», especializada en la intrahistoria de la Sociedad y sus personajes. También merecen un recuerdo en este lance los artículos sobre historia de las matemáticas que se publican en la revista *Suma* de la FESPM² y en otras específicas de algunas de las sociedades de profesores de la Federación. La historia de las matemáticas recibe notables contribuciones en revistas especializadas, pero sobre ciencia y técnica en general, tales como, entre otras, *Llull, Revista de la SEHCYT*³ y *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*⁴. La revistas de otras asociaciones científicas dedican también atención a la historia de las matemáticas, y las sociedades matemáticas presentes en el CEMat⁵ impulsan una Comisión de Historia que debe promover el avance de la historia de las matemáticas en España y sus relaciones internacionales. El país avanza en esta dirección teniendo como punta de lanza a los historiadores de las matemáticas españoles que publican en las revistas internacionales de mayor nivel.

No obstante, todavía se debe reconocer, como escribía José Ferreirós, que la historia de las matemáticas como campo de trabajo está poco desarrollada en España en términos comparativos a nuestro entorno europeo y no tiene un puesto respetable en nuestras Facultades de Matemáticas. Sólo superaremos estas dos carencias mediante un esfuerzo simultáneo realimentado en ambos frentes.

Al iniciar el hito 2011 es oportuno realizar una recopilación de las claves que determinan el espíritu de la Sección de Historia, sus objetivos básicos y la estrategia para irlo produciendo. Se puede esquematizar dicho espíritu en varios considerandos:

- Que las matemáticas poseen una componente cultural, siendo una de las mayores virtudes de la historia que permite reflexionar a fondo sobre este papel de la matemática.

¹<http://www.rsme.es/gacetadigital/bsecciones.php?seccion=Historia>. Hasta 2010 inclusive se publicaron 39 artículos en esta Sección.

²Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, <http://www.fespm.es/>.

³Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, con sede en la Universidad de La Rioja, <http://www.unirioja.es/sehcyt>.

⁴Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, <http://schct.iec.cat>.

⁵Comité Español de Matemáticas, <http://www.ce-mat.org>.

- Que la historia desempeña un papel primordial en la difícil tarea de dar a conocer la matemática al público culto y promover el apoyo social a la misma.
- Que los temas de historia de las matemáticas son decisivos para un enfoque adecuado de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles, sobre todo hasta los primeros cursos universitarios.
- Que la historia permite reflexionar sobre cómo la ciencia se imbrica en la sociedad y por ello es la mejor manera de promover la responsabilidad del experto.

Es en consonancia con estas declaraciones esenciales como se despliegan los objetivos de la sección, entendida como una herramienta para el fomento la cultura histórica en el colectivo de la RSME y su entorno más inmediato o área de influencia. Por ello la Sección seguirá ofreciendo:

- Artículos históricos relacionados en sentido amplio con la matemática, ya sea la propia disciplina o con sus múltiples relaciones y contextos.
- Datos contrastados con rigor y debidamente analizados para ofrecer imágenes generales del tema tratado.
- Trabajos originales en cuanto a su enfoque y presentación, pero adaptados al público generalista de LA GACETA, que no es una revista especializada.
- En los artículos que presenten una divulgación de aspectos conocidos o visiones panorámicas, preferencia por los autores expertos con producción original.

Pero todas estas ideas han de concretarse en la selección y publicación de tres artículos anuales, lo que plantea una clara restricción en el corto plazo, de modo que ha de ser en el proceso acumulativo donde se manifieste el logro de los objetivos asumidos. La naturaleza de esta Sección obliga a proponer artículos a especialistas reconocidos buscando variedad de origen, temática y enfoque, por ejemplo si se desea favorecer la presencia de temas de historia antigua o de autores latinoamericanos. Pero también se podrán aceptar artículos enviados por personas interesadas, unos y otros serán revisados convenientemente bajo estándares de calidad que al responsable de la sección compete salvaguardar. Este procedimiento de acceso y selección para un número reducido de oportunidades anuales podrá producir alguna desilusión a quienes vean demorada o insatisfecha su pretensión de publicar; les pido disculpas y comprensión anticipadamente.

UN ARTÍCULO PARA CONMEMORAR 1911

Los anteriores responsables de la sección han sido también activos participantes en ella como autores, circunstancia que en mí no ha concurrido hasta ahora, aunque sí he colaborado con varias biografías de matemáticos españoles contemporáneos en la sección hermana «Mirando hacia atrás». Quiero remediar de inmediato esta carencia, siendo yo mismo el autor de la primera entrega de este año, protagonismo que procuraré no repetir mientras siga siendo el responsable de la sección. He elegido para ello un tema que tiene que ver con 1911 —año en que se desveló un enigma de

la historia de las matemáticas— y permite echar un rápido vistazo a los primeros números de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*.

Precisamente investigando durante los últimos años ochenta del siglo pasado el inicio de la *Revista*, me encontré con unas referencias breves al teorema de Rolle que me llamaron la atención y renovaron mi interés por la historia de dicho teorema. Ya sabía lo mínimo sobre el particular desde que era estudiante en la Universidad de Zaragoza, cuando me sorprendió ver que se llamaban igual un teorema de análisis y otro de álgebra, parecidos pero distintos.

Mi atracción de siempre por la historia se había incrementado a causa de unas charlas de mi profesor en el segundo curso de análisis matemático, Luis Vigil Vázquez (1914–2003), que nos deleitó a los asistentes⁶ con comentarios históricos basados en lo aprendido, decía don Luis, «de mi maestro Barinaga». No guardo notas del cursillo de Vigil, y mi memoria no alcanza a recordar todos los detalles, pero algo tenían que ver con las «76 Notas complementarias de la Cultura universitaria escolar, con 3 figuras y 12 retratos», algunas de ellas sobre historia, dos sobre el teorema de Rolle, publicadas por José Barinaga Mata (1890–1965), primero por separado entre 1933 y 1936 en la sección titulada «Notas breves y comentarios» de la revista de la RSME *Matemática Elemental*, y luego recopiladas bajo el título *Miscelánea matemática* en una publicación del Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE que salió a la luz en el Madrid de 1937.

Sobre la historia del teorema de Rolle preparé en 1992 material para una conferencia centrada en la evolución de un teorema que pasa del álgebra al análisis. Nada publiqué al respecto, quizás porque no circulaba entonces LA GACETA, a cuyo público someto la versión revisada y actualizada de aquel trabajo.

⁶También inculcaba el interés por la historia de las matemáticas Rafael Rodríguez Vidal (1916–1993), un aficionado competente a la historia, junto al que inició su brillante trayectoria de historiador de la ciencia Mariano Hormigón Blánquez (1946–2004), quien fue en buena medida el causante de que la historia de las matemáticas fuera para mí algo más que una afición.

Comentarios históricos sobre el teorema de Rolle con referencias a la matemática española hacia 1911

por

Luis Español González

Voy a exponer un relato de historia de las matemáticas que tiene por protagonista al teorema de Rolle y como uno de sus momentos estelares el año 1911, cuando el matemático e historiador norteamericano de origen suizo F. Cajori [4] desveló una conjetura sobre la historia de dicho teorema. De este modo quiero contribuir a celebrar el centenario de la RSME con la consideración de una efemérides simultánea relacionada con esta «Sección de Historia». Para resaltar este vínculo entre la historia general de las matemáticas y nuestra Sociedad, sacaré a colación un par de breves noticias sobre dicho teorema aparecidas en los primeros años de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (en lo sucesivo *Revista de la SME* o simplemente *Revista* para abreviar), fundada también en 1911, en una de las cuales aparece Rey Pastor, que tendrá protagonismo en este artículo.

1. EL TEOREMA DE ROLLE EN EL INICIO DE LA *Revista de la SME*

La *Revista* inició su andadura con el formato habitual de las revistas o boletines periódicos societarios, que solían incluir una sección en la que los lectores intercambiaban preguntas y respuestas sobre diversos temas. En la sección llamada «Intermediario de los matemáticos», correspondiente al segundo número del año fundacional, un firmante que sólo se identificó con sus iniciales hizo una pregunta «Sobre la generalización del teorema de Rolle», la novena de la sección. Decía así:

¿Se conoce algún teorema que relacione las raíces de una ecuación con las de su derivada, de modo análogo a como lo hace el teorema de Rolle para las raíces reales? E. G. G.

Claro está que se refería sin citarlas a las raíces complejas. En la misma sección del primer número del tomo segundo (1912–13) contestó Rey Pastor bajo el seudónimo P. Sauer¹.

Julio Rey Pastor (1888–1962) terminó los estudios de exactas en Zaragoza en 1908. Participó en esa ciudad y año en el congreso fundacional de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, donde se originó una comisión para preparar el nacimiento de la RSME, en la que el joven brillante y prometedor participó junto

¹En sus primeros años profesionales utilizaba unas veces su propio nombre o iniciales y otras este seudónimo en sus frecuentes participaciones en ésta y otras secciones de la revista [7].

a personalidades de reconocido prestigio. Marchó a Madrid para hacer el doctorado, defendió la tesis en 1909 y la publicó al año siguiente, dedicándose después a preparar oposiciones. Mientras las preparaba se creó la RSME en 1911, empezó en mayo su *Revista*, de la que fue uno de los secretarios iniciales, y alcanzó la cátedra de Análisis Matemático en junio del mismo año. Su destino como catedrático fue la Universidad de Oviedo. Pasó el curso 1911–12 en Berlín becado por la JAE, y el curso siguiente explicó en la universidad asturiana la asignatura Análisis Matemático 2.º, en cuyo programa había una parte de cálculo diferencial real y otra de álgebra real y compleja. En junio de 1913 ganó el traslado de la cátedra a Madrid². Cuando se produjo esta relación de pregunta-respuesta, Rey Pastor estaba en plena fase de preparación de los programas de las primeras asignaturas de análisis matemático, en las que aparecía el teorema de Rolle como más tarde indicaré.

En su respuesta a E. G. G.³ propuso Rey Pastor varios teoremas del siglo XIX: de G. Bellavitis (1835), J. Liouville (1864), A. Transon (1868) y otros de Van den Berg a finales del siglo que amplían los de Bellavitis. Sobre el teorema de Liouville señaló expresamente que de él «resulta el de Rolle como caso particular». No parece que Rey Pastor conociera el artículo de Cajori, de ser así probablemente habría dado también otros ejemplos. La respuesta fue buena, sobre todo por incluir el teorema de Liouville que luego mencionaremos de nuevo, aunque se podía dar en ese momento una lista algo más significativa. Por entonces hacía sus primeras armas matemáticas J. Barinaga (1890–1965)⁴, a quien debió interesar este tema, pues años después le dedicó atención en sus investigaciones y lo mencionó en sus «Notas breves y comentarios» publicadas durante los años treinta en la revista *Matemática Elemental* y luego recopiladas en [1]. En una de ellas Barinaga menciona un teorema de Gauss (1816) en el plano complejo, precursor del de Bellavitis citado por Rey Pastor, y un teorema de Grace (1902) que extiende el de Rolle al plano complejo. El teorema de Gauss estaba en la relación de extensiones dada en [4] por F. Cajori (1859–1930), pero no el de J. H. Grace (1868–1944)⁵.

Muy pronto me voy a fijar en la tarea que el teorema de Rolle ha dado a los historiadores de la matemática, pero antes mostraré otro pasaje de la *Revista de la SME*. En otra sección fija, la dedicada a las reseñas de libros, apareció una que daba cuenta de un un libro [12] de T. Jiménez de la Flor, catedrático de matemáticas del Instituto General y Técnico de Zamora, publicado en dicha ciudad en 1914 con título *Pequeñas cuestiones matemáticas*. La reseña, firmada escuetamente por «M.», indicaba que en dicho libro «expone el autor su labor de investigación personal acerca del Álgebra de Rolle, impresa en París en 1690, y que ha consultado en la biblioteca de la Universidad de Salamanca». Efectivamente el catedrático de Zamora hizo esto en la primera parte de su libro, todo él de intención pedagógica, dedicada a «Resumen histórico de la resolución de ecuaciones de 1.º y 2.º grado por algunos

²Véase por ejemplo [9].

³Podría tratarse del socio Enrique Giménez y González, catedrático de la Escuela Industrial de Sevilla.

⁴Barinaga era dos años menor que Rey Pastor, pero el desfase académico entre ellos era mayor porque el primero inició tarde sus estudios universitarios.

⁵Las generalizaciones de (TR) han continuado hasta nuestros días, pero éste no es el tema que me ocupa ahora.

métodos antiguos». Su explicación del método de Rolle queda un tanto diluida al aplicarse tan solo a las ecuaciones de segundo grado, pero dejó constancia de haber estudiado el tema en el libro antiguo depositado en Salamanca.

La anécdota de Jiménez de la Flor sirve de avance introductorio a la última parte de este trabajo, que tratará de las investigaciones de los historiadores de las matemáticas sobre el teorema de Rolle. De momento voy a clarificar lo que se conoce como teorema de Rolle, porque es fácil que a los más jóvenes les suene distinto de lo que acaban de leer.

2. LAS DOS CARAS DEL TEOREMA A PRINCIPIOS EL SIGLO XX

Los estudiantes de matemáticas se encuentran hoy generalmente con la versión (TR) del teorema de Rolle que se ofrece en el primer curso de análisis matemático, donde en la teoría de las funciones reales de una variable aparece como preludeo del teorema del valor medio (TVM), atribuido éste a Lagrange o a Cauchy, del que (TR) es un resultado particular equivalente que suele probarse antes por ser un caso más simple⁶, del que (TVM) se deduce con sencillez mediante una transformación lineal. El teorema se refiere a funciones f con valores reales definidas en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, y que tienen derivada f' . Como es bien conocido, dice así:

(TR) Si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y se tiene $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.

Usando (TR) se deducen el (TVM) y el teorema de Taylor. A su vez, para demostrar (TR) se usa el axioma del supremo de los números reales, y dos teoremas para las funciones continuas que de él dependen, el de Bolzano (TB) del punto intermedio y el de Weierstrass (TW) de los extremos absolutos. Si esta secuencia lógica se representa con los titulares de los teoremas resulta una sucesión

Bolzano–Weierstrass–Rolle–Lagrange/Cauchy–Taylor

que presenta una permutación llamativa del orden cronológico⁷. Ha sido misión de la historia de las matemáticas, abordando el proceso de invención, desarrollo y formulación definitiva del cálculo infinitesimal, explicar el modo en que se ha producido dicha permutación.

En un estimable libro de texto usado en mi universidad se desarrolla la teoría de la manera antes indicada y se advierte [11, pág. 43] en un comentario a (TR) colocado al margen —formato muy apropiado en la región de las glosas— que «un extracto del trabajo original de Michel Rolle concerniente a este resultado, donde se trata con ecuaciones polinómicas y con un método formal para obtener lo que para nosotros es la derivada de un polinomio», se puede leer en el libro [21, pág. 253–260], uno de los que recopilan textos antológicos de matemáticas⁸. Y es que,

⁶Pero cabe la posibilidad de que se ataque de una vez el teorema del valor medio dejando a Rolle en el anonimato.

⁷Michel Rolle (1652–1719), Brook Taylor (1685–1731), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Bernard Bolzano (1781–1848), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897).

⁸Lo que aparece en el libro es la traducción por Cajori al inglés de un fragmento de [19], precedida por un comentario introduciendo el tema por parte de D.E. Smith, editor del libro.

efectivamente, (TR) no es el teorema original de Rolle, y la diferencia no es sólo una cuestión de lenguaje.

El enunciado (TR) antes expuesto tiene una forma lingüística, tanto en el aspecto ordinario cuanto en el simbólico, característica del siglo XX avanzado, pero a finales del siglo XIX o principios del XX el teorema ya tenía la configuración actual, aunque se expresara con el estilo de escritura matemática propio de la época.

En los años citados, en torno a 1900, era usual que el estudio escolar del álgebra —mayoritariamente «clásica», es decir, la resolución de las ecuaciones— estuviera incluida en los primeros cursos de análisis matemático, como la teoría de las funciones más sencillas, los polinomios, de los que se estudiaban la divisibilidad y las soluciones de ecuaciones y sistemas. En cuanto a los sistemas, el estudiante aprendía los lineales y algo de la eliminación en grado superior y, en cuanto a la resolución de las ecuaciones algebraicas, la teoría de Galois sólo se estudiaba en los centros más avanzados —ninguno en España—, lo común era aprender la resolución algebraica para grado menor que cinco y la resolución numérica, en el que se contemplan —desde el siglo XVII— las tres etapas propias del proceso:

- Acotación. Consiste en determinar un intervalo en el que están contenidas todas las raíces reales de la ecuación.
- Separación. Se trata de determinar subintervalos del anterior que contengan una sola raíz.
- Aproximación. Para cada raíz, disminuir el tamaño del intervalo que la contiene hasta que sus extremos se acepten como valores aproximados de la raíz.

Al estudiar la resolución numérica los estudiantes se reencontraban con un teorema que también llevaba el nombre de Rolle, aunque era algo diferente al (TR) anterior, porque se refería sólo a polinomios —por eso lo denotaremos (TRp)— y se enunciaba con su terminología propia; además, iba acompañado de un corolario (CRp) que era una regla para la separación de las raíces. Así, en la parte del curso de análisis matemático en la que se trataba el álgebra clásica (a veces llamada «análisis algebraico») aparecían estos teoremas sobre polinomios reales⁹:

(TRp) Entre cada dos raíces consecutivas de $f(x) = 0$ hay un número impar (al menos una) de raíces de $f'(x) = 0$, contadas con su multiplicidad.

(CRp) Entre dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$ hay a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$.

El teorema (TRp) es una clara especialización del (TR) a polinomios, se aplica el teorema general y se dice algo más por tratar sólo con funciones específicas. (CRp) es una fácil consecuencia de (TRp) con valor práctico: si dos raíces consecutivas $a < b$ de $f'(x) = 0$ dan signos distintos a $f(x)$ entonces, por (TB), hay una sola raíz dentro del intervalo $[a, b]$, de la que a y b son valores aproximados, quizá groseros, que luego se han de mejorar con algún método de aproximación.

⁹A éstos se refería el episodio de la sección «Intermediario de los matemáticos» recién mencionado.

Otra característica de (TRp) es que, como teorema especializado, podía ser demostrado de un modo diferente al usado para probar (TR). En algunas obras de álgebra que no trataban el cálculo diferencial podía verse (TRp) demostrado con el uso de las propiedades de continuidad de los polinomios y el estudio del signo de $\frac{f'(x)}{f(x)}$, con la derivada del polinomio definida formalmente.

En definitiva, en la matemática de principios del siglo XX encontramos un teorema de Rolle con dos caras:

(TR) como teorema genuino de análisis matemático,

(TRp) como teorema de álgebra demostrado con uso del análisis.

La cantidad de análisis que se utilizaba para demostrar (TRp) era diversa, continuidad y diferenciabilidad cuando aparecía en una secuencia de análisis y sólo continuidad en las obras exclusivas de álgebra¹⁰. En muchas obras generales de matemáticas hasta el siglo XX, especialmente durante el XVIII, álgebra y análisis caminan al unísono. Así lo expresa M. Kline [13, p. 401]:

Será útil, para apreciar el trabajo y los argumentos de los pensadores del siglo dieciocho, tener en cuenta que ellos no distinguían entre álgebra y análisis. Ya que no apreciaban la necesidad del concepto de límite y porque no alcanzaron a reconocer los problemas introducidos por el uso de las series infinitas, miraron intuitivamente el cálculo como una extensión del álgebra.

No es ésta la ocasión para exponer una descripción de textos de análisis matemático clasificados por el tratamiento que dan al teorema de Rolle. Baste a manera de ejemplo, y para retomar la matemática española, considerar cómo lo explicó Julio Rey Pastor y lo plasmó en las primeras ediciones de sus libros de texto.

2.1. EL TEOREMA DE ROLLE EN LOS PRIMEROS LIBROS DE REY PASTOR

Cuando en junio de 1913 ganó Rey Pastor el traslado de la cátedra a Madrid repitió beca anual en Alemania, esta vez en Gotinga. Regresó para iniciar su enseñanzas en la Universidad Central de Madrid el curso 1914–15, en el que explicó Análisis Matemático 1.º. Después, en 1915–16, repitió el curso de Oviedo acompañándolo [16] de unos apuntes de la asignatura. En esta tarea docente utilizó una información bibliográfica europea, y también norteamericana, muy amplia, de modo que su obra refleja bien el tratamiento general del tema en el principio del siglo.

En esos apuntes hay un capítulo dedicado a la «Variación de las funciones derivables», que estudiada primero en un punto y después en un intervalo, capítulo que termina con el teorema de la función inversa. Allí enuncia:

Si $f(x)$ admite derivada finita en todo el intervalo (a, b) , y es $f(a) = f(b)$, hay al menos un punto interior, ξ , que anula la derivada $f'(x)$.

La diferencia entre este teorema y (TR) es sólo de lenguaje y notacional, además de un detalle de precisión en los puntos extremos del intervalo. Para Rey Pastor,

¹⁰Lo mismo pasaba con el teorema fundamental del álgebra, sus demostraciones necesitaban un mínimo de análisis porque se referían a los cuerpos real y complejo.

(a, b) es el intervalo cerrado, denotando (a^+, b^-) el abierto, que casi nunca usa. El teorema aparece así en su primer libro de 1925¹¹ *Teoría de las funciones reales* [18], pero terminó con el enunciado y las notaciones habituales en ediciones siguientes.

Después de explicar el cálculo diferencial (también en varias variables reales), el curso de Análisis Matemático 2.º contenía unas lecciones de funciones de variable compleja, lo justo para saber de la continuidad de los polinomios y de la variación de su módulo, lo necesario para entrar en el otro gran capítulo del curso, el álgebra, que se iniciaba con la demostración del teorema fundamental. En esta parte algebraica estaba la resolución numérica de ecuaciones, en la que aparecen (TRp) y (CRp) demostrados por el procedimiento más algebraico que no utiliza el cálculo diferencial pero sí (TB). Esta parte del curso salió publicada en 1924 bajo el título *Lecciones de álgebra* [17]¹². Pero un año después, en la antes citada *Teoría de las funciones reales* el autor trató también la resolución numérica de ecuaciones algebraicas¹³ incluyendo entonces (TRp) con la prueba basada en (TR).

Así que Rey Pastor, en el inicio de su prolífica obra como autor de libros de texto, dejó constancia de la variada forma que el teorema de Rolle presentaba¹⁴ en la matemática de principios del siglo XX. A pesar de su interés por ilustrar sus libros con frecuentes comentarios históricos, no le prestó atención al teorema de Rolle desde este punto de vista.

3. LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA SOBRE EL TEOREMA DE ROLLE

La variedad de aspectos con que el teorema de Rolle se presentaba ocupó a historiadores de las matemáticas en torno a 1900, que se interesaron por conocer cuál fue el verdadero teorema original de Rolle y la fuente precisa para documentarlo. Rolle era un personaje suficientemente conocido en la historia de las matemáticas, pero fue necesario investigar más para completar el conocimiento de su obra en este aspecto. Antes del seguir por el camino trazado daré unas pinceladas biográficas del matemático francés.

3.1. MICHEL ROLLE (1652–1719)

Nació en Ambert y se trasladó en 1675 a París, donde fue profesor de matemáticas. Alcanzó fama al publicar en 1682 la solución a un problema diofántico sobre números cuadrados propuesto por J. Ozanan (1640–1717), lo que hizo en la revista pionera *Journal des Savants*, creada en 1665. Su prestigio se consolidó en 1685 al ingresar en la Académie des Sciences de París, que funcionaba desde 1666 impulsada por Colbert, el poderoso ministro de Luis XIV. Poco después, en 1690, vio la luz

¹¹Empezó a escribir este libro en 1918 y a publicarlo incompleto por fascículos impresos en 1921, véase [10].

¹²Este libro tuvo numerosas nuevas ediciones con ampliaciones centradas principalmente en la teoría de Galois, pero los primeros capítulos de resolución numérica quedaron fijados en la primera edición salvo algunas mejoras, véase [8].

¹³Este capítulo algebraico fue suprimido en ediciones posteriores.

¹⁴Lo dicho se refiere a los primeros cursos universitarios, porque el teorema tenía generalizaciones que no se consideraban en el contexto escolar.

su *Traité d'algebre* [19]. A la vista de los reproches que se le hicieron porque no demostraba los resultados, publicó un nuevo libro [20] el año siguiente ofreciendo demostraciones. El tema de la resolución de ecuaciones algebraicas era muy actual en su tiempo, en él había intervenido Descartes y lo seguían haciendo Newton y otros.

Su filiación cartesiana era notoria, lo que no le impidió criticar una de las pasarelas entre el álgebra y la geometría, la aplicación de la geometría al álgebra, pues consideraba no conveniente resolver ecuaciones usando la intersección con curvas auxiliares, pues ello provocaba la introducción de soluciones falsas. En un escrito de 1709 sobre este tema usó por primera vez la expresión «geometría analítica» en el mismo sentido que lo hacemos hoy —tal vez influido por el título de Vieta (1540–1603) *In Artem Analytican Isagoge* (1591)—, pero el término no prosperó entonces; cuando lo hizo en el siglo XIX fue de modo independiente a través de la obra de S. F. Lacroix (1764–1848) —probablemente bajo la influencia de los títulos de J.-L. Lagrange (1736–1813) *Théorie des fonctions analytiques* (1797) y *Mécanique Analytique* (1811)—, pero de hecho Rolle fue el primero en usar dicha expresión.

Cuando se publicó en 1696 el libro *Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital (1661–1704), Rolle combatió con energía contra los métodos infinitesimales, sus disputas con P. Variñon (1654–1722) con este motivo fueron sonadas. Declinó en su actitud hacia finales de la primera década del siglo XVIII, quizá más por razones institucionales que de propio convencimiento. Es curioso que haya terminado dando nombre a uno de los teoremas básicos del análisis real.

3.2. LA CONJETURA DE ENESTRÖM

Retomando el hilo de la situación del teorema de Rolle en torno a 1900, es el momento de decir que en esos años tuvo un papel importante la revista *Bibliotheca Mathematica* (1887–1914), dedicada a la historia de las matemáticas bajo la dirección de su fundador, el sueco G. H. Eneström (1852–1923), a la que se aludió varias veces en los primeros números de la *Revista de la SME*. También por entonces aumentó la comunicación entre los historiadores de las matemáticas a través de los Congresos Internacionales de Matemáticos, que mantuvieron una sección dedicada a historia y educación desde el celebrado en París en 1900. Desde su plataforma periódica, Eneström defendía que la comunidad de personas que se dedicaban a la historia de las matemáticas había crecido lo suficiente como para que fuera el momento de fijar un plan general de trabajo que orientara las investigaciones que deberían realizarse en el futuro. En este ambiente se prestó atención al teorema de Rolle desde el punto de vista histórico y algunos dudaron de que Rolle mereciera paternidad alguna.

Parecía claro que (TR) no podía ser asignado a Rolle por el propio momento histórico en que vivió el matemático francés. Una opción más razonable era que el verdadero teorema de Rolle fuera (TRp) con una demostración adecuada a su momento, pero para certificarlo había que encontrarlo en sus obras, lo que no se conseguía. En el *Traité d'algebre* de Rolle lo que aparece es (CRp), dado como una regla práctica. En esa obra la derivada de un polinomio se considera de modo formal y se llama «cascada» (quizá porque hay una cascada o catarata de derivadas

sucesivas) y las raíces de la cascada entre las que hay una única raíz del polinomio son las «hipótesis» o «límites» de ésta, que se toman como primeros valores aproximados de la misma. Pero en el *Traité* no se justifica la regla (CRp), simplemente se enuncia y se usa.

En 1903 Eneström advirtió que había una obra de Rolle que aparecía citada por algunos historiadores e ignorada por otros, y que quienes la citaban se limitaban a mencionar su título, *Démonstration d'une Methode pour résoudre les Egalitez de tous les degréz*¹⁵ [20], sin dar muestra alguna de conocer su contenido. Entonces conjeturó que el «verdadero» teorema de Rolle debía de encontrarse en dicha obra, que primero había que localizar pues nadie tenía hasta esa fecha noticia de su paradero. La conjetura fue resuelta en 1910 por F. Cajori, que publicó el resultado de sus investigaciones en el número de 1911 de *Bibliotheca Mathematica* [4]. Cajori dio varias localizaciones de *Démonstration* en bibliotecas históricas de París y explicó su contenido; además clarificó el devenir un tanto oculto del teorema y cuándo y cómo pasó a ser, sin perder su nombre, un teorema de cálculo infinitesimal.

3.3. EL MÉTODO DE LAS CASCADAS DE ROLLE

El contenido de *Démonstration* es múltiple, pero ahora interesa sólo la primera parte del libro dedicada a la resolución de ecuaciones, dejando de lado las otras dos, sobre geometría y problemas diofánticos respectivamente. La descripción de *Démonstration* puede verse con mas detalle y perfil histórico en el artículo de Cajori [4] y en su actualización por Barrow-Green [2], y con un perfil más matemático en [22]. Me limitaré a dar una idea rápida del mismo con notación actual.

El método por el que Rolle resolvía las ecuaciones, conocido como «método de las cascadas», contempla las tres etapas tradicionales de la resolución numérica de las ecuaciones algebraicas, pero lo que le dio fama fue su trabajo en la de separación de las raíces. El objetivo del método era obtener las raíces aproximadamente, aunque pudiera haber casos particulares en los que se pudieran calcular raíces racionales exactas. En el siglo XVII se trabajaba en general con ecuaciones con coeficientes racionales, sabiendo que sus raíces podrían ser reales o imaginarias, simples o múltiples. En la terminología de Rolle, «effectives» son las raíces reales contadas una vez, y «défaillantes» las demás, las reales múltiples contadas a partir de su segunda aparición y las imaginarias.

Lo primero que hace Rolle es «preparar» la ecuación, es decir, transformarla en otra con solución más favorable por tener alguna particularidad¹⁶. La acotación de las raíces reales formaba parte de la preparación. Rolle procedía a quitar denominadores si fuera el caso y a dejar el polinomio en la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ con coeficientes enteros y $a_n > 0$; entonces llegaba el momento de acotar las raíces reales de $f(x) = 0$ mediante la cota superior

¹⁵El título está escrito en francés de la época. Ésta es la fácil traducción: *Demostración de un Método para resolver las Ecuaciones de todos los grados*.

¹⁶Este proceder es bien antiguo, practicado especialmente en Oriente.

$L = 1 + a/a_n$, donde a es el mayor valor absoluto de los coeficientes negativos¹⁷. Rolle tomaba como cota el primer entero $H \geq L$. Una vez acotadas las raíces le resultaba fácil introducir una transformación que diera una ecuación con todas ellas positivas, incluidas entre la «hipótesis pequeña» 0 y la «hipótesis grande» H .

Luego entraba en acción el algoritmo de las cascadas, que consiste en «multiplicar» el polinomio f con una progresión aritmética $(y, v) = \{y, y + v, y + 2v, \dots\}$ dando lugar a otro polinomio $f_{(y,v)}$. Dicha multiplicación es la suma de los productos de los términos correspondientes $ya_0 + (y + v)a_1x + (y + 2v)a_2x^2 + \dots$, que con los términos reagrupados toma la forma $f_{(y,v)}(x) = yf(x) + vxf'(x)$, donde f' es la primera «cascada» (léase derivada) de f . El caso particular más utilizado es $f_{(0,1)}(x) = xf'(x)$. Para cada polinomio Rolle construye la sucesión de cascadas $f', f'', f''', \dots$ hasta la última lineal. Este tipo de construcción de la derivada formal era original de J. Hudde (1628–1704).

En el paso siguiente aparece al fin el verdadero teorema de Rolle, acompañado de su corolario:

Teorema: Entre dos raíces consecutivas de la ecuación hay una raíz de su cascada.

Corolario: Entre dos raíces consecutivas de la cascada hay a lo sumo una raíz de la ecuación.

La demostración que Rolle da del teorema es muy sencilla en el caso en que todas las raíces son reales y simples, pues entonces es $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$, $f'(b) = (b - a)(b - c)(b - d) \dots$ y $f'(c) = (c - a)(c - b)(c - d) \dots$, así que tomándolas ordenadas $a > b > c > d \dots$ resulta que los factores de $f'(b), f'(c)$ sólo difieren en el signo en $b - c$ y $c - b$, luego tienen signos distintos y f' se anulará en un valor intermedio por razones de continuidad intuitivamente comprendidas. Rolle extiende el teorema, con dificultades mayores, a ecuaciones con cualquier tipo de raíces.

Conocidas dos raíces consecutivas de una cascada, si el polinomio toma en ellas valores de signo contrario las raíces de la cascada son «hipótesis» o «límites», valores aproximados en definitiva, de la raíz del polinomio inicial que habrá entre ellas. Finalmente Rolle plantea la tarea de afinar esta aproximación mediante mediaciones sucesivas hasta la precisión deseada.

Con estos resultados Rolle proponía ir remontando desde la última cascada lineal hasta llegar a resolver ecuaciones algebraicas de cualquier grado. El método tenía dificultades de ejecución práctica¹⁸, pero se incorporó, aunque sin excesiva relevancia, a los tratados importantes de análisis/álgebra del siglo XVIII, dándose la circunstancia de que los autores no citaban a Rolle. A finales del siglo, Lagrange se ocupó del estado de la resolución numérica de las ecuaciones [14] poniendo de manifiesto

¹⁷Rolle no demostró que este número era una cota, la primera prueba conocida es de C. Maclaurin (1698–1746), que aplicó la cota a la resolución de las cúbicas en su *Treatise of Algebra*, publicado póstumamente en 1748. Rey Pastor [17] atribuye esta cota al matemático escocés.

¹⁸Cuando lo explica, Rey Pastor afirma [17, p. 43]: «Esta propiedad permite separar las raíces de $f(x) = 0$ cuando se conocen las de su derivada. Por ejemplo, cuando $f'(x)$ es de 2.º grado o bicuadrada, o bien cuando $f(x)$ es un trinomio». Motivos pedagógicos le habían llevado a Jiménez de la Flor a considerarlo valioso para resolver ecuaciones de segundo grado.

las dificultades prácticas de los métodos conocidos, atribuyendo sin dudar a Hudde la paternidad de la obtención formal de las derivadas de los polinomios y manifestando cierta duda al atribuir a Rolle el método de separación expuesto en su *Traité*. No mencionó el segundo libro *Démonstration*, del que parece que por entonces ya se había perdido la pista.

3.4. DEL ÁLGEBRA AL ANÁLISIS

El propio Lagrange descubrió el teorema del valor medio (TVM), en relación con el desarrollo de Taylor, en *Théorie des fonctions analytiques* (1797) y, a mediados del siglo XIX, (TRp) se encontró con (TVM) y mutó a la forma (TR) actual, refinada a lo largo del proceso de aritmetización del análisis.

Durante el siglo XVIII el teorema de Rolle tuvo algunas ampliaciones de menor alcance (Gua de Malves, Waring), pero más interesantes fueron sus extensiones al campo complejo en el siglo siguiente. C. F. Gauss (1777–1855) probó en 1816 que las raíces de la derivada f' de un polinomio complejo f están en la clausura convexa de los ceros de f . En 1864 Liouville (1809–82) publicó [15], quizá de casualidad¹⁹, un teorema que puede enunciarse así:

Sea $f = P + Qi$ un polinomio complejo y supongamos que dos raíces $A(a)$ y $B(b)$ están en una curva continua $\alpha(t)$ contenida en $Q = 0$. Entonces existe un complejo $C(c)$ en α entre A y B tal que $f'(c) = 0$.

Una vez probado el teorema, el autor demuestra que el «célebre» teorema de Rolle es un caso particular, y añade:

Nuestro teorema (como el de Rolle) puede extenderse, bajo condiciones fáciles de comprender después de la demostración que precede, a las ecuaciones trascendentes.

El trabajo de Liouville, en una revista de máxima difusión, muestra una fecha en la que el salto trascendente del teorema de Rolle se daba como natural. A mediados del siglo XIX, G. Bellavitis (1803–1880) había consolidado la asignación a Rolle de la paternidad de los resultados algebraicos (TRp) y (CRp), mientras que en 1860 P. O. Bonnet (1819–1892) dio la primera demostración de (TVR) a partir de (TR). Ambas iniciativas se incorporaron a los libros de gran difusión de J.-A. Serret (1819–1885), pero en el de álgebra (1849) aparecía la asignación a Rolle, no así en el de cálculo infinitesimal (1868). Finalmente se generalizó el calificativo «de Rolle» en ambas versiones.

4. EPÍLOGO: LA NUEVA IMAGEN DEL TEOREMA DE ROLLE

En el siglo XVII los matemáticos llamaban álgebra a la teoría de ecuaciones, mientras que desde el segundo tercio del XX se designa con ese nombre a la teoría

¹⁹Afirmaba el autor, que era editor de la revista, que aprovechaba unas páginas que le quedaban para insertar una nota sobre un tema que explicaba en sus lecciones en el Collège de France. Los apuros de un editor para completar cuadernillos sacaron a la luz este teorema.

de las estructuras surgidas del álgebra clásica: grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc. El cambio se fue gestando durante la segunda mitad del siglo XIX y el primer tercio del XX [5, 6]. El último texto representativo de la primera forma de concebir el álgebra es el *Lehrbuch der Algebra* (1895) de H. Weber (1842–1913), mientras que el primero de la época actual es *Moderne Algebra* (1930) de B. L. van der Waerden²⁰.

Me parece interesante terminar recordando la situación del teorema de Rolle en una nueva imagen del álgebra real surgida del 17.º problema de Hilbert, que fue resuelto en 1927 por el austriaco E. Artin (1898–1962), incorporado a la escuela algebrista alemana. La solución del problema dio lugar a una teoría algebraica del número real lo más próxima posible al modelo sin recurrir al axioma de continuidad (álgebra real sin análisis), es decir, a la teoría de los cuerpos reales cerrados que sustenta a la geometría real abstracta [3]. Un cuerpo se llama real si la condición $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ implica $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Un cuerpo real siempre contiene al cuerpo racional $\mathbb{Q}$. Los cuerpos reales cerrados son cuerpos reales R que no tienen extensiones algebraicas propias reales (equivalentemente $R[i]$ es un cuerpo algebraicamente cerrado). En esta teoría, el inicio del análisis, ahora algebrizado, gana una refinada generalidad, siendo válidos (TRp) y (TR).

Hay que pensar, aunque sea una ficción banal, que Rolle aceptaría el análisis bien explicado con supremos y límites, igual que disfrutaría viendo la altura alcanzada por su teorema ocultando supremos e infinitesimales bajo un despliegue de axiomas algebraicos.

REFERENCIAS

- [1] J. BARINAGA, *Miscelánea matemática*, JAE, Madrid, 1937.
- [2] J. BARROW-GREEN, From cascades to calculus: Rolle's theorem, en: E. Robson y J. Stedall (eds.), *The Oxford handbook of the history of mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2009, págs. 737–754.
- [3] J. BOCHNAK, M. COSTE Y M.-F. ROY, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [4] F. CAJORI, On Michel Rolle's book «Methode pour résoudre les egalitez» and the history of «Rolle's theorem», *Bibliotheca mathematica*, 3rd S., Vol. II, 1911, 300–313.
- [5] L. CORRY, Estructuras algebraicas y textos algebraicos del siglo XIX, *Llull, Revista de la SEHCYT* 14, 1991, 7–30.
- [6] L. CORRY, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [7] L. ESPAÑOL, Julio Rey Pastor en la Revista de la Sociedad Matemática Española (1911–1917), *Llull, Revista de la SEHCYT* 19, 1996, 381–424.

²⁰*Lecciones de Algebra* de Rey Pastor [8, 17] es un ejemplo de texto que se debate entre ambas tendencias, con clara preferencia por mantener vigente la primera de ellas.

- [8] L. ESPAÑOL, Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo, en L. Español (ed.), *Matemática y Región: La Rioja*, 1998, 63–122.
- [9] L. ESPAÑOL, Julio Rey Pastor: Primeros años españoles: hasta 1920, *La Gaceta de la RSME* 9, 2006, 546–585.
- [10] L. ESPAÑOL, E. FERNÁNDEZ Y M. C. MÍNGUEZ, La peripecia (1918–1939) de un libro de texto de Julio Rey Pastor: Teoría de las funciones reales, en: M. A. Velamazán, F. Veá, J. Cobos y C. Martín (coords.), *La Historia de la Ciencia y de la Técnica: un Arma Cargada de Futuro. Ensayos en Homenaje a Mariano Hormigón*, Diputación de Cádiz, Cádiz, 2008, 221–235.
- [11] E. FERNÁNDEZ MORAL, *Apuntes de Análisis I*, Universidad de La Rioja, Logroño, 2003.
- [12] T. JIMÉNEZ DE LA FLOR, *Pequeñas cuestiones matemáticas*, Zamora, 1914.
- [13] M. KLINE, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, 3 v., Alianza, Madrid, 1992.
- [14] J.-L. LAGRANGE, *De la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris, 1798.
- [15] J. LIOUVILLE, Extension du Théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, S. 3^{em}, IX, 1864, 84–88.
- [16] J. REY PASTOR, *Resumen de las Lecciones de Análisis matemático (segundo curso) explicadas por D. Julio Rey Pastor. Curso 1915–16*, Madrid, 1916.
- [17] J. REY PASTOR, *Lecciones de álgebra*, Madrid, 1924.
- [18] J. REY PASTOR, *Teoría de las funciones reales*, Madrid, 1925.
- [19] M. ROLLE, *Traité d’algebre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*, Paris, 1690.
- [20] M. ROLLE, *Démonstration d’une Methode pour résoudre les égalitez de tous les degrez; suivie de deux autres Methodes, dont la premiere donne les moyens de résoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, et la seconde, pour résoudre plusieurs questions de Diophante qui n’ont past encore esté résolües*, Paris, 1691.
- [21] D. E. SMITH, *A source book in mathematics*, Dover, New York, 1959.
- [22] J.-L. VERLEY, Techniques de séparation de racines au XVII^{em} siècle, en *Là-peu-près. Aspects anciens et modernes de l’approximation*, Éditions de l’École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 1988, págs. 67–77.