Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de diciembre de 2011.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 175. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Si en un triángulo las longitudes de sus lados son a, b y c, se llama potencia del triángulo al valor $a^2+b^2+c^2$. Determinar los puntos del plano que, unidos a los tres vértices de un triángulo dado, determinan tres triángulos de igual potencia.

Problema 176. *Propuesto por Panagiote Ligouras, “Leonardo da Vinci” High School, Noci, Italia.*

Sea ABC un triángulo con lados de longitudes a, b y c, inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} (r_a - r)(r_b + r_c)(r_a r_b + r r_c) \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

PROBLEMA 177. *Propuesto por M. L. Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, USA.*

Evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan^2(\operatorname{sen}^2 t)}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

PROBLEMA 178. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja (estudiante), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.*

Probar que existen infinitos primos impares p tales que, para cada entero $n > 1$, el valor

$$\sqrt{\varphi(p) + \varphi(p^2) + \cdots + \varphi(p^n)}$$

es irracional, siendo φ la función de Euler.

PROBLEMA 179. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Los números de Stirling de primera especie, denotados $s(n,k)$, se definen mediante la identidad

$$z(z-1)\cdots(z-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) z^k.$$

Sean k e i enteros fijos tales que $1 \le i \le k$, y m un valor real positivo tal que $m - k > 1$. Probar que

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{\infty} \frac{n_i}{(n_1+n_2+\cdots+n_k)^m}$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} s(k,p) \left(\zeta(m-p) - 1 - \frac{1}{2^{m-p}} - \cdots - \frac{1}{(k-1)^{m-p}} \right),$$

donde el término entre paréntesis para $k = 1$ sólo contiene el factor $\zeta(m-p)$.

PROBLEMA 180. *Propuesto por Javier A. Múgica de Rivera, Ribadeo, Lugo.*

Sobre una mesa se encuentra un dado. Llamaremos cara inferior a la que se encuentra en contacto con la mesa, cara superior a su opuesta y caras laterales a las restantes. Supongamos que inicialmente el 6 ocupa la cara inferior. Si en cada paso se cambia la posición del dado de manera que una de las caras laterales, cada una de ellas con la misma probabilidad, pasa a ocupar la cara superior, ¿cuántos pasos son necesarios, por término medio, para que el 6 alcance la cara superior?

Soluciones

Problema 151. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Probar o refutar la siguiente afirmación: Si $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, entonces $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(f(x))\,dx$ converge.

Solución enviada por Bernardo de la Calle Ysern, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

La afirmación es falsa; para verlo, construyamos un contraejemplo.

En primer lugar probaremos que la integral impropia

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t}\,dt$$

es divergente. El integrando es continuo ya que $\sqrt{t} + \operatorname{sen} t > 0$ si $t > 0$, de modo que el carácter de la integral depende del comportamiento del integrando cuando t tiende a $+\infty$. Ahora bien,

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t + \sqrt{t}\operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t}.$$

Por tanto

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos(2t)}{2t} - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (1)$$

cuando t tiende a $+\infty$. Debido al criterio de Dirichlet, las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$$

son convergentes; de donde se deduce, teniendo en cuenta (1), que $I = -\infty$.

Para construir el contraejemplo definimos la función

$$g(y) = \int_1^{y} \frac{dt}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t}, \quad y \geq 1.$$

Es fácil ver que $\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$, y como $g'(y) = (\sqrt{y} + \operatorname{sen} y)^{-1} > 0$, $y \geq 1$, se tiene que la función g es estrictamente creciente, con lo que se puede definir su función inversa

$$f \equiv g^{-1} : [0,+\infty) \to [1,+\infty).$$

La función f es derivable en $[0,+\infty)$ y además

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(g^{-1}\right)'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \lim_{y\to+\infty} \left(\sqrt{y} + \operatorname{sen} y\right) = +\infty.$$

Sin embargo, haciendo el cambio de variable $f(x) = t$, se prueba que

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(f(x))\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t}\, dt = -\infty.$$

NOTA. Usando el criterio de Dirichlet para la convergencia de integrales impropias puede probarse que, si se añade la hipótesis de que la función f sea convexa en $[0, +\infty)$, entonces el enunciado es cierto.

En efecto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f'(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. Es claro que f es estrictamente creciente y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Llamemos $f(0) = a \geq 0$. Entonces

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(f(x))\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{h(t)}\, dt, \tag{2}$$

realizando el cambio $f(x) = t$ y donde $h(t) = f'(f^{-1}(t))$.

Al ser f convexa, la función f' es monótona creciente. Por tanto, la función h es positiva y monótona creciente en $[0, +\infty)$, y verifica $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$. El criterio de Dirichlet mencionado anteriormente y la igualdad (2) prueban ahora que la integral del enunciado es convergente.

También resuelto por J. L. Arregui, J. A. Múgica, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 152. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Para $|x| < 1$, evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right) \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \cdots - x^n \right).$$

NOTA. En la versión publicada originalmente del enunciado de este problema, en el sumando $\frac{x^2}{2}$ no aparecía el cuadrado. Consideramos que el detalle no precisaba de una corrección y, de hecho, todas las soluciones recibidas daban por supuesto que se había producido ese error.

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos que, para $|x| < 1$, la suma requerida es

$$\frac{x}{(1-x)^2} \left((1-x)\log(1-x) + \log(1+x) \right).$$

Puesto que, para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \cdots - x^n = \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

es suficiente probar que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(\frac{1}{1-x}\right)-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)x^{n+1}\\ =\frac{x}{1-x}\left((1-x)\log(1-x)+\log(1+x)\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Por inducción puede probarse de manera elemental que, para cada entero positivo M,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}\left(\log\left(\frac{1}{1-x}\right)-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)x^{n+1}\\ =\frac{1}{1-x}\left(x^2(1-x^M)\log\left(\frac{1}{1-x}\right)+\sum_{k=1}^{M}\frac{x^{M+k+2}-x^{2k+1}}{k}\right),\end{aligned}$$

cuando $|x|<1$. Ahora, tomando el límite cuando M tiende a infinito se llega a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(\frac{1}{1-x}\right)-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)x^{n+1}\\ =\frac{1}{1-x}\left(x^2\log\left(\frac{1}{1-x}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k}\right).\end{aligned}$$

Por último, usando la identidad

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k}=-x\log(1-x^2)$$

se concluye (1), y la solución queda completada.

También resuelto por B. de la Calle, D. Lasaosa, J. A. Múgica, P. Perfetti, A. Stadler, J. Vinuesa y el proponente. Se han recibido dos soluciones incorrectas.

Problema 153. *Propuesto por Pablo Refolio (estudiante), Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.*

Probar que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}=\pi\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Solución enviada (independientemente) por V. Lanchares Barrasa, Universidad de La Rioja, Logroño, y por J. Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Consideremos los productos parciales hasta $n=N$ de cada uno de los factores que intervienen. Por un lado se tiene

$$\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}=\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)^{4}\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\right)^{9}\cdots\left(\frac{(N-1)\cdot(N+1)}{N\cdot N}\right)^{N^2}$$

y, cancelando términos, resulta

$$\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}=\frac{1}{2}N!^2\,\frac{(N+1)^{N^2}}{N^{(N+1)^2}}.$$

Procediendo de manera análoga con el otro factor se llega a

$$\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}=\frac{1}{3}\frac{(2N+1)^N}{(2N-1)!!}=\frac{2^N}{3}\frac{(2N+1)^N N!}{(2N)!},$$

donde $(2N-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2N-1)$. Por tanto,

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}=\lim_{N\to\infty}\frac{2^N N!^3(N+1)^{N^2}(2N+1)^N}{6(2N)!N^{(N+1)^2}}.$$

Aplicando la equivalencia de Stirling para $N!$ resulta

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n}=\pi\frac{\sqrt{2}}{6}\lim_{N\to\infty}e^{-N}\left(\frac{N+1}{N}\right)^{N^2}\left(\frac{2N+1}{2N}\right)^{N}.$$

Ahora el resultado pedido se obtiene observando que

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2N+1}{2N}\right)^{N}=e^{1/2}$$

y

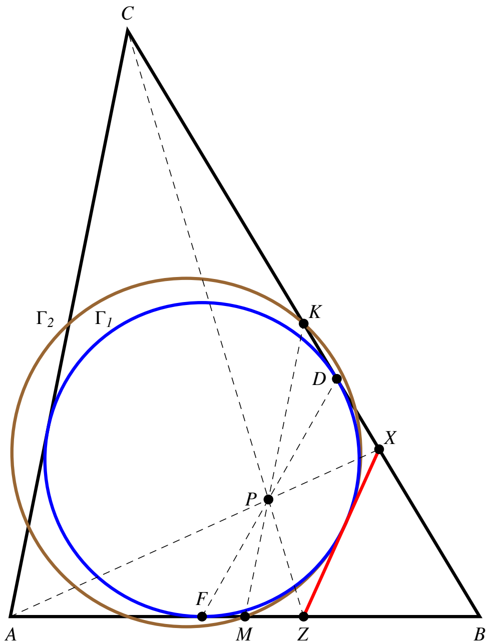
$$\lim_{N\to\infty}e^{-N}\left(\frac{N+1}{N}\right)^{N^2}=\lim_{N\to\infty}e^{N^2\log\left(1+\frac{1}{N}\right)-N}=e^{-1/2},$$

donde en el último paso se ha usado que $N^2\log\left(1+\frac{1}{N}\right)-N=-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{N}\right)$.

También resuelto por D. Lasaosa, J. A. Múgica, P. Pantoja, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 154. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea ABC un triángulo con ángulos $A>B>C$, circunferencia inscrita Γ_1 y circunferencia de los nueve puntos Γ_2. En los lados BC y AB se consideran los puntos medios K y M y los puntos de contacto con Γ_1 que denotaremos por D y F (véase la figura que aparece a continuación). Definimos $P=KM\cap DF$, $X=AP\cap BC$ y $Z=CP\cap AB$. Probar que la recta XZ es la tangente común a Γ_1 y Γ_2.



Solución enviada por el proponente.

Denotemos por $[PQRS] = \frac{PR}{PS} : \frac{QR}{QS}$ la razón de cuatro puntos alineados.

En la proyectividad φ entre las rectas BC y BA definida por

$$\varphi(C) = A, \qquad \varphi(D) = B, \qquad \varphi(B) = F$$

y

$$[ABF\varphi(T)] = [CDBT]$$

para todo otro punto T de BC, la recta $T\varphi(T)$ es tangente a Γ_1 para cada T de BC.[1]

En la misma proyección desde P, se tiene $[BKDX] = [BMFA]$, luego

$$\frac{KX}{BX} = \frac{KD \cdot BF \cdot MA}{BD \cdot MF \cdot BA} = \frac{KD}{2MF} = \frac{b-c}{2(a-b)},$$

de donde resulta

$$BX = \frac{a(a-b)}{2a-b-c}.$$

[1]Nota de los editores: Este resultado puede encontrarse, por ejemplo, en P. Puig Adam, *Curso de Geometría Métrica*, tomo II, págs. 147–148.

Por otra parte, conocemos $BK = \frac{a}{2}$, $BD = \frac{a+c-b}{2}$ y, siendo K' el pie de la altura desde el vértice A, $BK' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Con esto podemos calcular las potencias del punto X respecto de las circunferencias Γ_1 y Γ_2, que son, respectivamente,

$$XD^2 = (BD - BX)^2 = \left(\frac{a+c-b}{2} - \frac{a(a-b)}{2a-b-c}\right)^2 = \frac{(b-c)^2(b+c-a)^2}{4(2a-b-c)^2}$$

y

$$\begin{aligned} XK \cdot XK' &= (BK - BX)(BK' - BX) \\ &= \left(\frac{a}{2} - \frac{a(a-b)}{2a-b-c}\right)\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} - \frac{a(a-b)}{2a-b-c}\right) \\ &= \frac{(b-c)^2(b+c-a)^2}{4(2a-b-c)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, X es un punto del eje radical de las circunferencias Γ_1 y Γ_2.

De un modo análogo al anterior, se demuestra que Z pertenece al eje radical de Γ_1 y Γ_2. Luego el eje radical de Γ_1 y Γ_2 es la recta XZ, que es tangente a Γ_1. Entonces es también tangente a Γ_2.

También resuelto por D. Lasaosa y J. A. Múgica.

PROBLEMA 155. *Propuesto por Arnau Messegué (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Dado un triángulo escaleno ABC, se consideran M_a, M_b y M_c los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente, y N_a, N_b y N_c los puntos medios de los arcos BC, CA y AB de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC que no contienen a A, B y C, respectivamente. Probar que la circunferencia tangente exteriormente a las tres circunferencias de diámetros M_aN_a, M_bN_b y M_cN_c es tangente a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC en el punto de Feuerbach de dicho triángulo.

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Denotemos por O_a y r_a, respectivamente, el centro y el radio de la circunferencia de diámetro M_aN_a, y por R y r el circunradio y el inradio de ABC. Sea P el punto del segmento IN tal que $PI = 2PN$, siendo N el centro de la circunferencia de los nueve puntos de ABC. Demostraremos que la circunferencia de centro P y radio $\frac{R+r}{3}$, que claramente es tangente a las circunferencias inscrita y de los nueve puntos en su punto común de tangencia (punto de Feuerbach), es también tangente a la circunferencia de centro O_a y radio r_a.

Es conocido que $OM_a = R\cos A$, con lo que $M_aN_a = R(1-\cos A) = 2R\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$, luego $r_a = R\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$, y O_a es el punto sobre la mediatriz de BC, exterior a ABC y que dista r_a de M_a. Es conocido que N es el punto medio de OH, siendo O, H el circuncentro y ortocentro de ABC, respectivamente, y que H dista $2R\cos B\cos C$ de BC (fácilmente demostrable en cualquier caso utilizando trigonometría básica), con lo que N dista de BC una distancia igual a

$$\frac{2R\cos B\cos C+R\cos A}{2}=\frac{R\cos(B-C)}{2},$$

luego P dista de BC una distancia igual a $\frac{R\cos(B-C)+r}{3}$. Al mismo tiempo, y asumiendo sin pérdida de generalidad que $B>C$, y como el pie de la altura desde A dista $b\cos C-\frac{a}{2}=2R\operatorname{sen}B\cos C-R\operatorname{sen}A=R\operatorname{sen}(B-C)$ de M_a, y el punto de tangencia de la circunferencia inscrita sobre el lado BC dista de M_a una distancia igual a

$$\frac{a+b-c}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-c}{2},$$

se deduce que el pie de la perpendicular desde P sobre BC dista de M_a una distancia igual a

$$\frac{R\operatorname{sen}B-R\operatorname{sen}C+R\operatorname{sen}(B-C)}{3}.$$

Se tiene entonces que la distancia PO_a cumple

$$PO_a^2=\frac{(R\operatorname{sen}B-R\operatorname{sen}C+R\operatorname{sen}(B-C))^2}{9}+\left(\frac{R\cos(B-C)+r}{3}+r_a\right)^2,$$

y para que la circunferencia de diámetro M_aN_a y la circunferencia de centro P tangente al circunferencia de los nueve puntos en el punto de Feuerbach sean tangentes, debe cumplirse que

$$\frac{(R\operatorname{sen}B-R\operatorname{sen}C+R\operatorname{sen}(B-C))^2}{9}+\left(\frac{R\cos(B-C)+r}{3}+r_a\right)^2 =\left(\frac{R+r}{3}+r_a\right)^2.$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando, la anterior relación es equivalente a

$$R(\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}C)^2+2R\operatorname{sen}(B-C)\,(\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}C)=(2r+6r_a)(1-\cos(B-C)).$$

Ahora bien, $\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}C=2\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, mientras que $1-\cos(B-C)=2\operatorname{sen}^2\frac{B-C}{2}$, con lo que, al ser ABC escaleno, podemos simplificar la anterior relación, transformándola en su equivalente

$$R\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}+2R\cos\frac{B-C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}=r+3r_a,$$

o, utilizando el valor hallado para r_a,

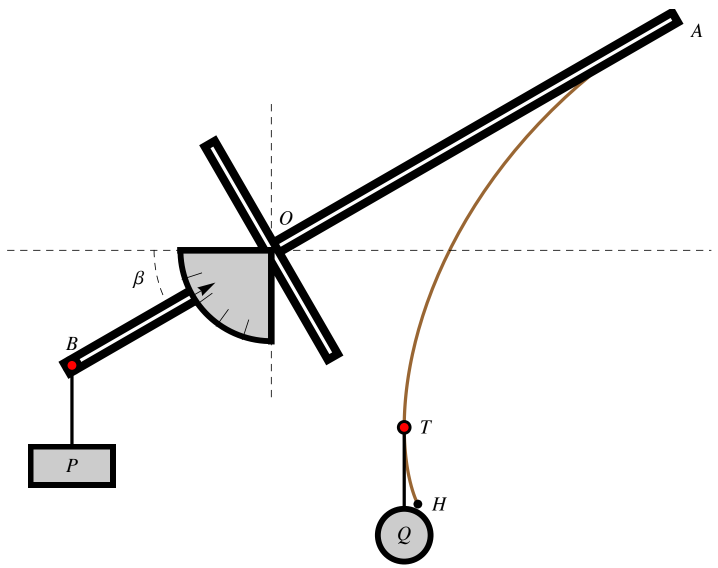
$$r=2R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\operatorname{sen}\frac{A}{2}\right)=4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2},$$

relación conocida y siempre cierta para cualquier triángulo. Por rotación cíclica de los vértices A, B y C, este resultado es cierto también para las circunferencias de diámetros M_bN_b y M_cN_c, de donde se concluye el resultado pedido, quedando la circunferencia definida en el enunciado caracterizada como aquélla cuyo centro está en el segmento entre el incentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos, a doble distancia del primero que del segundo, y tangente simultáneamente a las circunferencias inscrita y de los nueve puntos en el punto de Feuerbach.

También resuelto por el proponente.

PROBLEMA 156. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

La figura que aparece a continuación representa una báscula que gira en torno al punto fijo O. Del punto B cuelga el peso P que se quiere medir. En el brazo derecho de la balanza, fijada rígidamente a él, una curva directriz ATH dirige la línea de acción de un contrapeso Q mediante un hilo que está enrollado en la curva y que se va desenrollando a medida que, por efecto del peso P, la báscula se inclina. Tenemos también un arco graduado para medir el ángulo de inclinación. Suponemos el dispositivo equilibrado si el centro de gravedad del armazón, libre del peso P, se sitúa en el punto O.



Hallar la ecuación de la curva ATH para que la báscula quede equilibrada cuando el ángulo girado β sea proporcional al peso P. Hallar también esa constante de proporcionalidad.

Solución enviada por Jesús María Sanz Serna, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Como en la figura, sean respectivamente P y Q el peso que se desea medir y el de referencia. Llamemos ℓ y L, respectivamente, a las distancias OB y OA. Introduzcamos ejes cartesianos ortogonales, ligados a la parte móvil de la balanza, con origen en el fulcro O, Ox a lo largo del brazo OA y Oy ascendente.

Deseamos una relación $P = c\beta$ y el equilibrio exige que $P\ell = Q\xi$, siendo ξ la abscisa del punto de intersección de la vertical por T y el brazo OA. De estas relaciones será $\xi = \mu\beta$, donde μ es la constante $c\ell/Q$. La ecuación de la tangente a la curva en T es, evidentemente,

$$y \operatorname{sen} \beta - (x - \mu\beta) \cos \beta = 0. \tag{1}$$

Al variar $\beta \in [0, \pi/2]$ cambia la tangente, y la envolvente de la familia de tangentes es la curva ATH buscada. Derivemos pues la ecuación (1) con respecto al parámetro β para obtener

$$y \cos \beta + (x - \mu\beta) \operatorname{sen} \beta + \mu \cos \beta = 0, \tag{2}$$

y el sistema (1)–(2) nos dará las ecuaciones paramétricas de la curva. Despejando obtenemos que

$$x = \frac{\mu}{2}(2\beta) - \frac{\mu}{2} \operatorname{sen}(2\beta) \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{\mu}{2}\big(1 + \cos(2\beta)\big),$$

donde reconocemos una *cicloide* generada por una circunferencia de radio $\mu/2$ al girar sin deslizamiento sobre la recta $y = -\mu$. El punto donde la curva encuentra al brazo OA (esto es, al eje $y = 0$) corresponde al valor del parámetro $\beta = \pi/2$ y tiene abscisa $x = \pi\mu/2 = \pi c\ell/(2Q)$; puesto que este valor debe coincidir con L, tendremos $c = 2QL/(\pi\ell)$.

Notemos que en el límite $\beta \to \pi/2$ el valor de P tiende a QL/ℓ y en tal límite el hilo se ha liberado completamente de la curva ATH y, por ello, los pesos tienden a valores inversamente proporcionales a los brazos respectivos, como en una balanza romana ordinaria. Así mismo, observemos que QL/ℓ es el valor extremo de los pesos P que podemos medir.

También resuelto por A. González (estudiante) y el proponente.