Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2017.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 305. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-2^{-(n+1)}}}{\operatorname{senh}(2^{-(n+1)})}-\frac{e^{-2^{-n}}}{\operatorname{senh}(2^{-n})}-2^n\right)=\frac{e-3}{e-1}.$$

Problema 306. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Probar que

$$\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx\,dy}{(x+y)^2+(1+xy)^2}=\frac{1}{3}\left(G+\frac{\pi}{8}\log(2-\sqrt{3})\right),$$

donde

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

es la constante de Catalan.

Problema 307. *Propuesto por Cristóbal Sánchez-Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sean X, Y y Z las proyecciones del baricentro G de un triángulo ABC sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean S y T las áreas de los triángulos ABC y XYZ, respectivamente. Probar que

$$T = \frac{4}{9}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,S^3,$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente.

Problema 308. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîtămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Si

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{(\operatorname{sen} x)^n + (\cos x)^n}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

evaluar los límites

$$L = \lim_{n\to\infty} I_n \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n^2(I_n - L).$$

Problema 309. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo no isósceles ABC. Si $m \geq 0$ y $x, y > 0$, probar que

$$\frac{a^{3(m+1)}}{((a-b)(a-c))^{m+1}} + \frac{b^{3(m+1)}}{((b-a)(b-c))^{m+1}} + \frac{c^{3(m+1)}}{((c-a)(c-b))^{m+1}} > \frac{(a+b+c)^{m+1}}{3^m}.$$

Problema 310. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Probar que para cualquier número racional m/n se verifica la desigualdad

$$\left|\sqrt{7} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{6n^2}.$$

Problema 311. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioculescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función derivable verificando las siguientes propiedades:

a) f es inyectiva, b) $f(0)=0$ y $f(1)=1$, c) f' es creciente.

Probar que se verifica la desigualdad

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 x f^2(x)\,dx \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \int_0^1 f(x)\big(f^{-1}(x)-x\big)\,dx\right)^2.$$

Problema 312. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Una pirámide recta de altura h tiene de base un n-gono regular de perímetro $2p$. Un gusano quiere escalar la pirámide e inicia su ascensión en un vértice de la base. Arrastrándose por una cara, se dirige perpendicularmente hacia la arista opuesta. Al llegar a esta arista prosigue su camino, siempre en el mismo sentido, por la cara adyacente, siguiendo una trayectoria perpendicular a la arista opuesta, y así sucesivamente.

Calcular la distancia que recorre el gusano hasta que completa m vueltas alrededor del eje de simetría de la pirámide, así como la altura sobre el suelo a la que se encuentra en ese momento.

Soluciones

Problema 281. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sea $A \leq \pi/2$ el mayor ángulo de un triángulo ABC. Si a, b, c son las longitudes de los lados y r, R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita respectivamente, probar que

$$2(R+r) \leq b+c \leq a+2\sqrt{3}r.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

La hipótesis sobre el ángulo A implica que $A \geq \pi/3$ y, en consecuencia, si designamos por s el semiperímetro del triángulo ABC, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{3} \leq \tan A = \frac{r}{s-a} = \frac{2r}{b+c-a},$$

que es equivalente a

$$b+c \leq a+2\sqrt{3}r,$$

como se pide en el lado derecho de la desigualdad propuesta. Además, la igualdad ocurre si y solo si $A = \pi/3$; es decir, si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

Como $A = \pi - (B + C)$, la restricción $\pi/3 \leq A \leq \pi/2$ equivale a $\pi/2 \leq B + C \leq 2\pi/3$, y este hecho implica

$$B \geq \frac{\pi}{2} - C \qquad \text{y} \qquad C \geq \frac{\pi}{2} - B. \tag{1}$$

Por la hipótesis sobre el ángulo A, sabemos que $B, C \in (0, \pi/2)$ y, como la función coseno es decreciente en dicho intervalo, de (1) tenemos las desigualdades

$$\cos B \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \operatorname{sen} C \qquad \text{y} \qquad \cos C \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{sen} B,$$

que pueden reescribirse como

$$1 - \operatorname{sen} C \leq 1 - \cos B \qquad \text{y} \qquad 1 - \operatorname{sen} B \leq 1 - \cos C.$$

Por tanto,

$$(1 - \operatorname{sen} B)(1 - \operatorname{sen} C) \leq (1 - \cos B)(1 - \cos C)$$

o, de manera equivalente,

$$\cos B + \cos C - \cos(B + C) \leq \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C.$$

Así, usando la relación $\cos A = -\cos(B + C)$, obtenemos

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C.$$

De este modo, con las relaciones

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \frac{b + c}{2R},$$

la desigualdad anterior se transforma en

$$2(R + r) \leq b + c,$$

que es el lado izquierdo de la desigualdad propuesta. En este caso la igualdad ocurre si y solo si en (1) se cumplen las igualdades; es decir, si y solo si los ángulos B y C son complementarios. O, lo que es lo mismo, si y solo si $A = \pi/2$.

También resuelto por L. Crespo (estudiante), R. de la Cruz, Kee-Wai Lau, J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente), N. Zlota y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Como indican el proponente y B. Salgueiro en sus soluciones, la desigualdad de la izquierda es consecuencia del Problema 10713 de la revista *Amer. Math. Monthly*, propuesto por el propio J. B. Romero Márquez en el volumen 106 (1999), pág. 166, y cuya solución apareció en el volumen 107 (2000), pág. 464.

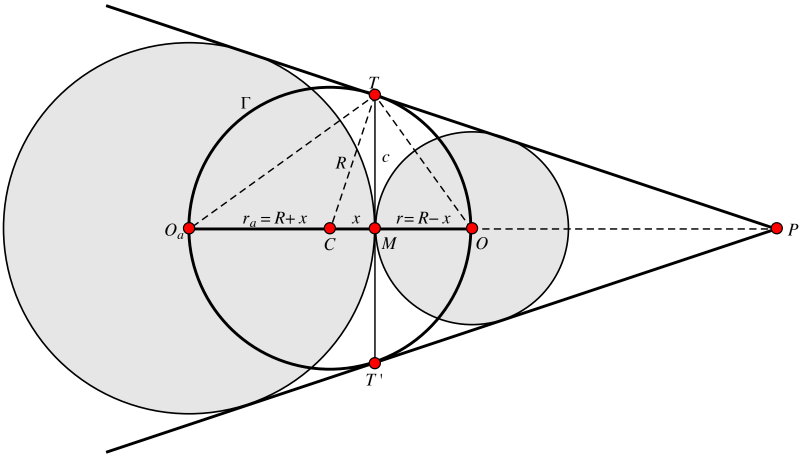

Figura 1: Esquema para la primera solución del Problema 282.

Problema 282. *Propuesto por Cristóbal Sánchez-Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Desde un punto P exterior a una circunferencia dada de radio R trazamos las tangentes PT y PT'. Sean $TT' = 2c$, r el inradio del triángulo PTT' y r_a el radio de la circunferencia exinscrita tangente al lado TT'. Probar que la cantidad

$$\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2}$$

es independiente de la posición del punto P.

Solución enviada por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.

Sea C el centro de la circunferencia Γ de radio R, véase el esquema de la figura 1. En el triángulo PTT', la bisectriz interior del ángulo P corta a Γ en los puntos medios de los arcos TT'. Además, en cada uno de los vértices T y T', las bisectrices interior y exterior también bisecan estos arcos. Luego los puntos medios de los arcos TT' son O y O_a, incentro y exincentro correspondiente al vértice P, respectivamente, del triángulo PTT'. Como la circunferencia inscrita de centro O y radio r y la exinscrita de centro O_a y radio r_a son tangentes en el punto medio M del lado TT', se tiene entonces $OO_a = r + r_a = 2R$.

Llamando $CM = x$, se cumple que $x = \sqrt{R^2 - c^2}$ y

$$\begin{aligned} r^2 + r_a^2 + 2c^2 &= (R - x)^2 + (R + x)^2 + 2c^2 \\ &= 2R^2 + 2x^2 + 2c^2 = 4R^2. \end{aligned}$$

Así pues, $\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2} = 2R$, independientemente de la posición del punto P respecto de la circunferencia Γ.

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Sea O el centro de la circunferencia de radio R. Tomando $\angle TOT' = 2\theta$, se tiene que $\angle TPT' = \pi - 2\theta$, $c = R\operatorname{sen}\theta$ y $PT = PT' = R\tan\theta$. Si F y s denotan, respectivamente, el área y el semiperímetro del triángulo PTT' obtenemos las relaciones

$$F = \frac{PT \cdot PT'}{2}\operatorname{sen}(\angle TPT') = \frac{R^2}{2}\tan^2\theta\operatorname{sen}2\theta$$

y

$$s = R(\tan\theta + \operatorname{sen}\theta).$$

Ahora, usando las conocidas identidades $r = F/s$ y $r_a = F/(s-2c)$, deducimos que

$$r = \frac{R}{2}\frac{\tan^2\theta\operatorname{sen}2\theta}{\tan\theta + \operatorname{sen}\theta} = R\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

y

$$r = \frac{R}{2}\frac{\tan^2\theta\operatorname{sen}2\theta}{\tan\theta - \operatorname{sen}\theta} = R\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos\theta} = 2R\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

De este modo,

$$\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2} = \sqrt{4R^2\left(\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = 2R,$$

que es independiente de la posición de P.

También resuelto por M. Amengual, R. S. Elexpuru, J. Mir (dos soluciones), J. Nadal, R. Peiró, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

PROBLEMA 283. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar la identidad

$$\sec^2\frac{\pi}{18} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9} = 12.$$

Solución enviada por Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona.

Sea

$$S = \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{4\pi}{9}.$$

Como $S = \sec^2\frac{\pi}{18} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{9}$, basta probar que $S = 12 + \operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{9} = \frac{40}{3}$.

A partir de la fórmula de De Moivre se tiene la identidad

$$\operatorname{sen}(9x) = 9\operatorname{sen}x - 120\operatorname{sen}^3x + 432\operatorname{sen}^5x - 576\operatorname{sen}^7x + 256\operatorname{sen}^9x,$$

por lo que las raíces del polinomio $9t-120t^3+432t^5-576t^7+256t^9$ son $t_k=\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{9})$, $k=0,1,\ldots,8$. Además, como $\operatorname{sen}(\frac{j\pi}{9})=\operatorname{sen}(\frac{(9-j)\pi}{9})$, con $j=1,2,3,4$, se tiene que el polinomio $9-120u+432u^2-576u^3+256u^4$ tiene como raíces $u_j=\operatorname{sen}^2(\frac{j\pi}{9})$, con $j=1,2,3,4$. Finalmente, haciendo el cambio de variable $v=1/u$, deducimos que las raíces del polinomio $9v^4-120v^3+432v^2-576v+256$ son los sumandos de S. Así, aplicando la fórmulas de Cardano-Vieta correspondientes, se llega a que $S=\frac{120}{9}=\frac{40}{3}$.

También resuelto por M. Amengual, C. Beade, J. Duoandikoetxea, Kee-Wai Lau, I. Larrosa, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Stadler, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente), N. Zlota y el proponente.

Problema 284. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Los números de Stirling de primera especie, denotados $s(n,k)$ con $n\geq 0$ y $0\leq k\leq n$, están definidos por la identidad

$$z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)z^k.$$

Para un entero $n\geq 2$, probar que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{x-y}{e^x-e^y}\right)^n dx\,dy=2\sum_{i=1}^{n}s(n,i)\zeta(n+2-i),$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Sea $y>0$ fijo; entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{x-y}{e^x-e^y}\right)^n dx&=\int_0^y e^{-ny}\left(\frac{y-x}{1-e^{x-y}}\right)^n dx+\int_y^\infty e^{-nx}\left(\frac{x-y}{1-e^{y-x}}\right)^n dx\\&=e^{-ny}\int_0^y\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^n dz+e^{-ny}\int_0^\infty e^{-nz}\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^n dz,\end{aligned}$$

donde en la primera integral hemos realizado el cambio de variable $y-x=z$ y, en la segunda, $x-y=z$. Usando integración por partes es claro que

$$\int_0^\infty\left(e^{-ny}\int_0^y\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^n dz\right)dy=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-ny}\left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right)^n dy$$

y, por tanto, denotando por I la integral a evaluar, deducimos la relación

$$I=\frac{2}{n}\int_0^\infty e^{-ny}\left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right)^n dy.$$

Usando la identidad $(1-z)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-1+j}{j} z^n$, válida para $|z| < 1$, concluimos el resultado. En efecto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-1+j}{j} \int_0^{\infty} y^n e^{-(n+j)y}\, dy \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-1+j}{j} \frac{n!}{(n+j)^{n+1}} \\ &= 2 \sum_{j=1-n}^{\infty} \frac{(n+j)(n+j-1)\cdots(j+1)}{(n+j)^{n+2}} \\ &= 2 \sum_{j=1-n}^{\infty} \frac{1}{(n+j)^{n+2}} \sum_{i=0}^{n} s(n,i)(n+j)^i \\ &= 2 \sum_{i=0}^{n} s(n,i) \sum_{j=1-n}^{\infty} \frac{1}{(n+j)^{n+2-i}} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} s(n,i)\zeta(n+2-i), \end{aligned}$$

ya que $s(n,0) = 0$.

También resuelto por R. Dutta y C. Thompson (conjuntamente), L. Glasser y el proponente.

PROBLEMA 285. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sean a, b, c números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Probar que

$$54abc \leq (a+b+c)^2(a+b+c+9).$$

Solución enviada por Luis Crespo Ruiz (estudiante), Universidad de Cantabria, Santander.

La desigualdad propuesta puede reescribirse como

$$(a+b+c)^3 + 9(a+b+c)^2 \geq 54abc. \tag{1}$$

En primer lugar, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, se tiene

$$(a+b+c)^3 = 27\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq 27abc. \tag{2}$$

Por otra parte, de la desigualdad $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ se deduce inmediatamente que

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned} 9(a+b+c)^2 &= 9(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)) \\ &\geq 27(ab+bc+ca) = 27abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 27abc. \end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto, la desigualdad (1) se sigue como consecuencia de (2) y (3). Además, debemos señalar que la igualdad ocurre si y solo $a=b=c=3$.

Solución enviada por Javier Duoandikoetxea Zuazo, Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya.

Sean

$$S = a+b+c, \qquad C = ab+bc+ca \qquad \text{y} \qquad P = abc.$$

El polinomio $q(x) = x^3 - Sx^2 + Cx - P$ tiene tres raíces reales, por lo que su derivada $q'(x) = 3x^2 - 2Sx + C$ tiene dos raíces reales. Luego se verifica que $S^2 - 3C \geq 0$; es decir, $C \leq S^2/3$.

Cambiando x por $1/x$ en q, deducimos que el polinomio $r(x) = 1 - Sx + Cx^2 - Px^3$ también tiene tres raíces reales, así que $r'(x) = -S + 2Cx - 3Px^2$ tiene dos raíces reales. Por tanto, $C^2 - 3PS \geq 0$ y

$$P \leq \frac{C^2}{3S} \leq \frac{S^3}{27}.$$

(Notar que $P \leq S^3/27$ es la conocida desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.)

De las desigualdades obtenidas para P y C deducimos

$$P + C \leq \frac{S^2(S+9)}{27}.$$

Como la condición $1/a + 1/b + 1/c = 1$ implica $P = C$, la desigualdad propuesta se sigue de manera inmediata.

También resuelto por D. Armesto, V. Codreanu, A. Fanchini, Kee-Wai Lau, R. Peiró, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler, N. Stanciu, N. Zlota y el proponente. Se han recibido dos soluciones incompletas.

Nota. N. Stanciu observa que el Problema 285 es, en realidad, equivalente al Problema 1291 de la revista *The Pi Mu Epsilon Journal.* Efectivamente, esto es correcto y la diferencia entre ambos enunciados fue una modificación realizada por los editores con objeto de simplificar el enunciado recibido. Rogamos a los proponentes que eviten enviar un mismo problema a distintas publicaciones al mismo tiempo.

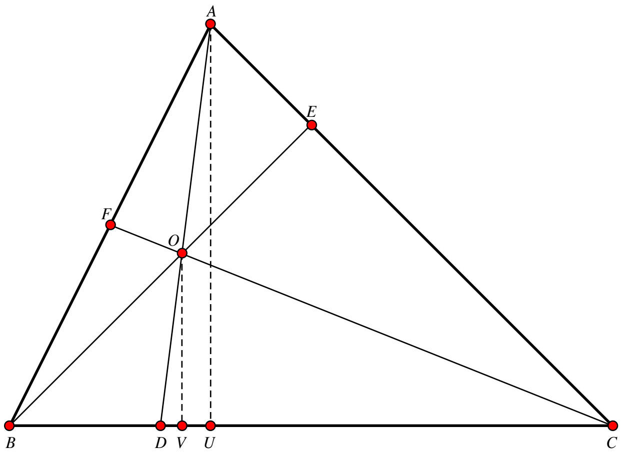

Figura 2: Esquema para la primera solución del Problema 286.

PROBLEMA 286. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Sean D y E, respectivamente, puntos en los lados BC y AC de un triángulo ABC. Sean O el punto de intersección de las rectas AD y BE y F el punto de intersección de CO y AB. Si

$$\frac{DO}{OA} = p, \qquad \frac{EO}{OB} = q \qquad \text{y} \qquad \frac{FO}{OC} = r,$$

¿qué relación existe entre p, q y r?

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

Sean U y V, respectivamente, los pies de las perpendiculares desde A y O a BC, ver figura 2. Al tener los triángulos ABC y OBC la misma base BC, sus áreas son entre sí como sus alturas; es decir,

$$\frac{\text{Área}(\triangle OBC)}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{OV}{AU}.$$

Teniendo en cuenta que los triángulos AUD y OVD son semejantes tenemos que $OV/AU = DO/DA$ y, por tanto,

$$\frac{\text{Área}(\triangle OBC)}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{DO}{DA}.$$

De manera análoga se deducen las relaciones

$$\frac{\text{Área}(\triangle OCA)}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{EO}{EB} \qquad \text{y} \qquad \frac{\text{Área}(\triangle OAB)}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{FO}{FC},$$

que implican

$$\frac{DO}{DA}+\frac{EO}{EB}+\frac{FO}{FC}=\frac{\text{Área}(\triangle OBC)+\text{Área}(\triangle OCA)+\text{Área}(\triangle OAB)}{\text{Área}(\triangle ABC)}=1, \qquad (1)$$

ya que por ser O un punto interior del triángulo ABC se verifica que $\text{Área}(\triangle OBC)+\text{Área}(\triangle OCA)+\text{Área}(\triangle OAB)=\text{Área}(\triangle ABC)$.

Como

$$\frac{DO}{DA}=\frac{DO}{DO+OA}=\frac{\frac{DO}{OA}}{\frac{DO}{OA}+1}=\frac{p}{p+1}, \quad \frac{EO}{EB}=\frac{EO}{EO+OB}=\frac{\frac{EO}{OB}}{\frac{EO}{OB}+1}=\frac{q}{q+1}$$

y

$$\frac{FO}{FC}=\frac{FO}{FO+OC}=\frac{\frac{FO}{OC}}{\frac{FO}{OC}+1}=\frac{r}{r+1},$$

usando (1) obtenemos la relación

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q}{q+1}+\frac{r}{r+1}=1,$$

que puede reescribirse como

$$2pqr+pq+qr+rp=1.$$

Solución enviada (independientemente) por Ricard Pieró, I. E. S. Abastos, Valencia, Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía y Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía, y Daniel Văcaru, Pitesti, Rumanía.

Usando la notación

$$x=\frac{CE}{EA}, \qquad y=\frac{AF}{FB} \qquad \text{y} \qquad z=\frac{BD}{DC},$$

el teorema de Ceva aplicado a las cevianas AD, BE y CF del triángulo ABC implica que $xyz=1$. Ahora, aplicando el teorema de Van Aubel a las cevianas citadas tenemos las relaciones

$$\frac{OA}{DO}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}, \qquad \frac{OB}{EO}=\frac{FB}{AF}+\frac{BD}{DC} \qquad \text{y} \qquad \frac{OC}{FO}=\frac{CE}{EA}+\frac{DC}{BD},$$

que escritas en términos de p, q, r, x, y y z se transforman en

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+y, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{y}+z \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{z}+x.$$

Al sumar y multiplicar las tres expresiones anteriores llegamos a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad \frac{1}{pqr}=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right),$$

que, junto a la relación $xyz=1$, implican

$$2pqr+pq+qr+rp=1.$$

También resuelto por C. Beade, R. S. Elexpuru, A. Fanchini, Kee-Wai Lau, J. Mir, B. Salgueiro y el proponente.

NOTA. La ecuación (1) que aparece en la primera solución es también utilizada del mismo modo por C. Beade en la suya. Beade la atribuye a Gergonne y da una pincelada de la demostración. En la página web `http://www.cut-the-knot.org/triangle/Gergonne.shtml` el resultado también se asocia a Gergonne y la prueba es similar a la que hemos incorporado en la primera solución.

El teorema de Van Aubel mencionado en la segunda solución es una relación aditiva entre las longitudes de ciertos segmentos de las cevianas de un triángulo. Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Ceva y puede verse una demostración detallada del mismo en la página web citada en el párrafo anterior.

PROBLEMA 287. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño, La Rioja.*

Sea f una función real definida y continua en $[0,1]$ y tal que $f(0)=f(1)$. Digamos que un número real positivo t es un *paso* para f si hay dos puntos en su dominio separados una distancia t en los que la función toma el mismo valor. Para este tipo de funciones, en el Problema 19 del Capítulo 7 del clásico *Calculus* de M. Spivak (Ed. Reverté, 2.ª ed.), se prueba que $t=1/n$ es siempre un *paso*.

a) Demostrar que el conjunto de pasos de f es un cerrado cuya medida de Lebesgue es mayor o igual que $1/2$.

b) Encontrar una sucesión de funciones f_n de modo que, para cualquier n, el conjunto de pasos de f_n mide exactamente $1/2$ y tiene intersección vacía con el intervalo $\big(1/(n+1), 1/n\big)$.

Solución elaborada por los editores a partir de las enviadas por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca, y el proponente.

Pese a que el enunciado considera únicamente pasos positivos, conviene aceptar también 0 como un paso trivial de toda función, lo que no afecta a la cuestión en lo relativo a la medida (además, de no hacerse así el enunciado debería aclarar que el conjunto de pasos para una función es cerrado en $(0,+\infty)$, o en $(0,1]$).

a) Consideremos el conjunto compacto

$$\Delta = \{(x,t) : x \geq 0, t \geq 0, x+t \leq 1\}$$

y la función $h(x,t) = f(x+t) - f(x)$ definida en Δ. El conjunto $C = h^{-1}(\{0\})$ es cerrado, por ser h una función continua. Así, como la proyección $\pi\colon \Delta \to [0,1]$ dada por $\pi(x,t) = t$ es cerrada por el lema de la función cerrada, podemos afirmar que $\pi(C)$, que es el conjunto de pasos de f, es un conjunto cerrado.

Para probar la segunda afirmación utilizaremos el siguiente hecho.

LEMA. *Sea $A = \{t \in [0,1] : t \text{ es un paso de } f\}$. Si $t \in [0,1]$, entonces $t \in A$ o $1-t \in A$.*

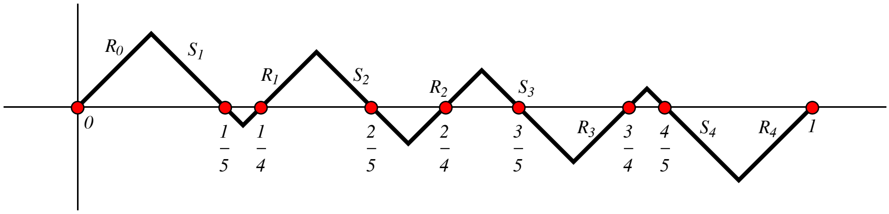

Figura 3: La función f_n del apartado b) del Problema 287 para el caso $n = 4$ y sus segmentos.

Demostración. Sean M y m el máximo y el mínimo valor, respectivamente, de la imagen de f y sean x_M y x_m tales que $M = f(x_M)$ y $m = f(x_m)$. Denotaremos por $\tilde{f}$ a la extensión continua y 1-periódica de f a toda la recta real.

Sea $t \in [0, 1]$. Considerando la función $f_t(x) = \tilde{f}(x + t) - \tilde{f}(x)$, resulta que $f_t(x_M) \leq 0$ y $f_t(x_m) \geq 0$. Así, por el teorema de Bolzano, existe x en $[0, 1]$ tal que $f_t(x) = 0$, es decir $\tilde{f}(x+t) = \tilde{f}(x)$. Ahora, si $t+x \leq 1$ tenemos que $f(x+t) = f(x)$, y t es un paso de f. En el caso $t + x \geq 1$, como

$$\tilde{f}(x + t) = f(x + t - 1) \qquad \text{y} \qquad \tilde{f}(x) = f(x),$$

tomando $y = x + t - 1$ resulta que $f(y) = f(y + 1 - t)$ y $1 - t$ es un paso de f. □

Por tanto, usando el lema anterior, tendremos que $[0, 1] = A \cup (1 - A)$ y, si m es la medida habitual de Borel-Lebesgue, podemos concluir que

$$1 \leq \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(1 - A) = 2\,\mathrm{m}(A)$$

y $\mathrm{m}(A) \geq 1/2$.

b) Para cada n natural definimos f_n como sigue (el caso $n = 4$ aparece en la figura 3): f_n se anula exactamente en los puntos

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} < 1,$$

es positiva en $\big(k/n, (k+1)/(n+1)\big)$ para cada $k = 0, \ldots, n-1$, negativa en $(k/(n+1), k/n)$ para cada $k = 1, \ldots, n$, su gráfica es una poligonal con un extremo local en cada uno de dichos intervalos, tiene pendiente 1 en $x = k/n$ $(k = 0, \ldots, n)$ y -1 en $x = k/(n+1)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Dados dos segmentos de la gráfica, pongamos R y S, llamaremos $A(R, S)$ al conjunto de pasos t dados por puntos de la gráfica de igual ordenada, uno en R y otro en S (t es la distancia entre ellos). Llamando R_k $(k = 0, \ldots, n)$ al segmento de la gráfica de pendiente 1 que contiene a $\big(k/n, 0\big)$ y S_k $(k = 1, \ldots, n)$ al de pendiente -1 que contiene a $\big(k/(n + 1), 0\big)$ (en la figura 3 también se muestran los segmentos R_k y S_k asociados con f_4), es claro que la unión de $A(R_k, R_j)$ y $A(S_k, S_j)$ es el conjunto de los múltiplos de $1/n$ y de $1/(n + 1)$ dentro de $[0, 1]$.

Ahora, es fácil ver que $A(R_0, S_k) = [(k-1)/n, k/(n+1)]$ para $k = 1, \ldots, n$. Con esto obtenemos todos los pasos de f_n, pues el resto de casos se reducen a este, como justificamos a continuación según esté S a la derecha o a la izquierda de R. Por un lado resulta claro que $A(R_j, S_{j+k}) = A(R_0, S_k)$ si $k \geq 1$. Por otro lado, la simetría respecto al punto $(1/2, 0)$ nos dice que $A(R_{k+j}, S_k) = A(R_{n-j-k}, S_{n+1-k})$ si $j \geq 0$ y, como $n+1-k = (n-j-k)+1+j$, concluimos que $A(R_{k+j}, S_k) = A(R_0, S_{1+j})$.

Resulta, en definitiva, que el conjunto de pasos de f_n es

$$\bigcup_{k=1}^{n} A(R_0, S_k) \cup \{1\} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n+1}\Big],$$

precisamente el conjunto en el que $f_n \geq 0$, que mide $1/2$ y no corta al intervalo $(1/(n+1), 1/n)$.

No se han recibido otras soluciones.

PROBLEMA 288. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right)^2.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Denotando por S la suma propuesta, probaremos que

$$S = 6 - 2\log 2 - 2\log^2 2 - \frac{2}{3}\log^3 2 - \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2}\log 2 + \zeta(3). \tag{1}$$

Para cada entero positivo M, definimos

$$H_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad S_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n(2n+1)} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right)^2.$$

Mediante un argumento de inducción, usando la identidad

$$H_{2M+1} - H_M = H_{2M+3} - H_{M+1} + \frac{1}{2(M+1)(2M+3)},$$

puede probarse que

$$S_M = 6 + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{2M+1} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} \frac{H_n}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{M} \frac{H_n}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^3}$$

$$-2\sum_{n=1}^{2M+1}\frac{H_n}{n^2}-2(H_{2M+1}-H_M)-2(H_{2M+1}-H_M)^2-\frac{2}{3}(H_{2M+1}-H_M)^3.$$

Por otra parte, de la igualdad asintótica

$$H_M=\log M+\gamma+O(M^{-1}),\qquad M\to\infty,$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, se deduce que $\lim_{M\to\infty}(H_{2M+1}-H_M)=\log 2$. Así, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, la prueba de (1) se sigue como consecuencia de las identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\zeta(3) \tag{2}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}=\frac{7\zeta(3)-\pi^2\log 2}{4}. \tag{3}$$

Una demostración de (2) puede encontrarse en [1, pág. 206]. Para probar (3) partimos de la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n=-\frac{\log(1-x)}{1-x},\qquad x\in(-1,1), \tag{4}$$

y de ella obtenemos fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}=-\int_0^1\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\log(1-t^2)}{1-t^2}\,dt\,dx=\int_0^1\frac{\log x\log(1-x^2)}{(1-x^2)}\,dx,$$

donde la última identidad se deduce aplicando integración por partes. Ahora, usando *Mathematica* podemos comprobar que

$$\int_0^1\frac{\log x\log(1-x^2)}{(1-x^2)}\,dx=\frac{7\zeta(3)-\pi^2\log 2}{4} \tag{5}$$

y la demostración de (3) queda completada.

Referencias

[1] O. Furdui, *Limits, Series, and Fractional Part Integrals*, Springer, Nueva York, 2013.

También resuelto por R. Dutta, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

Nota. Como comenta el autor de la solución publicada, la demostración de la identidad (2) que aparece en la solución presentada para el Problema 288 puede encontrarse en [1], pero nos parece adecuado dar una prueba de la misma basada en la identidad (4). En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=\zeta(3)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2}=\zeta(3)-\int_0^1\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\log(1-t)}{1-t}\,dt\,dx$$

$$= \zeta(3) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2(1-x)}{x}\,dx = \zeta(3) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 s}{1-s}\,ds$$
$$= \zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 s^n \log^2 s\,ds = \zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(n+1)r} r^2\,dr = 2\zeta(3).$$

Asimismo, creemos necesario dar una prueba de la identidad (5) ya que es, probablemente, la pieza fundamental para obtener la solución del problema. El hecho de que la integral esté evaluada con *Mathematica* no permite apreciar las dificultades que encierra su cálculo. La demostración de (5) que vamos a presentar está basada en ideas tomadas de las soluciones remitidas por R. Dutta y A. Stadler.

Si denotamos por J la integral en (5), es claro que

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\log x\log(1+x)}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log x\log(1-x)}{1-x}\,dx \right.\\ &\qquad \left. + \int_0^1 \frac{\log x\log(1-x)}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log x\log(1+x)}{1-x}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-\int_0^1 \frac{\log^2(1+x)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log^2(1-x)}{x}\,dx\right)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\log x\log(1-x)}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log x\log(1+x)}{1-x}\,dx\right), \end{aligned}$$

donde en las dos primeras integrales hemos aplicado integración por partes. Usando de nuevo integración por partes, con $u = \log x\log(1-x)$ y $v = \log(1+x)$, deducimos que

$$\int_0^1 \frac{\log x\log(1-x)}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\log(1-x)\log(1+x)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log x\log(1+x)}{1-x}\,dx$$

y, de este modo,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4}\left(-\int_0^1 \frac{\log^2(1+x)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log^2(1-x)}{x}\,dx\right)\\ &\qquad - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1-x)\log(1+x)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log x\log(1+x)}{1-x}\,dx\\ &=: \frac{1}{4}(-J_1 + J_2) - \frac{1}{2}J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Ahora, debemos observar que

$$J_1 + 2J_3 + J_2 = \int_0^1 \frac{\log^2(1-x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2(1-t)}{t}\,dt = \frac{J_2}{2}$$

y, haciendo el cambio de variable $\frac{1-x}{1+x} = y$,

$$J_1 - 2J_3 + J_2 = \int_0^1 \log^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = 2\int_0^1 \frac{\log^2 y}{1-y^2}\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1 y^{2j}\log^2 y\,dy = 2\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(2j+1)r}r^2\,dr\\
&= 4\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7}{2}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

Como puede deducirse de la prueba que hemos dado para (2), $J_2 = 2\zeta(3)$ y, por tanto, de las relaciones anteriores concluimos que $J_1 = \zeta(3)/4$ y $J_3 = -5\zeta(3)/8$.

Veamos ahora cómo evaluar J_4. Usando desarrollos en serie de potencias y la notación $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} 1/j^2$, se tiene

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{n+m}\log x\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m+1)^2}\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\zeta(2)-H_n^{(2)}) = -\zeta(2)\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n^{(2)}}{n}\\
&= -\zeta(2)\log 2 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{nj^2}\\
&= -\zeta(2)\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{nj^2}\\
&= -\zeta(2)\log 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j-1}}{(k+j)j^2}\\
&= -\zeta(2)\log 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+j-1}\left(\frac{1}{kj^2} - \frac{1}{kj(k+j)}\right)\\
&= -\frac{3}{2}\zeta(2)\log 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j-1}}{kj(k+j)}.
\end{aligned}
$$

Con la notación

$$
W' = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j-1}}{kj(k+j)} \qquad \text{y} \qquad W = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kj(k+j)},
$$

como, por (2),

$$
W = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+j)} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{H_j}{j^2} = 2\zeta(3),
$$

probando la relación

$$
W' = \frac{1}{4}(W - 3\zeta(3)) \tag{6}
$$

tendremos

$$
J_4 = -\frac{\pi^2}{4}\log 2 + \zeta(3)
$$

y, de este modo,

$$J = \frac{1}{4}(-J_1 + J_2) - \frac{1}{2}J_3 + J_4 = \frac{7\zeta(3) - \pi^2 \log 2}{4},$$

lo que concluye la demostración de (5).

Para probar (6) comenzaremos con la identidad

$$1 + (-1)^j + (-1)^k + (-1)^{m+k} = (1 + (-1)^j)(1 + (-1)^k) = \begin{cases} 4, & \text{si } j \text{ y } k \text{ son pares,} \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

entonces

$$W = 2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^j + (-1)^k + (-1)^{m+k}}{kj(k+j)} = 2W + 4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{kj(k+j)} - 2W'. \tag{7}$$

Y finalmente, como

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{kj(k+j)} &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{H_j}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{n^3} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{H_{j-1}}{j^2} \\
&= -\frac{3}{4}\zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j-k}\right) \\
&= -\frac{3}{4}\zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} \frac{(-1)^j}{kj(j-k)} \\
&= -\frac{3}{4}\zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{kj(j-k)} \\
&= -\frac{3}{4}\zeta(3) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{kn(k+n)} = -\frac{3}{4}\zeta(3) - \frac{W'}{2},
\end{aligned}$$

de (7) obtenemos (6).