La Gaceta de la RSME, Vol. 7.2 (2004), Págs. 371–386 371

Las dos culturas de las matemáticas

por

W. T. Gowers[1]

Reproducimos a continuación el texto “Las dos culturas de las matemáticas” del medallista Fields W.T. Gowers. En este ensayo Gowers defiende, aun sin animo de discutir cúales son las matemáticas más valiosas, que la combinatoria posee las características que habitualmente se suelen mencionar a la hora de describir las disciplinas matemáticas más abstractas y profundas.

El texto fue publicado originalmente por la IMU en *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, V.I. Arnold, M. Atiyah, P. Lax y B. Mazur (eds.), AMS, 1999. La La Gaceta de la RSME desea manifestar su agradecimiento a la IMU, a la AMS y a W.T. Gowers por los permisos editoriales para su traducción y publicación.

La fotografia de T.W. Gowers fue tomada por el fotografo Marc Atkins y formó parte de su exposición “Faces of Mathematicians”. Se puede encontrar más información sobre dicha muestra en: `www.ma.hw.ac.uk/ñdg/fom.html`.

W.T. Gowers

En su famosa conferencia Rede de 1959, que llevaba por título “Las dos culturas”[2], C. P. Snow alertaba sobre la perniciosa falta de comunicación entre la ciencia y las humanidades y criticaba en particular a la gente de letras por su poca comprensión de la ciencia. Uno de los pasajes más interesantes llamaba la atención sobre la falta de simetría que todavía existe, aunque suavizada, cuarenta años después:

> Con frecuencia he asistido a reuniones de personas consideradas de gran cultura que mostraban ostentosamente su incredulidad ante la

[1]La obra matemática de W.T. Gowers incluye varias contribuciones importantes en la teoría de los espacios de Banach y en combinatoria. Es profesor de la Universidad de Cambridge y, entre otros, ha recibido el premio de la Sociedad Europea Matemática (1996) y la Medalla Fields (1998). Para más información puede visitarse su pagina *web*: `http://www.dpmms.cam.ac.uk/site2002/People/gowers_wt.html`

[2]Traducción española en Alianza Editorial, Madrid, 1977.

> falta de educación literaria de los científicos. Una o dos veces me he sentido provocado y he preguntado a los reunidos cuántos de ellos serían capaces de describir la Segunda Ley de la Termodinámica. La repuesta, además de fría, ha sido también negativa. Sin embargo, no preguntaba más que el equivalente literario de algo como: *¿Han leído algo de Shakespeare?*

En mi opinión se observa un fenómeno sociológico similar en la matemática pura, lo cual no es una situación del todo saludable. Las "dos culturas" de las que quiero hablar son conocidas por cualquier matemático profesional. De modo impreciso, me refiero a la distinción entre los matemáticos cuyo objetivo central es resolver problemas y aquellos más interesados en construir y comprender teorías. Esta diferencia ha sido observada por muchos otros y no pretendo que se me reconozca ninguna prioridad. Como la mayoría de las clasificaciones, ésta cae en la simplificación, pero aun así resulta útil. Si usted no está seguro de a qué clase pertenece, considere las dos afirmaciones siguientes.

1. La finalidad de resolver problemas es comprender mejor las matemáticas.
2. La finalidad de comprender las matemáticas es estar más capacitados para resolver problemas.

La mayoría de los matemáticos dirán que hay algo de verdad tanto en (i) como en (ii). No todos los problemas tienen el mismo interés y una manera de reconocer los más interesantes es mostrar que mejoran nuestra comprensión global de las matemáticas. Del mismo modo, si alguien pasa años y años luchando para entender un área difícil de las matemáticas pero después no hace nada con ello, ¿qué interés tiene? Sin embargo, muchos matemáticos, y quizá la mayoría, no compartirán con igual fuerza las dos afirmaciones. Desde luego, no Sir Michael Atiyah, tal como reflejaba una entrevista de 1984 [A1].

> MINIO: ¿Cómo selecciona usted un problema de estudio?
> ATIYAH: Su pregunta presupone una respuesta. No creo que ésta sea en absoluto la forma en que trabajo. Hay quien piensa: "Quiero resolver este problema", y se sienta y dice: "¿Cómo resuelvo este problema?" Yo no. Simplemente me muevo entre las aguas matemáticas, pienso en cosas, soy curioso, me intereso, hablo con la gente, doy vueltas a las ideas; entonces surge algo y yo lo sigo. O quizá veo algo que conecta con algo que conozco, intento ponerlo junto y se desarrolla. Prácticamente nunca he empezado con una idea de lo que voy a hacer o de dónde me va a llevar. Me interesan las matemáticas; hablo, aprendo, discuto y simplemente surgen preguntas interesantes. Nunca he empezado con un fin particular, excepto el de entender las matemáticas.

La entrevista apareció por primera vez en la revista *The Mathematical Intelligencer* y más tarde se reimprimió en el apartado general de las obras reunidas de Atiyah. Recomiendo mucho sus ensayos y conferencias sobre matemáticas a cualquiera que desee reflexionar sobre el significado de las matemáticas; me referiré a ellos más adelante en este artículo.

Otra persona que no habría otorgado el mismo peso a las dos afirmaciones es Paul Erdős, que legó al mundo una cantidad enorme de problemas fascinantes, así como soluciones a muchos otros, pero al que no asociamos en la misma medida con el desarrollo teórico. Lo cual no niega que Erdős intentase entender las matemáticas: la mayoría de los que han resuelto un problema de Erdős (¡ay!, no soy uno de ellos) pueden dar fe de que, el pensar duro y duro en ellos les ha llevado por sendas inesperadamente fructíferas y a darse cuenta de que el problema era algo más que la curiosidad divertida que podía parecer en un principio. Así que cuando digo que los matemáticos pueden clasificarse en los que construyen teorías y los que resuelven problemas, estoy hablando sobre sus *prioridades*, más que sosteniendo la ridícula afirmación de que se dedican exclusivamente a una u otra actividad.

Es evidente que las matemáticas necesitan ambas clases de matemáticos (como afirma el propio Atiyah al final de [A2]). Es igualmente evidente que no todos los campos de las matemáticas requieren las mismas aptitudes. En la teoría algebraica de números, o en el conglomerado de temas que ahora llamamos simplemente Geometría, parece importante por varias razones (al menos a un lego como yo, sin autoridad para lo que estoy diciendo) adquirir una experiencia y unos conocimientos considerables sobre el trabajo de otros matemáticos, ya que el progreso en estas áreas se consigue a menudo combinando hábilmente una amplia gama de resultados conocidos. Y más aún, si uno selecciona un problema, trabaja en él aisladamente durante unos años y acaba por resolverlo, existe el riesgo de que, a menos de que sea un problema famoso, haya dejado de ser relevante.

En el otro extremo está, por ejemplo, la teoría de grafos, en la que el objeto básico, un grafo, se entiende enseguida. En teoría de grafos no se llega a ninguna parte sentándose en un sillón e intentando *entender mejor los grafos*. Tampoco es especialmente necesario leer mucho antes de atacar un problema: desde luego, tener en cuenta alguna de las técnicas básicas ayuda, pero los problemas interesantes tienden a estar abiertos precisamente porque las técnicas conocidas no se aplican fácilmente.

Quisiera mencionar brevemente una asimetría parecida a la que C. P. Snow señalaba con tanta energía. Se trata de que los temas que atraen a los que construyen teorías están actualmente mucho más de moda que los que atraen a los que resuelven problemas. Además, los matemáticos en las áreas de construcción de teorías suelen considerar lo que hacen como el núcleo (Atiyah usa exactamente esta expresión) de las matemáticas, mientras que temas como la combinatoria les parecen periféricos y no especialmente relevantes para los objetivos principales de las matemáticas. Casi podemos imaginarnos una reunión de matemáticos de gran formación mostrando su incredulidad frente a la ignorancia de los combinatorialistas, la mayoría de los cuales no serían capaces de decir nada inteligente sobre grupos cuánticos, simetría especular, variedades de Calabi-Yau, la ecuación de Yang-Mills, solitones o incluso cohomología. Si un combinatorialista interrumpiera la reunión y preguntara cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pueden hallarse, aproximadamente, tales que la diferencia simétrica de dos cualesquiera de ellos sea de tamaño al menos $n/3$, la respuesta podría ser más bien gélida. (El problema es fácil sólo si se conoce la técnica adecuada, que es elegir los conjuntos al azar y demostrar que la probabilidad de que la diferencia simétrica de dos cualesquiera de ellos tenga tamaño menor que $n/3$ es exponencialmente pequeña. De modo que la respuesta es e^{cn} para alguna constante $c > 0$).

Pretendo defender aquí algunos de estos temas menos de moda frente a las críticas que se les suele hacer. Centraré mi atención sobre todo en la combinatoria, que es el área que mejor conozco. Sin embargo, lo que diré se aplica también a otras áreas. Me refiero a la "combinatoria" no en el sentido convencional, sino como un término general para designar problemas que pueden atacarse razonablemente de forma más o menos elemental (es más una cuestión de matiz que una distinción absoluta). Problemas que no tienen por qué ser de naturaleza discreta o tener mucho que ver con contar. De todos modos, este tipo de matemáticas y la combinatoria en sentido covencional tienen bastante en común.

¿Por qué habrían de ser menos apreciados los temas de resolución de problemas que los teóricos? Para responder a esta pregunta, hemos de considerar otra más fundamental: ¿qué hace que un resultado matemático sea más interesante que otro? Una vez más, Atiyah es muy claro y sensato en esta cuestión (al mismo tiempo que reconoce su deuda con grandes matemáticos de tiempos pasados como Poincaré y Weyl). Afirma (véase, por ejemplo, [A2]) que se produce tanta matemática que no es posible recordarla toda. De ahí la importancia de los procesos de abstracción y generalización para dar sentido a la enorme masa de datos brutos (es decir, demostraciones de teoremas individuales) y permitir que al menos algo de ello perviva. Los resultados que permanecerán son los que pueden organizarse coherentemente y explicarse económicamente a las generaciones futuras de matemáticos. Por supuesto, algunos resultados serán recordados porque resuelven problemas muy famosos, pero incluso éstos, si no encajan en un marco general, es probable que no sean estudiados más que por un puñado de matemáticos.

Por lo tanto, es útil pensar no tanto en el interés intrínseco de un resultado matemático, como en cuán efectivamente puede ser transmitido ese resultado a otros matemáticos, tanto presentes como futuros. Muchos piensan que la combinatoria consiste en un gran número de problemas y resultados aislados, y por lo tanto que se encuentra en desventaja en este aspecto. Cada resultado individual puede requerir una enorme cantidad de ingenio, pero la gente ingeniosa existe, especialmente en Hungría, y las generaciones futuras de combinatorialistas no tendrán el tiempo o las ganas para leer y admirar más que una pequeña parte de su producción.

Déjenme que intente responder a estas críticas. Ciertamente, no es frecuente en combinatoria que alguien descubra un enunciado muy general que de repente sitúe un gran número de resultados existentes en el contexto adecuado. También es cierto que muchos de los resultados de la combinatoria parecen algo aislados y serán olvidados completamente (pero esto no distingue a la combinatoria de cualquier otra rama de las matemáticas). Sin embargo, no es cierto que el tema carezca por completo de estructura. La razón por la que a muchos matemáticos la combinatoria les parece simplemente una amalgama de problemas individuales es que los principios organizativos son menos explícitos.

Si los procesos de abstracción y generalización, tan importantes en matemáticas, sólo tienen un uso limitado en combinatoria, ¿cómo podrá transmitirse ésta a las generaciones futuras? Una manera de enfocar la cuestión es preguntarse cuáles serán probablemente los requisitos de los combinatorialistas del mañana. Como ya he dicho, su prioridad será seguramente la de resolver problemas, así que su interés por un resultado actual estará muy condicionado por si, al entenderlo, mejora su propia capacidad para resolver problemas. Y esto nos lleva directamente al núcleo del asunto. Las ideas importantes en combinatoria no suelen tomar la forma de teoremas enunciados con precisión, sino más bien la de principios de gran aplicabilidad.

Un ejemplo nos ayudará a entender mejor la cuestión. El teorema de Ramsey puede enunciarse de la siguiente forma.

Teorema 1. *Para todo entero positivo k existe un entero positivo N tal que, si asignamos color rojo o azul a cada una de las aristas del grafo completo de N vértices, entonces existen k vértices tales que todas las aristas que los unen tienen el mismo color.*

Denotamos por $R(k)$ el menor entero N que lo cumple.

El siguiente argumento demuestra que $R(k) \leq 2^{2k}$. Sea G un grafo con 2^{2k} vértices y supongamos por conveniencia que los vértices están totalmente ordenados. Sea x_1 el primer vértice. Entonces, por el principio de las casillas, existe un conjunto de vértices A_1 de tamaño al menos 2^{2k-1} tal que todas las aristas de x_1 a A_1 tienen el mismo color. Sea ahora x_2 el último vértice de A_1. De nuevo por el principio de las casillas, existe un conjunto $A_2 \subset A_1$ de tamaño al menos 2^{2k-2} tal que todas las aristas de x_2 a A_2 tienen el mismo color. Continuando este proceso obtenemos una sucesión $x_1, \ldots, x_{2k}$ de vértices y una sucesión $A_1 \supset \cdots \supset A_{2k}$ de conjuntos, con $x_i \in A_{i-1}$ para todo i, tales que todas las aristas de x_i a A_i tienen el mismo color. Resulta que el color de la arista que une x_i con x_j depende sólo de $\min\{i, j\}$. De nuevo por el principio de las casillas, podemos hallar un subconjunto H de $\{x_1, \ldots, x_{2k}\}$ de tamaño al menos k tal que este color es siempre el mismo, de modo que todas las aristas que unen vértices de H tienen el mismo color.

Una ligera variante de lo anterior rebaja la cota a $\binom{2k}{k}$. Sin embargo, me interesan más las cotas *inferiores* para $R(k)$. Uno de los resultados más famosos de Erdős es que $R(k) \geq 2^{k/2}$ y se demuestra así. En lugar de buscar una coloración adecuada, simplemente coloreamos las aristas al azar del modo más evidente. Es decir, cada arista es roja con probabilidad 1/2 y azul con probabilidad 1/2, y las elecciones son todas independientes. Sea N el número de vértices y sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un conjunto con k vértices. La probabilidad de que cada x_i esté unido a cada x_j con una arista roja es $2^{-\binom{k}{2}}$, la misma de que todos estén unidos por aristas azules. Por lo tanto, el número esperado de conjuntos de k vértices unidos todos ellos por aristas del mismo color es $2^{1-\binom{k}{2}}\binom{N}{k}$: si es menor que uno, ha de ser posible que no existan tales conjuntos de k vértices. Un cálculo sencillo muestra que es menor que uno cuando $N = 2^{k/2}$.

El resultado de Erdős [E] es famoso no porque tenga muchas aplicaciones, ni porque sea difícil, ni porque resuelva un problema que llevaba tiempo abierto. Su fama reside en el hecho de que abrió las puertas a los argumentos probabilísticos en combinatoria. Si uno entiende el sencillo argumento de Erdős (o alguno de los muchos otros argumentos parecidos) entonces habrá hecho suyo un principio general que podemos enunciar así:

> Si queremos maximizar el tamaño de una estructura bajo ciertas restricciones y si las restricciones parecen obligar a que los ejemplos extremales se distribuyan de manera uniforme en cierto sentido, entonces un ejemplo elegido al azar será, probablemente, una buena respuesta.

Una vez que se toma conciencia de este principio, la capacidad matemática aumenta inmediatamente. Problemas como el que he mencionado antes, el de hallar un número grande de conjuntos con diferencias simétricas grandes entre dos cualesquiera de ellos, de repente pasan de ser imposibles a ser casi triviales.

Desde luego, la combinatoria probabilística es mucho más que estar al acecho para encontrar aplicaciones sencillas del principio anterior. Por ejemplo, uno decide utilizar el método probabilístico y se encuentra con que no es fácil estimar las probabilidades que interesan. Pero se ha trabajado mucho en este campo y se han diseñado muchas técnicas ingeniosas. Algunas de ellas también pueden encapsularse en forma de principios útiles. Uno de ellos es el siguiente, que lleva el nombre de Concentración de la Medida para los amigos:

> Si una función f depende de forma razonablemente continua de un gran número de variables pequeñas, entonces $f(x)$ está casi siempre cerca de su valor esperado.

El primero en darse plenamente cuenta de la importancia de la concentración de la medida fue Vitali Milman en su demostración revolucionaria [M] del siguiente teorema de Dvoretzky [D].

Teorema 2. *Para todo entero positivo k y todo $\epsilon > 0$, existe n tal que todo espacio normado n-dimensional X tiene un subespacio k-dimensional con distancia de Banach-Mazur de ℓ_2^k a lo sumo $1+\epsilon$.*

Esto equivale a decir que podemos hallar vectores $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que

$$\left(\sum_{k=1}^{k} |a_i|^2\right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{k} a_i x_i \right\| \leq (1+\epsilon) \left(\sum_{k=1}^{k} |a_i|^2\right)^{1/2}$$

para toda sucesión de escalares $a_1, \ldots, a_k$. Una manera más geométrica (e incluso más antiintuitiva) de formular el teorema es decir que todo cuerpo convexo simétrico n-dimensional tiene una sección central k-dimensional que contiene un elipsoide k-dimensional B y que está contenido en $(1+\epsilon)B$, y que por lo tanto es casi elipsoidal él mismo.

La forma en que Milman abordó el problema fue elegir un subespacio k-dimensional X al azar. Para ello hay que elegir una medida de probabilidad adecuada, lo cual es posible usando un teorema de Fritz John. Este afirma que existe una base $x_1, \ldots, x_n$ de X que no está excesivamente lejos de ser ortonormal, en el sentido de que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$$

para toda sucesión de escalares $a_1, \ldots, a_n$. Tomamos entonces la medida natural en la grassmaniana $G_{n,k}$ respecto de esta base. (Esto es de hecho una simplificación excesiva, pero aquí no nos importan los detalles).

En el caso de los dos resultados mencionades antes es fácil ver, *a posteriori*, que era razonable usar métodos aleatorios. Pero en este ejemplo nada parece indicar que vayan a funcionar. Al fin y al cabo, uno podría pensar que una sección típica de un cuerpo convexo irregular será también irregular. Sin embargo, si se está familiarizado con la idea de concentración de la medida, se da cuenta de que la norma de un vector $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ depende de muchas variables a_i. Como además sólo estamos interesados en la razón entre esta norma y la norma ℓ_2 $(\sum_{k=1}^{k} |a_i|^2)^{1/2}$, podemos suponer que ninguna de las a_i varía demasiado. Por lo tanto, por concentración de la medida, podemos esperar que la razón entre la norma X y la norma ℓ_2 está casi siempre muy cerca de su valor esperado. Y en este momento la idea de secciones casi elipsoidales deja de ser antiintuitiva.

El principal resultado que necesitamos para hacer preciso el argumento anterior es la siguiente consecuencia de la desigualdad isoperimétrica de Lévy en la esfera. Sea $f\colon S_n \to \mathbb{R}$ una función con mediana M. Sea $A \subset S_n$ el conjunto de los puntos x tales que $f(x) \leq M$. Entonces la probabilidad de que un punto aleatorio de S_n esté a distancia mayor que ϵ de A es a lo sumo $\sqrt{\pi/2}\exp(-\epsilon^2 n/2)$. Si cambiamos f por $-f$ se demuestra también que casi todo y está próximo a un punto x con $f(x) \geq M$. Sea ahora $f(a_1, \ldots, a_n) = \left\| \sum_{n=1}^{k} a_i x_i \right\|$. Puesto que f es razonablemente continua y casi todo punto y está próximo a puntos $x \in A$, resulta que $f(y)$ no es mucho mayor que M. Igualmente, para casi todo y, $f(y)$ no es mucho menor que M.

El teorema de Dvoretzky, especialmente tal como lo demuestra Milman, es un hito en la teoría local (es decir, de dimensión finita) de los espacios de Banach. Aunque compadezco al matemático que no sea capaz de ver su atractivo intrínseco, este atractivo por sí mismo no explica la enorme influencia que ha tenido la demostración, bastante más allá de la teoría de los espacios de Banach, por el hecho de habler inculcado la idea de concentración de la medida en la mente de muchos matemáticos. Se ha publicado una cantidad enorme de artículos que explotan esta idea o que proporcionan nuevas técnicas para demostrar que puede aplicarse.

A continuación menciono algunos otros principios generales, aunque la lista podría ser mucho más larga. No todos tienen la misma importancia y, como ya he dicho, no son enunciados precisos, pero todos ellos han resultado muy útiles.

1. Es evidente que si los sucesos $E_1, \ldots, E_n$ son independientes y tienen probabilidad no nula, entonces con probabilidad no nula suceden todos al mismo tiempo. De hecho, esto puede ser cierto, y útil, incluso si la dependencia entre ellos es muy limitada [EL,J].
2. Todos los grafos están formados básicamente a partir de unas pocas piezas aleatorias y además sabemos cómo se comportan [Sze].
3. Si queremos contar soluciones de una ecuación lineal dentro de un conjunto dado, es suficiente, y a menudo más fácil, estimar los coeficientes de Fourier de la función característica del conjunto.
4. Muchas de las propiedades asociadas con grafos aleatorios son equivalentes y, por lo tanto, pueden tomarse como definiciones razonables de grafos seudoaleatorios [CGW,T].
5. El conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos que son eventualmente cero es a veces un buen modelo de espacio de Banach separable, o al menos nos permite generar hipótesis interesantes.

Lo importante de estos principios no es tanto que sean útiles, lo cual no es especialmente sorprendente, sino que en combinatoria juegan el papel organizador que juegan los teoremas profundos de gran generalidad en áreas más teóricas. Cuando intentamos comprender un resultado, se ahorra mucho tiempo si podemos reducirlo a dos o tres ideas principales. Una vez hecho esto, no siempre es necesario llegar hasta el último detalle. Si estamos familiarizados con los principios generales y algunos ejemplos de cómo aplicarlos, sabemos que si fuera necesario podríamos completar los detalles. Por ejemplo, mi manera de recordar la demostración de Erdős de la cota inferior para $R(k)$ es la siguiente: elegir una coloración al azar y hacer los cálculos evidentes. Otro ejemplo es el siguiente notable resultado de Kashin. [K]

Teorema 3. *Para todo entero positivo n existe una descomposición ortogonal de $\mathbb{R}^{2n}$ (respecto del producto escalar habitual) en dos subespacios n-dimensionales X e Y tal que para todo $x \in X \cup Y$ la razón entre la norma ℓ_1 de x y la norma ℓ_2 de x está entre $c\sqrt{2n}$ y $\sqrt{2n}$, para cierta constante absoluta $c > 0$.*

Hay una prueba de Szarek [Sza] de este teorema que va así (si se conocen las ideas aproximadas correctas): un argumento sencillo sobre volúmenes muestra que casi nada de la bola unidad en ℓ_1^n está contenido en las esquinas (una palabra imprecisa que se refiere a las partes donde la razón entre la norma ℓ_1 y la norma ℓ_2 es pequeña), con lo cual es fácil probar que una descomposción aleatoria funciona.

El siguiente teorema de Roth [R] es un tercer ejemplo.

Teorema 4. *Para todo $\delta > 0$ existe N tal que todo subconjunto de $\{1, 2, \ldots, N\}$ de tamaño al menos δN (es decir, con densidad al menos δ) contiene una progresión aritmética de longitud tres.*

Las demostración condensada es la siguiente. Pasamos a estudiar un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ y consideramos los coeficientes de Fourier de la función característica de A. Si éstos son pequeños (lejos de $\hat{A}(0)$), entonces A es esencialmente aleatorio, de modo que abundan las progresiones de longitud tres. Si no es así, existe un coeficiente grande que nos permite pasar a una subprogresión de $\{1, 2, \ldots, N\}$ donde A tiene densidad mayor.

Dejenme resumir lo que he dicho hasta ahora. He intentado rebatir la idea de que la combinatoria tiene poca estructura y consiste tan sólo en un gran número de problemas. Aunque la estructura es menos aparente que en otras áreas, existe en forma de enunciados generales imprecisos que nos permiten condensar las demostraciones mentalmente y, por lo tanto, resultan más fáciles de recordar y de transmitir a los demás.

Sin embargo, la combinatoria es objeto de otras críticas. Una que he escuchado es que el área no tiene dirección u objectivos de tipo general. Otra es que el área no es especialmente profunda. Una tercera es que no tiene conexiones interesantes con otras partes de las matemáticas (con el "núcleo central" de las matemáticas). Una cuarta es que muchos de los resultados no tienen aplicaciones.

Estas críticas pueden rebatirse de manera parecida. Consideremos en primer lugar la idea de que la combinatoria no tiene objetivos generales. Cito de nuevo la entrevista con Atiyah [A1]:

> Pensaba más en la tendencia actual de la gente a desarrollar áreas enteras de las matemáticas por sí mismas, de manera más bien abstracta. Se dedican simplemente a mariposear. Si se les pregunta

> que persiguen con ello, cuál es la relevancia, con qué se relaciona, veremos que no lo saben.

Atiyah no se refería en especial a la combinatoria, pero lo que dice es algo básico, y es tan importante para los combinatorialistas como para cualquier otro demostrar que hacen algo más que mariposear.

Algunas ramas de las matemáticas están dominadas por unos pocos problemas cuya importancia nadie discute. Muchos resultados pueden justificarse diciendo que ayudan a comprender, aunque sea sólo un poco, la hipótesis de Riemann, la conjectura de Birch-Swinnerton-Dyer, la conjetura de geometrización de Thurston, la conjectura de Novikov o algo por el estilo. Otras ramas de las matemáticas son atractivas por la abundancia de fenómenos misteriosos que exigen una explicación. Pueden ser coincidencias numéricas asombrosas que sugieren una relación profunda entre áreas que aparentemente no tienen nada que ver, argumentos que demuestran resultados interesantes por fuerza bruta y que por lo tanto no son satisfactorios, demostraciones que parecen depender de una serie de accidentes afortunados o de argumentos heurísticos que funcionan pero que es difícil hacerlos rigurosos.

Sería difícil probar que la combinatoria tiene muchos objetivos generales como los que mencionábamos (una excepción podría ser el problema P = NP). Sin embargo, al igual que con frecuencia la verdadera importancia de un resultado en combinatoria no es el resultado en sí mismo, sino algo menos explícito que aprendemos con la demostración, también los objetivos generales de la combinatoria no siempre se enuncian explícitamente. Para ilustrar esta cuestión, dejenme volver al teorema de Ramsey y a las cotas para la funcíon $R(k)$. A pesar de la simplicidad de los argumentos que he dado antes, casi nos dan las mejores cotas conocidas. Más en concreto, el siguiente problema sigue abierto.

Problema 1. *(i) ¿Existe una constante $a > \sqrt{2}$ tal que $R(k) \geq a^k$ para todo k suficientemente grande. (ii) Existe una constante $b < 4$ tal que $R(k) \leq b^k$ para todo k suficientemente grande?*

Para mí, éste es uno de los problemas centrales de la combinatoria y he dedicado muchos meses de mi vida intentando resolverlo sin éxito. Y al mismo tiempo casi me da apuro escribir esto, pues soy consciente de que muchos matemáticos considerarían la pregunta más como un *puzzle* que como un problema matemático serio.

Si este problema me importa tanto es porque estoy convencido (como muchos otros que lo han intentado) de que es muy improbable que pueda resolverse con un argumento ingenioso *ad hoc* adaptado sólo a este problema. (De hecho, me refiero sobre todo a la cota inferior para $R(k)$). Siendo un poco vagos, la demostración de que $R(k) \leq 4^k$ tiene un carácter local, en el sentido de que descarta la mayor parte del grafo y se concentra en entornos pequeños de unos pocos vértices. Una cota mejor parece exigir un argumento más global que involucre a todo el grafo y el modelo adecuado para tal argumento, simplemente no existe en teoría de grafos. En consecuencia, es más que probable que una solución al problema aporte una nueva técnica fundamental.

Uno de los aspectos frustrantes del problema es que, mientras que los métodos probabilistas no dan una cota significativamente mejor que $2^{k/2}$, parece como si no fuera posible mejorar la cota inferior con otros métodos (por ejemplo, partir los vértices en cinco clases y hacer que la probabilidad de que una arista sea roja varíe según que la arista esté dentro de una clase o conecte dos clases distintas). Sin embargo, si uno trata de seguir esta línea de razonamiento, se queda estancado con el análisis de todo tipo de grafos diferentes. Ninguno de ellos es insalvable en sí mismo, pero es difícil perseguirlos todos simultáneamente. Esto me llevó a fantasear con que podría existir una especie de clasificación de coloraciones rojo-azul (o, lo que es lo mismo, de grafos) que nos permitiría resolver el problema comprobando que para cada clase la cota sería inferior a, digamos, $(3.99)^k$.

La idea de clasificar grafos suena extraña al principio, así que permítanme enunciar un resultado que ha sido utilizado una y otra vez. En primer lugar, hemos de definir el concepto de seudoaleatoriedad. Sea G un grafo y sean A y B conjuntos disjuntos de vértices de G. Decimos que el par (A, B) es ϵ-uniforme si existe un número real $\alpha > 0$ tal que, si $A' \subset A$ y $B' \subset B$ son conjuntos de cardinalidad al menos $\epsilon|A|$ y $\epsilon|B|$, respectivamente, el número de aristas que unen A' y B' difiere de $\alpha|A'||B'|$ en, como mucho, $\epsilon|A'||B'|$. Si ϵ es pequeño, esto significa que el grafo bipartito formado por las aristas entre A y B se parece a un grafo aleatorio en el que la probabilidad de una arista es igual a α.

El siguiente resultado es debido a Szemerédi [Sze] y se conoce como lema de uniformidad, o lema de regularidad.

Teorema 5. *Sea G un grafo, $\epsilon > 0$ y k un entero positivo. Existe una constante K, que depende sólo de k y de ϵ, tal que se pueden partir los vértices de G en m conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, con $k \leq m \leq K$, tales que al menos $(1-\epsilon)\binom{m}{2}$ de los pares (A_i, A_j) (con $i < j$) son ϵ-uniformes.*

El lector atento habrá notado que esto es una formulación precisa del principio general (ii) mencionado anteriormente (sin embargo, no todos estos principios pueden hacerse tan precisos).

Aunque el lema de uniformidad de Szemerédi es la herramienta ideal para muchos problemas, desgraciadamente hay muchos otros, como hallar mejores cotas en el teorema de Ramsey, para los que no nos dice nada. Por lo tanto, uno de los objetivos de la teoría de grafos es hallar clasificaciones más detalladas y más refinadas. Otro objetivo, en cierto modo opuesto, es hallar la manera de prescindir del lema de uniformidad de Szemerédi. Un progreso significativo en cualquiera de estos objetivos tendría un impacto correspondiente en la teoría de grafos. (Esto es casi una tautología, ya que una buena medida del progreso es ver si nos permite resolver problemas interesantes).

En general, a medida que ganamos experiencia en resolver problemas en un área como la combinatoria, nos damos cuenta de que hay dificultades que se repiten. Quizá no sea posible expresar estas dificultades en forma de una conjectura enunciada con precisión, así que nos centramos en un problema particular en el que estas dificultades intervienen. El problema cobra entonces una importancia que va más allá de decidir simplemente si la respuesta al problema es sí o es no. Esto explica por qué tantos problemas de Erdős tienen profundidades ocultas.

¿Qué hay acerca de la crítica según la cual la combinatoria es un área poco profunda? Una de las grandes satisfacciones de las matemáticas es, como afirma el dicho, subirnos a las espaldas de los gigantes para alcanzar cimas inimaginables para las generaciones anteriores. Sin embargo, la mayoría de los artículos de combinatoria son autocontenidos, o bien requieren como mucho una pequeña cantidad de conocimientos previos por parte del lector. Compárese esta situación con un teorema de teoría algebraica de números, cuya comprensión puede llevarnos años si uno empieza con los conocimientos de un curso típico de licenciatura.

Esta crítica refleja las distintas prioriades de los que construyen teorías y de los que resuelven problemas. Quien construye teorías tiende a decir que el teorema A es profundo porque usa el teorema B que usa el teorema C, etc., y cada uno de ellos, a su vez, fue un resultado significativo. Quien resuelve problemas puede no tener una larga cadena de dependencias lógicas de este tipo. Sin embargo, si consideramos un tipo de dependencia más apropiado, el cuadro cambia. Se dará con frecuencia el caso de que, aunque no exista una dependencia formal entre dos resultados, habría resultado imposible probar uno de ellos sin tener presentes los principios generales introducidos en la solución del otro. Las cadenas de este tipo de dependencia pueden ser bastante largas, así que también los combinatorialistas pueden tener la satisfacción de resolver problemas que no estaban al alcance de la generación anterior. De esta forma, uno siente que el área avanza globalmente.

Hasta ahora, todos mis argumentos se han referido a la combinatoria. He intentado mostrar que el área tiene una coherencia y un sentido de avance que no son evidentes para un extraño pero que aun así son importantes. Sin embargo, no he dicho nada sobre cómo las matemáticas en general pueden beneficiarse del progreso en combinatoria. Consideremos de nuevo lo que Atiyah tiene que decir en estas cuestiones [A3, §6].

> ... la justificación última para hacer matemáticas está relacionada íntimamente con su unidad. Si aceptamos que, por consideraciones puramente de utilidad, las matemáticas se justifican por algunas de sus aplicaciones, entonces la matemática en su conjunto queda justificada siempre que se mantenga como un todo conexo. Cualquier parte que se aleje del cuerpo principal necesita una justificación más directa.

¿En qué lugar queda la combinatoria si aceptamos la necesidad de una justificación de este tipo? Una observación evidente es que la combinatoria puede justificarse directamente, debido a su íntima conexión con la informática, a la que nadie discute su utilidad. (Curiosamente, cuando el comité de programa del Congreso Internacional de Matemáticos de 1998 enumeró las conexiones entre los diversos apartados, no se dio cuenta de ésa). En lo tocante a las conexiones con otras áreas, existen aplicaciones de la combinatoria a la probabilidad, teoría de conjuntos, criptografía, teoría de la comunicación, geometría de espacios de Banach, análisis armónico, teoría de números..., la lista es larga. Sin embargo, mientras escribo, soy consciente de que muchas de estas aplicaciones no impresionarán, por ejemplo, a un geómetra diferencial, que las verá como algo que pertenece a esa parte foránea de las matemáticas que puede descartarse tranquilamente. Incluso las aplicaciones a la teoría de números son al "tipo equivocado" de teoría de números.

Quizá sea útil considerar las diferentes formas en que una rama de las matemáticas puede beneficiar a otra. Aquí tienen una lista, ordenada (pero no exhaustiva), de cómo el área A puede ayudar al área B.

(i) Un teorema de A tiene una consecuencia inmediata y útil en B.
(ii) Un teorema de A tiene una consecuencia en B, pero lleva algún trabajo probarlo.
(iii) Un teorema de A se parece lo bastante a una pregunta de B para permitirnos imitar o adaptar la prueba de A y responder la pregunta de B.
(iv) Resolver un problema en A nos lleva a desarrollar herramientas en B que tienen interés por sí mismas.
(v) El área B contiene definiciones que se parecen a las del área A. (Para dar un ejemplo: a veces queremos definir un concepto de independencia que se comporta en algunos aspectos, pero no en todos, como la independencia lineal en espacios vectoriales). Entonces el área A sugiere maneras fructíferas de organizar y abordar resultados y problemas de B.
(vi) Al ganar experiencia en el área A, se adquieren ciertos hábitos de pensamiento que nos permiten hacer contribuciones importantes en el área B.
(vii) El área A está lo suficientemente cerca en espíritu del área B como para que cualquiera que sea bueno en el área A es probable que lo sea en el área B. Más aún, muchos matemáticos contribuyen a las dos áreas.

Las relaciones menos directas, como (iv)–(vii), son naturalmente menos visibles. A pesar de todo, no hay que subestimar su contribución a la interconectividad de las matemáticas. Este es un sentimiento particularmente intenso después de trabajar varios años en la geometría de los espacios de Banach. El motivo inicial para trabajar en este área fue simplemente que me fascinaban resultados como el teorema de Dvoretzky. Después descubrí que el área que había elegido era fuertemente criticada por haberse liberado de sus raíces clásicas de las ecuaciones diferenciales y haber perdido, así, su próposito. Estaría de acuerdo en que no hay muchas conexiones del tipo (i) o (ii) entre la teoría de espacios de Banach pura y otras áreas, aunque hay algunas ideas profundas que muchos piensan que deberían explotarse más. Pero en cuanto consideramos conexiones más flexibles, las hallamos en abundancia. La utilización de la concentración de la medida proporciona un buen ejemplo de (iii) (o de (iv), la clasificación es un poco artificial). Por lo que respecta a (vi) y (vii), puedo hablar desde mi propia experiencia, ya que recientemente he trabajado en problemas que caen fuera de la teoría de espacios de Banach. Aunque no haya aplicado resultados de espacios de Banach, mi experiencia en este área me ha permitido pensar en algunos problemas de un modo que de otra manera no se me hubiera ocurrido. Y no soy el único: muchos matemáticos que han trabajado en espacios de Banach también han trabajado con éxito en otras áreas, tales como análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales, C^*-álgebras, probabilidad y combinatoria.

Me parece que la única manera de ignorar estas conexiones es pensar que todas ellas son conexiones entre un área poco importante e interesante de las matemáticas y otra área. Es difícil creer que alguien pueda tomar seriamente una postura tan radical, que descarta una parte tan grande de la matemática moderna, incluyendo muchos resultados que tienen aplicaciones directas. Sin embargo, parece que éste es el caso, lo cual me retrotrae a la idea de que hay dos culturas en la matemática pura. Probablemente es cierto que hay más conexiones *dentro* de las áreas de resolver problemas y construir teorías de las que hay *entre* ellas, lo cual justifica la etiqueta "dos culturas". (Debo decir una vez más que estas etiquetas no son más que simplificaciones útiles, y que soy plenamente consciente de que mucha gente se siente atraída por lo que he llamado construcción de teorías porque, en última instancia, les gustaría contribuir a resolver ciertos problemas).

Si es cierto que las matemáticas pueden dividirse en dos amplias culturas sin demasiada comunicación entre ellas, podemos aún preguntarnos si tiene alguna importancia. En mi opinión, sí la tiene. Un motivo es que esta situación tiene consecuencias prácticas no deseables. Por ejemplo, puede ser que matemáticos de una cultura tomen decisiones que afectan las carreras de matemáticos de la otra cultura. Estas decisiones, que en la mejor de las circunstancias ya son difíciles de tomar con ecuanimidad, serán todavía más difíciles si hay poca comprensión entre las dos culturas. (Personalmente no tengo absolutamente ninguna queja, aunque mi carrera ha sido muy afortunada). Un segundo efecto es que estudiantes de doctorado potenciales que tienen una inclinación natural hacia una de las culturas pueden sentir la presión para trabajar en un área de la otra cultura y desperdiciar así su talento. Este peligro se acentúa en un departamento dominado por unos pocos temas de investigación.

Quizá estos efectos sean subproductos inevitables de la vida académica, en todo caso no son la razón principal por la que urjo a mejorar la comunicación a través de la gran falla. La peor consecuencia de esta falta de comunicación es que representa una gran oportunidad perdida. De vez en cuando he oído a matemáticos del lado teórico quejarse de un problema que ha sido atacado con todos los medios conocidos, pero que contiene un núcleo duro "esencialmente combinatorio". Es una forma de decir que el problema es muy difícil, pero, precisamente, difícil en el sentido exacto que atrae a los matemáticos con mentalidad de resolver problemas. Lamentablemente, también es difícil llegar a entenderse incluso cuando uno puede apreciar la naturaleza esencialmente combinatoria del problema en cuestión. La situación es idónea para la colaboración entre culturas, pero esta colaboración requiere un mayor esfuerzo por parte de los que resuelven problemas en aprender un poco de teoría, y mayor simpatía por parte de los teóricos hacia los matemáticos que no saben qué es la cohomología. Esfuerzos que sin duda enriquecerán a las dos culturas matemáticas.

Referencias

[A1] M. F. Atiyah, An interview with Michael Atiyah, *Math. Intelligencer* 6 (1984), 9–19.

[A2] M. F. Atiyah, How research is carried out, *Bull I.M.A.* 10 (1974), 232–4.

[A3] M. F. Atiyah, *Identiying progress in mathematics*, ESF conference in Colmar, C.U.P. (1985), 24–41.

[CGW] F. Chung, R. L. Graham and R. M. Wilson, Quasi-random graphs, *Combinatorica* 9 (1990), 345–362.

[D] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1961, 123–160.

[E] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. A.M.S.* 53 (1947), 292–4.

[EL] P. Erdős and L. Lovász, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, en A. Hajnal et al. eds., Infinite and finite sets, North-Holland, Amsterdam, 609–628.

[J] S. Janson, Poisson approximation for large deviations, *Random Structures Algorithms* 1 (1990), 221–229.

[K] B. S. Kashin, Sections of some finite dimensional sets and classes of smooth functions, *Isv. ANSSSR, ser. mat.* 41 (1977), 334–351 (Russian).

[M] V. D. Milman, A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies. (Russian) *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971), 28–37 (translated from Russian).

[Sza] S. J. Szarek, On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of l_n^1. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 26 (1978), 691–694.

[Sze] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, in Proc. Colloque Intern. CNRS, J.-C. Bermon et al. eds, (1978), 399–401.

[R] K. ROTH, On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.* 28, (1953), 104–109.

[T] A. THOMASON, Pseudo-random graphs, en M. KARÓNSKI, ED., Proceedings of Random Graphs, Poznán 1985, *Annals of Discrete Mathematics* 33, 307–331.

W.T. Gowers
Rouse Ball Professor of Mathematics
Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics
University of Cambridge
Reino Unido
Correo-electrónico: w.t.gowers@dpmms.cam.ac.uk

Traducción de Marc Noy