Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de diciembre de 2010.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 150 (Corrección). *Propuesto por Baleanu A. Razvan (estudiante), "George Coşbuc" National College, Motru, Rumanía.*

Siendo $ABCD$ un rectángulo, denotaremos por M y N los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. Sea P un punto de la recta CD tomado de tal forma que D pertenezca al segmento PC. Definimos los puntos $Q = PM \cap AC$ y $S = QN \cap DC$. Consideramos la circunferencia Γ tangente a los segmentos NP y NS que tiene centro en un punto del segmento PS. Sean X_1 y X_2 puntos pertenecientes a los segmentos NP y NS, respectivamente, verificando que $4 \cdot X_1P \cdot X_2S = PS^2$. Probar que el segmento X_1X_2 es siempre tangente a la circunferencia Γ.

Problema 151. *Propuesto por Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Probar o refutar la siguiente afirmación: Si $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es una función derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, entonces $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(f(x))\,dx$ converge.

Problema 152. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Para $|x| < 1$, evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(\frac{1}{1-x} \right) - x - \frac{x}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right) \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \cdots - x^n \right).$$

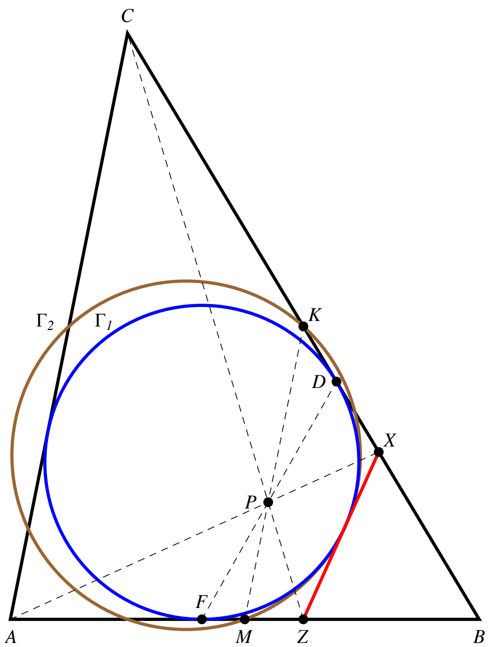
Problema 153. *Propuesto por Pablo Refolio (estudiante), Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.*

Probar que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n} = \pi \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Problema 154. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea ABC un triángulo con ángulos $A > B > C$, circunferencia inscrita Γ_1 y circunferencia de los nueve puntos Γ_2. En los lados BC y AB se consideran los puntos medios K y M y los puntos de contacto con Γ_1 que denotaremos por D y F (véase la figura que aparece a continuación). Definimos $P = KM \cap DF$, $X = AP \cap BC$ y $Z = CP \cap AB$. Probar que la recta XZ es la tangente común a Γ_1 y Γ_2.

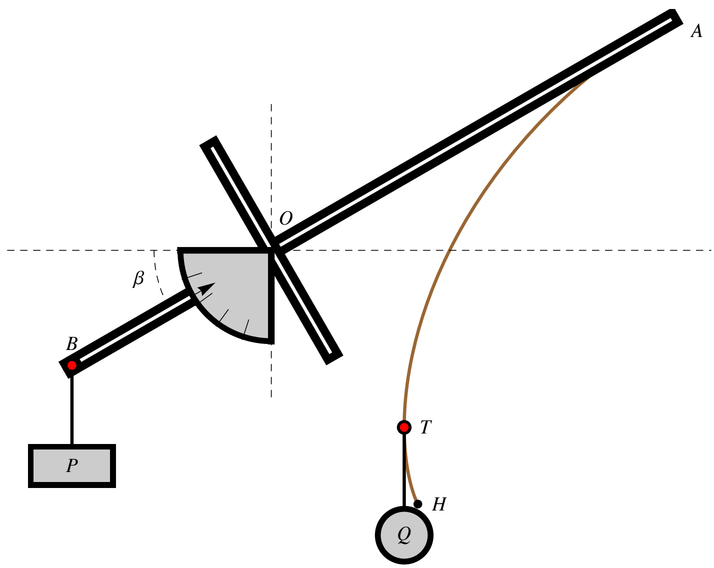


Problema 155. *Propuesto por Arnau Messegué (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Dado un triángulo escaleno ABC, se consideran M_a, M_b y M_c los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente, y N_a, N_b y N_c los puntos medios de los arcos BC, CA y AB de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC que no contienen a A, B y C, respectivamente. Probar que la circunferencia tangente exteriormente a las tres circunferencias de diámetros M_aN_a, M_bN_b y M_cN_c es tangente a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC en el punto de Feuerbach de dicho triángulo.

Problema 156. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

La figura que aparece a continuación representa una báscula que gira en torno al punto fijo O. Del punto B cuelga el peso P que se quiere medir. En el brazo derecho de la balanza, fijada rígidamente a él, una curva directriz ATH dirige la línea de acción de un contrapeso Q mediante un hilo que está enrollado en la curva y que se va desenrollando a medida que, por efecto del peso P, la báscula se inclina. Tenemos también un arco graduado para medir el ángulo de inclinación. Suponemos el dispositivo equilibrado si el centro de gravedad del armazón, libre del peso P, se sitúa en el punto O.



Hallar la ecuación de la curva ATH para que la báscula quede equilibrada cuando el ángulo girado β sea proporcional al peso P. Hallar también esa constante de proporcionalidad.

Soluciones

Problema 127. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaiyán.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo $\triangle ABC$. Si R y r denotan, respectivamente, el radio de la circunferencia circunscrita y el radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$, determinar todos los valores reales λ para los que se verifica la desigualdad

$$\lambda - 3(\lambda - 2)\frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} \leq \frac{R}{r}.$$

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

En el caso trivial del triángulo equilátero, para el que $a = b = c$ y $R = 2r$, la sustitución de estos valores en la desigualdad produce $2 \leq 2$, trivialmente cierto. El triángulo equilátero cumple pues la desigualdad para cualquier λ. Consideraremos entonces en el resto del problema sólo triángulos no equiláteros.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b \leq c$ y denotemos $x = \frac{b+c}{2a} > 1$ y $d = \frac{c-b}{2a}$. Resulta obvio que $d \geq 0$ y, utilizando la desigualdad triangular, se obtiene que $d < 1/2$. Con la notación introducida $b = a(x - d)$ y $c = a(x + d)$. Reescribimos primeramente la desigualdad del enunciado en la forma

$$(\lambda - 2)\left(1 - 3\frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2}\right) \leq \frac{R}{r} - 2. \tag{1}$$

El área del triángulo, S, puede expresarse como

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(a + b + c)r}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)},$$

con lo que el lado derecho de (1) se transforma en

$$\frac{R}{r} - 2 = \frac{2abc}{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)} - 2 = 2\frac{(x - 1)^2 + d^2(8x - 5)}{(2x - 1)(1 - 4d^2)}.$$

Asimismo, el segundo factor del lado izquierdo de (1) se reescribe en términos de x y d como

$$1 - 3\frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} = 1 - 3\frac{x^2 + 2x - d^2}{(2x + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 + 3d^2}{(2x + 1)^2}.$$

Se tiene entonces que (1) es equivalente a

$$\lambda - 2 \leq \frac{2(2x + 1)^2}{2x - 1}\,\frac{(x - 1)^2 + d^2(8x - 5)}{(x - 1)^2 - (4x^2 - 8x + 1)d^2 - 12d^4}.$$

La acotación más estricta de λ se producirá cuando el lado de la derecha alcance el mínimo. Si asumimos que conocemos el valor de x para el que se produce dicho mínimo, entonces debemos hallar el valor de d^2 para el que se hace mínima la expresión

$$\frac{(x-1)^2 + d^2(8x-5)}{(x-1)^2 - (4x^2-8x+1)d^2 - 12d^4}. \tag{2}$$

La función dada en (2) es claramente continua para $0 \leq d < 1/2$. Derivando (2) respecto a d^2 e igualando a cero, se tiene que cualquier extremo local debe cumplir la ecuación

$$3(8x-5)d^4 + 6(x-1)^2d^2 + (x+1)(x-1)^3 = 0.$$

Como $x > 1$, los tres coeficientes son positivos y, por tanto, no existe ningún extremo local para d real. Puesto que además el denominador de (2) tiende a cero si $d \to 1/2$ (lo que sería equivalente a que el triángulo tendiese a degenerar a un segmento y el cociente R/r tendiera a infinito), entonces el mínimo se obtiene cuando $d = 0$. Así, nos basta encontrar λ tal que, para todo $x > 1$, se cumpla

$$\lambda \leq 2 + \frac{2(2x+1)^2}{2x-1} = 2(2x-1) + 10 + \frac{8}{2x-1}.$$

Teniendo en cuenta que $2(2x-1)\frac{8}{2x-1} = 16$, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, la suma $2(2x-1) + \frac{8}{2x-1}$ será mínima cuando $2(2x-1) = \frac{8}{2x-1}$; es decir, la cota más exigente para λ es

$$\lambda \leq 10 + 2\sqrt{2(2x-1)\frac{8}{2x-1}} = 18,$$

con igualdad si y sólo si $x = \frac{3}{2}$. Se tiene entonces que la desigualdad del enunciado se cumple para todo $\lambda \leq 18$, con igualdad para $\lambda = 18$ si y sólo si los lados del triángulo están en proporción $3:3:2$. En este caso, se obtiene fácilmente que $\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} = \frac{21}{64}$ y $\frac{R}{r} = \frac{9}{4}$, y la desigualdad del enunciado se convierte efectivamente en $\lambda \leq 18$.

También resuelto por el proponente. Se han recibido dos soluciones incompletas.

Problema 128. *Propuesto por Zdravko F. Starc, Vrsac, Serbia.*

Sean a, b y c tres números reales positivos. Probar que

$$\frac{2(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2} < \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} < \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4abc}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos la desigualdad

$$\frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)} < \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} < \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{2}abc}, \tag{1}$$

que implica la propuesta.

Para $t > 0$, la función $1/\sqrt{t}$ es convexa, luego por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} &\geq \frac{3}{\sqrt{\frac{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)}{3}}}\\ &= \frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)}\\ &= \frac{3\sqrt{(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}}{\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)}\\ &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2)},\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad del lado izquierdo de (1). Para probar el lado derecho de (1) debemos tener en cuenta que $x^2+y^2 \geq 2xy$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}abc}\big(\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\big).\end{aligned}$$

Ahora, para completar la demostración, basta tener en cuenta que por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se cumple que

$$\sqrt{abc} = (\sqrt[3]{a^2b^2c^2})^{3/4} \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/4},$$

y que por la desigualdad de Hölder

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \left(a^{4/2}+b^{4/2}+c^{4/2}\right)^{1/4}\left(1^{4/3}+1^{4/3}+1^{4/3}\right)^{3/4} = 3^{3/4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/4}.$$

Además, ambas desigualdades son una igualdad si $a=b=c$.

También resuelto por V. Arnaiz, E. Hysnelaj, D. Lasaosa, P. Pantoja, P. Perfetti, X. Ros, B. Salgueiro y el proponente.

PROBLEMA 129. *Propuesto por Ovidiu Furdui, The University of Toledo, Toledo, Ohio.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{\ln n}{2}-\frac{\gamma}{2}-\ln 2\right),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni definida mediante la identidad

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Utilizaremos los siguientes resultados previos: el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}\,(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}\,(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \tag{1}$$

que es una consecuencia inmediata de la equivalencia de Stirling; la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \tag{2}$$

que se obtiene del desarrollo en serie de potencias para la función $\arctan x$ en $x = 1$; y el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\log n \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\log n \right) \\ &= \log 2 + \frac{\gamma}{2}, \end{aligned} \tag{3}$$

que puede deducirse de la identidad

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

y de la definición de la constante γ dada en el enunciado.

Ahora, tomando

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{\log n}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2,$$

que en virtud de (3) verifica que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, la suma buscada es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n} - x_{2n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right).$$

Consideremos también

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right) \quad \text{y} \quad T_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right).$$

Así, usando (2), resulta evidente que

$$\lim_{m\to\infty} (T_m - S_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Además, con (1) y (3), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}(T_m+S_m) &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{1}{2n-1}-\log\left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\log(2m)\right)\\
&\quad + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log(2m)-\log\left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)\right)\\
&= \log 2+\frac{\gamma}{2}+\lim_{m\to\infty}\log\left(\frac{\sqrt{2m}(2m-1)!!}{(2m)!!}\right)\\
&= \log 2+\frac{\gamma}{2}+\log\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)=\frac{\gamma}{2}+\log\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right).
\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n = \lim_{m\to\infty} S_m &= \frac{1}{2}\left(\lim_{m\to\infty}(T_m+S_m)-\lim_{m\to\infty}(T_m-S_m)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)-\frac{\pi}{4}\right),
\end{aligned}$$

que es la suma buscada.

También resuelto por B. de la Calle, G. C. Greubel, E. Hysnelaj, D. Lasaosa, P. Perfetti y el proponente.

PROBLEMA 130. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Determinar todos los enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$x^y+y^x=4x+3y.$$

Solución enviada por Ricardo Barroso Campos, Universidad de Sevilla, Sevilla.

Si $x>2$ e $y>3$ se verifica que

$$x^y>x^3>4x \qquad \text{e} \qquad y^x>y^2>3y,$$

luego $x^y+y^x>4x+3y$. De los seis casos restantes

$$(x,y)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),$$

sólo $(x,y)=(2,3)$ es solución.

También resuelto por A. Álvarez, V. Arnaiz, E. Hysnelaj, V. Lanchares, D. Lasaosa, J. Rivero, X. Ros, J. Vinuesa y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 131. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con el ángulo recto en A. Sean D y E dos puntos en BC que verifican $BD = DE = EC = a$. Si $AE = b$ y $AD = c$, probar que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3a\sqrt{\frac{6}{ab+bc+ca}}.$$

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Llamemos $x = AB$ e $y = AC$. Con esta notación, por ser el triángulo rectángulo, se tiene que $9a^2 = x^2 + y^2$. Del teorema de Stewart podemos deducir que

$$b^2 = AE^2 = \frac{BE\cdot AC^2 + CE\cdot AB^2}{BC} - BE\cdot CE = \frac{2y^2+x^2}{3} - 2a^2,$$

luego $3b^2 = x^2 + 2y^2 - 6a^2$. De forma similar $3c^2 = 2x^2 + y^2 - 6a^2$, con lo que $b^2 + c^2 = 5a^2$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 6a^2$. Podemos entonces reescribir la desigualdad propuesta en su forma equivalente

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}.$$

Esta desigualdad es cierta para cualesquiera a, b y c reales positivos. En efecto, elevando al cuadrado y operando obtenemos la desigualdad equivalente

$$\sum_{\text{cíclica}}\left(\frac{a^3}{b}+\frac{a^3c}{b^2}+2\frac{a^2b}{c}+\frac{a^2c}{b}+2ab\right)\geq 7\sum_{\text{cíclica}} a^2.$$

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{a^3}{b}+\frac{a^3c}{b^2}+\frac{a^2b}{c}+\frac{a^2b}{c}+\frac{a^2c}{b}+ab+ab\geq 7\sqrt[7]{a^{14}} = 7a^2,$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$, y de forma análoga para sus permutaciones cíclicas. Nótese además que en la desigualdad propuesta no se puede dar nunca la igualdad, pues $a = b = c$ no es posible para reales positivos tales que $b^2 + c^2 = 5a^2$.

También resuelto por el proponente.

Problema 132. *Propuesto por Xavier Ros, estudiante, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión definida por la recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{x_n}\right).$$

¿Para qué valores de $x_0 \in \mathbb{R}$ está bien definida la sucesión? En caso de estar bien definida, ¿cuándo es una sucesión periódica? (Entenderemos que una sucesión es periódica si existen n_0 y k tales que $x_n = x_{n+k}$ para $n \geq n_0$.)

Solución enviada por Víctor Lanchares Barrasa, Universidad de La Rioja, Logroño.

La recurrencia puede escribirse como

$$x_{n+1} = -\frac{1 - x_n^2}{2x_n}.$$

A la vista de esta expresión, parece natural introducir una nueva sucesión α_n de manera que $x_n = \tan \alpha_n$. En este caso,

$$x_{n+1} = \tan \alpha_{n+1} \qquad \text{y} \qquad \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha_n,$$

sin más que utilizar la fórmula de la tangente del ángulo doble. Por tanto,

$$\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2}\pi + 2^n \alpha_0$$

Ahora es fácil ver que la sucesión estará bien definida siempre que $2^n \alpha_0 \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; es decir, siempre que $\alpha_0 \neq \frac{k\pi}{2^n}$ ($k \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$). En caso contrario $x_n = \tan \alpha_n$ no estaría definido.

La sucesión será periódica si $x_{n_0} = x_{n_0+k}$; es decir si

$$\tan \alpha_{n_0} = \tan \alpha_{n_0+k},$$

esto es, si existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_{n_0+k} = \alpha_{n_0} + j\pi$. Por tanto debe ser

$$\frac{2^{n_0+k} - 1}{2}\pi + 2^{n_0+k}\alpha_0 = \frac{2^{n_0} - 1}{2}\pi + 2^{n_0}\alpha_0 + j\pi.$$

Despejando, resulta

$$\alpha_0 = \frac{j\pi}{2^{n_0}(2^k - 1)} - \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

con $n_0 \geq 0$, $k > 1$, $j \in \mathbb{Z}$. El valor $k = 1$ debe ser descartado, ya que entonces α_0 estaría en el caso correspondiente a una sucesión mal definida, al ser el denominador una potencia de dos.

La expresión (1) puede parecer a primera vista muy restrictiva; sin embargo, toda fracción de la forma $\frac{p\pi}{q}$ con $q \neq 0$, $q \neq 2^n$ y $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$ puede expresarse de la forma (1). En efecto, para cada q existen enteros $m_0 \geq 0$ y $q_0 > 1$ tales que $q = 2^{m_0} q_0$ con $\operatorname{mcd}(2, q_0) = 1$. Por el teorema de Euler-Fermat[1] existe c_0 tal que $2^{\phi(q_0)} - 1 = c_0 q_0$. Por tanto,

$$\frac{p\pi}{q} = \frac{2p\pi}{2q} = \frac{2p\pi}{2^{m_0+1} q_0} = \frac{2pc_0\pi}{2^{m_0+1} c_0 q_0} = \frac{2pc_0\pi}{2^{m_0+1}(2^{\phi(q_0)} - 1)}$$

y puede escribirse como (1) tomando $n_0 = m_0 + 1$, $k = \phi(q_0)$ y $j = 2pc_0 + 2^{m_0}(2^{\phi(q_0)} - 1)$. Por tanto, si $\alpha_0 = \frac{p\pi}{q}$ con $q \neq 0$ y $q \neq 2^n$, la sucesión es periódica.

También resuelto por V. Arnaiz, E. Bojaxhiu y E. Hysnelaj, J. M. Gutiérrez, D. Lasaosa, J. A. Torné y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

[1] Si $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a^{\phi(b)} \equiv 1 \text{ mód } b$, donde ϕ es la función de Euler.

Problema 125 (nuevo). *Propuesto por Manuel Rodríguez Sánchez, Barcelona, España.*

Sea r el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo $\triangle ABC$. Sean m, n y p las distancias desde el incentro I a los vértices A, B y C respectivamente. Demostrar que

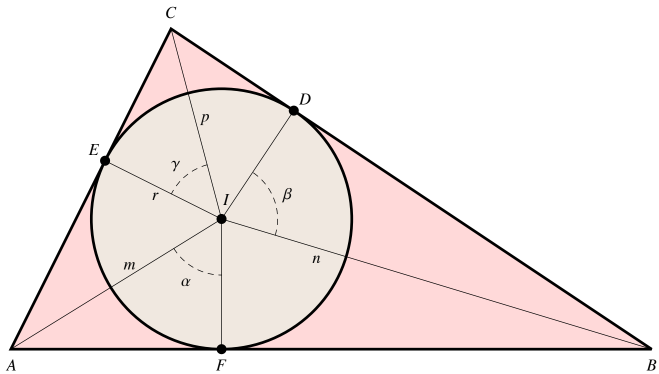
$$\frac{1}{r^3} - \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{2}{mnp} = 0.$$

Solución enviada por Víctor Arnaiz Solórzano (estudiante), Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Sean α, β y γ los ángulos $\angle AIF$, $\angle BID$ y $\angle AIE$, respectivamente. Entonces, como se deduce de la figura adjunta,

$$\frac{1}{m} = \frac{\cos\alpha}{r}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{\cos\beta}{r} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{p} = \frac{\cos\gamma}{r} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{r},$$

donde en la última identidad hemos usado que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



Con la relaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^3} - \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{r} - \frac{2}{mnp} \\
&\qquad = \frac{1}{r^3}\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2(\alpha+\beta) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\right) \\
&\qquad = \frac{1}{r^3}\left(\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\right),
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir el resultado sin más que aplicar las igualdades

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

También resuelto por M. Amengual, R. Barroso, E. Hysnelaj, D. Lasaosa, X. Ros, B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente.