
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico oscar.ciaurri@unirioja.es en archivos con formato T_EX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de marzo de 2011.

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (★) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

PROBLEMA 157. *Propuesto por Myhály Bencze, Brasov, Rumanía.*

Sean $\lambda > 0$, $x_i > 0$, para $i = 1, \dots, n$, $a \geq 1$ y $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. Probar la desigualdad

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{x_1^k}{(\lambda + x_2)(\lambda + x_3) \cdots (\lambda + x_k)} \geq \left(\frac{k}{a} - \frac{k-1}{a^{k-1}\sqrt[k]{a}} \right) \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(k-1)\lambda}{a^{k-1}\sqrt[k]{a}}.$$

PROBLEMA 158. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que las longitudes de los lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ satisfacen $a \leq b \leq c$. Si D denota el pie de la altura desde el vértice C y G es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo con el lado AB , probar que

$$CD \cdot (BG + GA) - 2BG \cdot GA \geq 0 \iff \angle ACB \leq \frac{\pi}{2}.$$

PROBLEMA 159. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Cluj, Rumanía.*

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Evaluar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n f(\cos x) dx.$$

Como consecuencia, deducir, para cada función continua $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, el valor de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n g(x) dx.$$

PROBLEMA 160. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Probar que las tangentes de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética si y sólo si la recta de Euler del triángulo es paralela a uno de los lados.

PROBLEMA 161. *Propuesto por Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Determinar las soluciones positivas de la ecuación

$$16\sqrt{2}x^{3+\sqrt{2}} - 20\sqrt{2}x^{2+\sqrt{2}} + 16\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{2}x^{1+\sqrt{2}} - 20\sqrt{2}x^2 + x^{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 22) + 3\sqrt{2}x + 22 + \sqrt{2} = 0.$$

PROBLEMA 162. *Propuesto por José Manuel Gutiérrez Jiménez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada $a \in (0, 1/2)$, definimos la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ como $x_1 = a$ y

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{1 - x_n} \right)^2, \quad n \geq 1.$$

Evaluar $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x_n)$.

Soluciones

PROBLEMA 133. *Propuesto por Javier Soria de Diego, Universitat de Barcelona, Barcelona.*

Dado $a \in \mathbb{N}$, definimos

$$\text{Pit}(a) = \left\{ b \in \mathbb{N} : \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sea P el conjunto de los números primos y $\tilde{P} = P \setminus \{2\}$.

- Demostrar que $\text{Card}(\text{Pit}(a)) < \infty$.
- Demostrar que $\text{Card}(\text{Pit}(a)) = 0$ si, y sólo si, $a \in \{1, 2\}$.
- Demostrar que $\text{Card}(\text{Pit}(a)) = 1$ si, y sólo si, $a \in 2P \cup \tilde{P}$.
- Demostrar que $\sup_{a \in \mathbb{N}} \text{Card}(\text{Pit}(a)) = \infty$.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

LEMA. *Dados m y n números naturales, el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x - y = n, \end{cases}$$

tiene solución en los números naturales si y sólo si m y n tienen la misma paridad y $m > n$. Además, si cada uno de los pares (m_1, n_1) y (m_2, n_2) cumplen ambas condiciones y $m_1 n_1 = m_2 n_2$, siendo (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las soluciones respectivas, se tiene $x_1 = x_2 \iff m_1 = m_2$.

DEMOSTRACIÓN. Ambas afirmaciones son evidentes. □

Entonces, dado $a \in \mathbb{N}$, $b \in \text{Pit}(a)$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 = (c+b)(c-b)$ y, en consecuencia, el número de tales b distintos es igual al número de formas distintas en que a^2 puede expresarse como producto de dos enteros positivos distintos de la misma paridad.

Es fácil ver que si a es impar, con descomposición en factores primos (impares) $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, y si usamos d para denotar la función número de divisores, resulta

$$\text{Card}(\text{Pit}(a)) = \frac{d(a^2) - 1}{2} = \frac{(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_n + 1) - 1}{2}, \quad a \text{ impar}, \quad (1)$$

ya que de los divisores de a^2 (que son todos impares) hay que descontar solamente el que da lugar a dos factores iguales ($a \cdot a$) y dividir por dos para no repetir los productos.

Ahora, si a es par con descomposición en factores primos $a = 2^k p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, el número de formas de expresar a^2 como producto de dos factores distintos y de la

misma paridad (entonces forzosamente pares ambos) es igual al número de formas de expresar $a^2/2^2$ como producto de factores distintos; es decir, por las mismas razones argumentadas en el caso anterior,

$$\text{Card}(\text{Pit}(a)) = \frac{d(a^2/2^2) - 1}{2} = \frac{(2k-1)(2\alpha_1+1) \cdots (2\alpha_n+1) - 1}{2}, \quad a \text{ par.} \quad (2)$$

A la vista de (1) y (2), las propiedades a), b), c) y d) son evidentes.

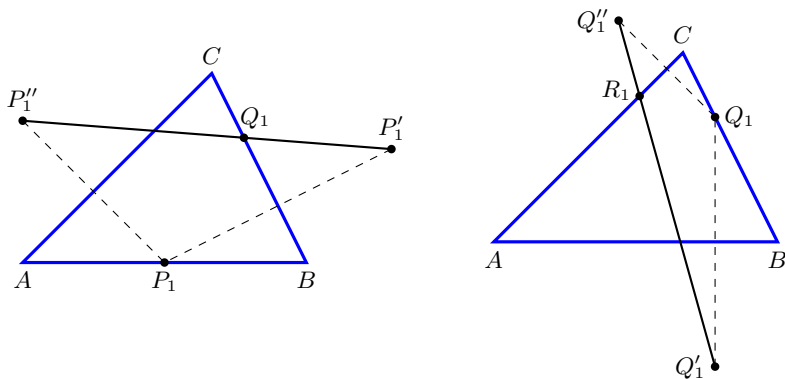
También resuelto por C. Beade, D. Lasasa, J. Múgica, A. Quirós, X. Ros y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

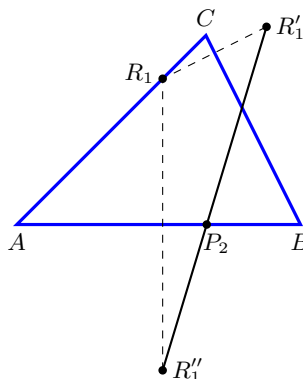
NOTA. Adolfo Quirós, en su solución, demuestra dos propiedades más fuertes que c) y d). En concreto, prueba que

- c') Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n+1$ es primo, $\text{Card}(\text{Pit}(a)) = n$ si y sólo si $a \in \{2p^n : p \in P\} \cup \{p^n : p \in \tilde{P}\}$.
- d') Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Card}(\text{Pit}(a)) = n$ (por ejemplo, $\text{Card}(\text{Pit}(2^{n+1})) = n$).

PROBLEMA 134 ★. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

En un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, se define el siguiente proceso iterativo (obsérvense las figuras que mostramos a continuación). A partir de un punto cualquiera P_1 , del lado AB , se hallan los puntos P'_1 y P''_1 , simétricos del P_1 respecto a los otros dos lados del triángulo, y se unen con una línea recta. Esta recta corta al lado BC en un punto que llamaremos Q_1 . Repitiendo el proceso con Q_1 , obtendremos R_1 en el lado CA , que a su vez dará origen a P_2 en el lado AB , etc. Así se tendrá una sucesión $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, \dots$, que recorre los lados del triángulo en sentido antihorario. Estudiar la convergencia de las sucesiones $P_1, P_2, P_3, \dots$, $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, y $R_1, R_2, R_3, \dots$.





NOTA. Experimentos realizados por el proponente del PROBLEMA 134 sugieren que la sucesión de triángulos $\triangle P_1Q_1R_1$, $\triangle P_2Q_2R_2$, $\triangle P_3Q_3R_3, \dots$ tiende hacia el triángulo órtico, formado por los pies de las tres alturas del triángulo $\triangle ABC$.

NOTA SOBRE LA SOLUCIÓN. La solución que incluimos a continuación para el PROBLEMA 134 está basada en la contribución aportada por Daniel Lasasa de la Universidad Pública de Navarra. La aportación de D. Lasasa, aun conteniendo un planteamiento acertado, no resultaba plenamente satisfactoria puesto que en algunos aspectos era imprecisa e incompleta. Tomando como base el trabajo de D. Lasasa, nuestro colaborador habitual Emilio Fernández ha desarrollado una solución que consideramos óptima. Es por este motivo que la solución aparece atribuida a ambos autores. Se ha recibido otra contribución de otro autor que resultaba, asimismo, insatisfactoria.

Solución elaborada por Emilio Fernández, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño, y Daniel Lasasa, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Sean a , b y c , respectivamente, las longitudes de los lados BC , CA y AB , y S el área del triángulo $\triangle ABC$. Sean H_a , H_b y H_c , respectivamente, los pies de las alturas por los vértices A , B y C .

Si P_1 es un punto cualquiera de la recta AB , denotando por θ_1 el ángulo orientado $\angle H_cCP_1$ ($|\theta_1| < \frac{\pi}{2}$), se tiene

$$AP_1 = b \cos A + b \operatorname{sen} A \tan \theta_1 = b \frac{\cos(A - \theta_1)}{\cos \theta_1}$$

y

$$BP_1 = a \cos B - a \operatorname{sen} B \tan \theta_1 = a \frac{\cos(B + \theta_1)}{\cos \theta_1}.$$

Las coordenadas trilineales (proporción entre las distancias orientadas a los tres lados BC , CA y AB del triángulo en este orden) del punto P_1 son

$$BP_1 \operatorname{sen} B : AP_1 \operatorname{sen} A : 0,$$

las del punto P'_1 de la construcción del enunciado son

$$-BP_1 \operatorname{sen} B : \beta' : 2BP_1 \operatorname{sen} B \cos B$$

y las del punto P''_1 son

$$\alpha'' : -AP \operatorname{sen} A : 2AP_1 \operatorname{sen} A \cos A,$$

con β' la distancia (positiva) de P'_1 a la recta AC y α'' la distancia (también positiva) de P''_1 al lado BC .

Designando por $[XYZ]$ el área del triángulo $\triangle XYZ$, se tiene

$$[ABC] + [BCP_1] = [ACP_1] + [ABP_1];$$

es decir,

$$2S + aBP_1 \operatorname{sen} B = b\beta' + 2cBP_1 \operatorname{sen} B \cos B,$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{1}{b}(2S + aBP_1 \operatorname{sen} B - 2cBP_1 \operatorname{sen} B \cos B) \\ &= a \operatorname{sen} C + BP_1(\operatorname{sen} A - 2 \operatorname{sen} C \cos B) \\ &= \frac{BP_1 \cos \theta_1}{\cos(B + \theta_1)} \operatorname{sen} C + BP_1 \operatorname{sen}(B - C) \\ &= \frac{BP_1}{\cos(B + \theta_1)} (\cos \theta_1 \operatorname{sen} C + \operatorname{sen}(B - C) \cos(B + \theta_1)) \\ &= BP_1 \operatorname{sen} B \frac{\cos(B - C + \theta_1)}{\cos(B + \theta_1)}. \end{aligned}$$

De un modo análogo, de la igualdad de áreas

$$[BCP''_1] + [ABP''_1] = [ABC] + [ACP''_1]$$

se obtiene

$$a\alpha'' + 2cAP_1 \operatorname{sen} A \cos A = 2S + bAP_1 \operatorname{sen} A,$$

que, procediendo como en el caso anterior, nos permite deducir

$$\alpha'' = AP_1 \operatorname{sen} A \frac{\cos(A - C - \theta_1)}{\cos(A - \theta_1)}.$$

Sean, ahora, $0 : \beta : \gamma$ las coordenadas trilineales del punto Q_1 ; se tiene, entonces

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{CQ_1 \operatorname{sen} C}{BQ_1 \operatorname{sen} B} \Rightarrow \frac{BQ_1}{CQ_1} = \frac{\gamma \operatorname{sen} C}{\beta \operatorname{sen} B}.$$

Como los puntos Q_1 , P'_1 y P''_1 están alineados, debe cumplirse

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -1 & \frac{\cos(B-C+\theta_1)}{\cos(B+\theta_1)} & 2 \cos B \\ \frac{\cos(A-C-\theta_1)}{\cos(A-\theta_1)} & -1 & 2 \cos A \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante, llegamos a la relación

$$2\beta \left(\cos B \frac{\cos(A - C - \theta_1)}{\cos(A - \theta_1)} + \cos A \right) = \gamma \left(\frac{\cos(B - C + \theta_1) \cos(A - C - \theta_1)}{\cos(B + \theta_1) \cos(A - \theta_1)} - 1 \right)$$

que, mediante transformaciones trigonométricas y simplificación, nos da la identidad

$$\beta \sin(C + \theta_1) \cos(B + \theta - 1) = \gamma \sin C \cos C.$$

Por consiguiente,

$$\frac{BQ_1}{CQ_1} = \frac{\gamma \sin C}{\beta \sin B} = \frac{\sin(C + \theta_1) \cos(B + \theta_1)}{\sin B \cos C} = \frac{\sin(A - 2\theta_1) + \sin(C - B)}{2 \sin B \cos C}$$

y, a partir de aquí,

$$\begin{aligned} \frac{a}{CQ_1} &= \frac{BQ_1 + CQ_1}{CQ_1} = \frac{\sin(A - 2\theta_1) + \sin(C - B) + 2 \sin B \cos C}{2 \sin B \cos C} \\ &= \frac{\sin(A - 2\theta_1) + \sin A}{2 \sin B \cos C} = \frac{\sin(A - \theta_1) \cos \theta_1}{\sin B \cos C}, \end{aligned}$$

luego

$$CQ_1 = \frac{b \sin A \cos C}{\sin(A - \theta_1) \cos \theta_1}$$

y

$$\begin{aligned} CQ_1 - b \cos C &= b \cos C \left(\frac{\sin A}{\sin(A - \theta_1) \cos \theta_1} - 1 \right) \\ &= b \cos C \frac{\sin \theta_1 \cos(A - \theta_1)}{\cos \theta_1 \sin(A - \theta_1)} = b \sin C \frac{\tan \theta_1}{\tan C \tan(A - \theta_1)}. \end{aligned}$$

De manera que, si denotamos por θ'_1 el ángulo orientado $\angle H_a A Q_1$, se tiene la relación

$$\tan \theta'_1 = -\frac{\tan \theta_1}{\tan C \tan(A - \theta_1)}. \quad (1)$$

Del mismo modo, si se denotan, respectivamente, por θ''_1 y θ_2 los ángulos orientados $\angle H_b B R_1$ y $\angle H_c C P_2$, se verificará que

$$\tan \theta''_1 = -\frac{\tan \theta'_1}{\tan A \tan(B - \theta'_1)} \quad (2)$$

y

$$\tan \theta_2 = -\frac{\tan \theta''_1}{\tan B \tan(C - \theta''_1)}. \quad (3)$$

A partir de este punto nos limitaremos a considerar el caso en el que el punto P_1 pertenece al segmento AB . En esta situación se tiene $\theta_1 \in [A - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - B]$, luego $A - \theta_1 \in [\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2}]$ y, por consiguiente, resulta

$$\tan(A - \theta_1) \tan C \geq \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \tan C = 1,$$

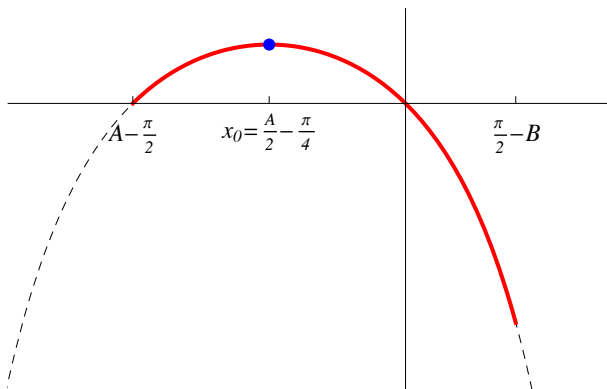


Figura 1: Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{\tan x}{\tan(A-x)}$.

con igualdad sólo si $P_1 = B$. De este modo, si $P_1 \neq B$, se cumple que $|\tan \theta'_1| < |\tan \theta_1|$, lo que implica $|\theta'_1| < |\theta_1|$.

En este momento, antes de continuar con la argumentación de la solución es conveniente hacer algunas consideraciones sobre la función

$$f(x) = \frac{\tan x}{\tan(A-x)},$$

para $x \in [A - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - B]$. El intervalo que estamos considerando está completamente contenido en $(-\frac{\pi}{2}, A)$, donde f es continua (la función tiene dos asíntotas verticales en $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = A$). Como se puede observar en la figura 1 y comprobar fácilmente, la función es positiva en el intervalo $(A - \frac{\pi}{2}, 0)$ y negativa en $(0, \frac{\pi}{2} - B)$. Además, tiene una máximo en el punto $x_0 = \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}$.

De los comentarios anteriores sobre la función f podemos concluir que, cuando el punto P_1 recorre el segmento AH_c ($A - \frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$), el punto Q_1 recorre (dos veces) un cierto segmento H_aQ_m , donde Q_m es un punto del segmento H_aC . En efecto, la función $\tan \theta'_1$ (como función de θ_1) tiene un máximo en el intervalo considerado para $\theta_m = \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}$, y el valor máximo de la función es $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{4} - A/2)}{\tan C}$. Sea

$$\theta'_m = \arctan\left(\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)}{\tan C}\right)$$

y Q_m el punto de la recta BC tal que $\angle H_aAQ_m = \theta'_m$. La pertenencia del punto Q_m al segmento H_aC es equivalente a $\theta'_m < \frac{\pi}{2} - C$, lo que es sencillo de comprobar a partir de la definición de θ'_m .

Usando nuevamente argumentaciones basadas en la función f es posible asegurar que, cuando P_1 recorre el segmento H_cB , el punto Q_1 recorre el segmento H_aB . Esto es claro puesto que si $\theta_1 \geq 0$, se tiene que $\theta'_1 \leq 0$. Además, si $P_1 = H_c$ (lo que corresponde a $\theta_1 = 0$), entonces $\theta'_1 = 0$, luego $Q_1 = H_a$; y si $P_1 = B$ (en cuyo caso $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - B$), tenemos $\tan \theta'_1 = -\tan(\frac{\pi}{2} - B)$ y, por tanto, $\theta'_1 = B - \frac{\pi}{2}$ y $Q_1 = B$.

Los razonamientos anteriores, moviendo letras cíclicamente, sirven para el paso de Q_1 a R_1 (en este caso, cuando Q_1 se mueva en BH_a , el punto R_1 se moverá en cierto segmento H_bR_m , con R_m perteneciente al segmento H_bA) y del R_1 al P_2 (para R_1 perteneciente a CH_b el punto P_2 estará en un segmento H_cP_m , donde P_m será un punto del segmento H_cB). De ahora en adelante usaremos la notación

$$\angle H_cCP_m = \theta_m, \quad \angle H_aAQ_m = \theta'_m \quad \text{y} \quad \angle H_bBR_m = \theta''_m.$$

Así, para seguir la evolución de los triángulos $\triangle P_nQ_nR_n$ ($n \geq 1$) podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que $P_1 \in H_cP_m$; porque, si $P_1 \in AH_c$, entonces $P_2 \in H_cP_m$; y, si $P_1 \in P_mB$, se tiene que $P_3 \in H_cP_m$.

Tomaremos

$$\angle H_cCP_b = \theta_n, \quad \angle H_aAQ_n = \theta'_n \quad \text{y} \quad \angle H_bBR_n = \theta''_n,$$

y consideraremos las relaciones, ya obtenidas,

$$\tan \theta'_n = -\frac{\tan \theta_n}{\tan C \tan(A - \theta_n)}, \quad \tan \theta''_n = -\frac{\tan \theta'_n}{\tan A \tan(B - \theta'_n)}$$

y

$$\tan \theta_{n+1} = -\frac{\tan \theta''_n}{\tan B \tan(C - \theta''_n)}.$$

Puesto que $\theta_1 < \theta_m < \frac{\pi}{2} - B$, tenemos que $A - \theta_1 > A - \theta_m > \frac{\pi}{2} - C$, lo que nos da

$$\tan C \tan(A - \theta_1) > \tan C \tan(A - \theta_m) > 1.$$

Llamando $k = \tan C \tan(A - \theta_m)$, se tiene

$$|\tan \theta'_1| = \frac{|\tan \theta_1|}{\tan C \tan(A - \theta_1)} < \frac{1}{k} |\tan \theta_1|. \quad (4)$$

Con un razonamiento análogo, tomando $\ell = \tan B \tan(C - \theta''_m) > 1$ y $h = \tan A \tan(B - \theta'_m) > 1$, se satisface

$$|\tan \theta_2| < \frac{1}{\ell} |\tan \theta'_1| \quad \text{y} \quad |\tan \theta'_2| < \frac{1}{h} |\tan \theta'_1|. \quad (5)$$

Ahora, usando (4) y (5), es claro que

$$\begin{aligned} |\tan \theta_3| &< |\tan \theta'_2| < \frac{1}{h} |\tan \theta'_2| < \frac{1}{h} |\tan \theta_2| \\ &< \frac{1}{\ell h} |\tan \theta'_1| < \frac{1}{\ell h} |\tan \theta'_1| \\ &< \frac{1}{k \ell h} |\tan \theta_1| \end{aligned}$$

(de hecho se cumple la desigualdad sin valores absolutos ya que θ_1 y θ_3 son positivos). Ahora, como el punto P_3 vuelve a estar en el segmento H_cP_m , tendremos que

$$\tan \theta_5 < \frac{1}{(k \ell h)^2} \tan \theta_1$$

y, en general,

$$\tan \theta_{2n+1} < \frac{1}{(k\ell h)^n} \tan \theta_1,$$

lo que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{2n+1} = 0.$$

Finalmente, como $|\theta_{2n+2}| < |\theta_{2n+1}|$, también se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$$

y, por consiguiente, la sucesión de puntos $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, del lado AB tiende al pie de la altura H_c . Esto ocurre para cada lado del triángulo y, por tanto, el límite de los triángulos $\triangle P_n Q_n R_n$ es el triángulo órtico.

PROBLEMA 135. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sean $a > 0$ un valor real y m un entero no negativo. Evaluar

$$I_m(a) = \int_0^\infty \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^m \frac{dx}{1+x^2}.$$

Solución enviada por Bernardo de la Calle Ysern, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Probaremos primero la fórmula

$$I_m(a) + I_{m+2}(a) = \frac{1}{m+1} \left(a^{m+1} + \frac{(-1)^m}{a^{m+1}} \right), \quad a > 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} I_m(a) + I_{m+2}(a) &= \int_0^\infty \left[\left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^m + \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^{m+2} \right] \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^m \left[1 + \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^2 \right] \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)^m \frac{1+a^2}{(1+ax)^2} dx. \end{aligned}$$

A continuación descomponemos el integrando en fracciones simples,

$$\begin{aligned} \frac{(a-x)^m}{(1+ax)^{m+2}} &= \frac{1}{a^m} \frac{(a^2-ax)^m}{(1+ax)^{m+2}} = \frac{1}{a^m} \frac{[(a^2+1) - (1+ax)]^m}{(1+ax)^{m+2}} \\ &= \frac{1}{a^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (a^2+1)^k (-1)^{m-k} \frac{(1+ax)^{m-k}}{(1+ax)^{m+2}} \\ &= \frac{1}{a^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(a^2+1)^k (-1)^{m-k}}{(1+ax)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado se comprueba fácilmente que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+ax)^{k+2}} = \frac{1}{a(k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} I_m(a) + I_{m+2}(a) &= \frac{1}{a^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (a^2+1)^{k+1} (-1)^{m-k} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+ax)^{k+2}} \\ &= \frac{1}{a^{m+1}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (a^2+1)^{k+1} \frac{(-1)^{m-k}}{k+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Consideramos ahora la expresión

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \int_0^x t^k dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^k (-1)^{m-k} \right] dt \\ &= \int_0^x (t-1)^m dt = \frac{(x-1)^{m+1} + (-1)^m}{m+1}, \end{aligned}$$

la cual, al sustituir x por a^2+1 y utilizar la fórmula (2), prueba la relación (1).

Fácilmente se calcula que $I_0(a) = \pi/2$. Utilizando (1) con $m=0$ se obtiene

$$I_2(a) = -\frac{\pi}{2} + \left(a + \frac{1}{a}\right),$$

y así sucesivamente se pueden calcular los demás valores de $I_{2n}(a)$, probándose por inducción la fórmula general

$$I_{2n}(a) = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} \left(a^{2k-1} + \frac{1}{a^{2k-1}}\right), \quad n \geq 1.$$

Análogamente, como $I_1(a) = \log a$, se tiene la fórmula

$$I_{2n+1}(a) = (-1)^n \log a + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2k} \left(a^{2k} - \frac{1}{a^{2k}}\right), \quad n \geq 1.$$

NOTA. Puesto que los dos miembros de la igualdad final definen una función analítica en el plano complejo menos la semirrecta negativa entonces, por el teorema de identidad de funciones analíticas, la fórmula también es cierta para valores de a complejos siempre que $a \notin (-\infty, 0]$.

También resuelto por D. Lasaosa, J. Múgica, P. Perfetti, J. Vinuesa y el proponente.

NOTA. Javier Múgica observa en su solución que, tomando $a = 1$ en el caso $m = 2n$ y teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n}(1) = 0$, se deduce la identidad de Leibniz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

PROBLEMA 136. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sean x, y, z números reales positivos. Probar que

$$\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{y}{(x+z)^2} + \frac{z}{(x+y)^2} \geq \frac{2(x+y)}{(2z+x+y)^2} + \frac{2(y+z)}{(2x+y+z)^2} + \frac{2(z+x)}{(2y+x+z)^2}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Como la desigualdad es simétrica, podemos suponer que $x \geq y \geq z > 0$, y como es homogénea, que $x + y + z = 1$. Así, resulta evidente que la desigualdad del enunciado es equivalente a

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{y}{(1-y)^2} + \frac{z}{(1-z)^2} \geq \frac{\frac{x+y}{2}}{\left(1 - \frac{x+y}{2}\right)^2} + \frac{\frac{y+z}{2}}{\left(1 - \frac{y+z}{2}\right)^2} + \frac{\frac{z+x}{2}}{\left(1 - \frac{z+x}{2}\right)^2},$$

que no es más que la desigualdad de mayorización (también denominada de Karamata: véase la nota más abajo)

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

aplicada a la función convexa $f(t) = \frac{t}{(1-t)^2}$, con $t \in (0, 1)$, y a las ternas $(x, y, z) \succ \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}\right)$. Además la igualdad ocurre si y sólo si $x = y = z$.

Notar que el argumento de la solución puede generalizarse para obtener la desigualdad para n números reales positivos.

También resuelto por G. Bello, D. Lasaosa, P. H. Pantoja, X. Ros, E. Suppa y el proponente.

NOTA. Dadas dos n -tuplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, la condición $x \succ y$ es una forma abreviada de indicar que $\sum_{i=1}^d x_i \geq \sum_{i=1}^d y_i$ para $d = 1, \dots, n-1$ y $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

La desigualdad de mayorización o de Karamata establece que si las n -tuplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, para las que se supone $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, cumplen que $x \succ y$ y f es una función convexa, entonces

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n).$$

El signo de la desigualdad se cambia si f es cóncava.

PROBLEMA 137. *Propuesto por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Determinar todos los enteros positivos n y m tales que $n^m + 2 = m^n$.

Solución enviada por el proponente.

Hallaremos en primer lugar todas las soluciones tales que $m < 3$ o $n < 3$. La pareja $(n, m) = (1, 3)$ es claramente solución. Ahora, si $n = 2$ la ecuación se convierte en $2^m + 2 = m^2$, que no tiene solución (para comprobarlo basta ver que la función $2^x + 2 - x^2$ es positiva para $x > 0$).

Si $m = 1$, entonces $n + 2 = 1$ y la ecuación no tiene solución. Para $m = 2$, tenemos la ecuación $n^2 + 2 = 2^n$, que tampoco tiene soluciones enteras (la función $2^x - x^2 - 2$ corta el eje real una sola vez y el punto de corte está en el intervalo $(4, 5)$).

Veamos que $(n, m) = (1, 3)$ es la única solución. Supongamos que $n, m \geq 3$ y comprobemos que en ese caso

$$m^n - n^m > 2,$$

lo que nos permitirá concluir la demostración. Puesto que la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$ es decreciente para $x \geq 3$ (notar que $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$), tendremos que

$$m^n > n^m \iff n \log m > m \log n \iff f(m) > f(n) \iff n > m.$$

Luego si existe alguna solución para la ecuación se cumplirá que $n > m$.

Por otro lado, por la bien conocida desigualdad entre la media geométrica y la media logarítmica,

$$\sqrt{xy} < \frac{x - y}{\log x - \log y},$$

tomando $x = m^n$ e $y = n^m$ obtenemos

$$m^n - n^m > \sqrt{m^n n^m} (n \log m - m \log n) = m^{\frac{n}{2}+1} n^{\frac{m}{2}+1} [f(m) - f(n)].$$

Ahora, por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (n, m)$ tal que

$$f(m) - f(n) = (n - m) \frac{\log \xi - 1}{\xi^2} > \frac{\log m - 1}{n^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} m^n - n^m &> m^{\frac{n}{2}+1} n^{\frac{m}{2}+1} \frac{\log m - 1}{n^2} > m^{\frac{m}{2}+1} m^{\frac{m}{2}-1} (\log m - 1) \\ &= m^m (\log m - 1) \geq 3^3 (\log 3 - 1) > 2, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

También resuelto por C. Blanco, V. Lanchares y D. Lasaosa

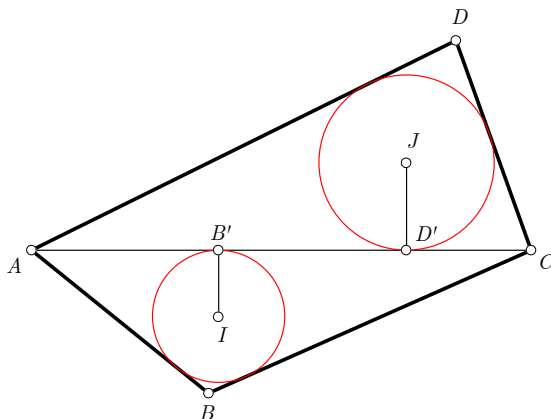


Figura 2: Gráfico que ilustra el lema de la solución al Problema 138.

PROBLEMA 138. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea Γ una circunferencia de centro O inscriptible en un cuadrilátero $ABCD$. Sean M y N los incentros de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$. Si la recta que une M y N corta a la diagonal AC del cuadrilátero $ABCD$ en el punto K , probar que las rectas BN , DM y KO son concurrentes.

Solución enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italia.

Para resolver el problema utilizaremos el lema siguiente.

LEMA. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Si los círculos I y J , inscritos en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, respectivamente, son tangentes a la diagonal AC en los puntos B' y D' , entonces se verifica la igualdad*

$$B'D' = \frac{|BC + DA - AB - DC|}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la notación introducida en la figura 2, y teniendo en cuenta las conocidas fórmulas

$$AD' = \frac{AC + AD - CD}{2} \quad \text{y} \quad AB' = \frac{AC + AB - BC}{2},$$

tenemos que

$$B'D' = |AD' - AB'| = \frac{|BC + DA - AB - DC|}{2}$$

como queríamos demostrar. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

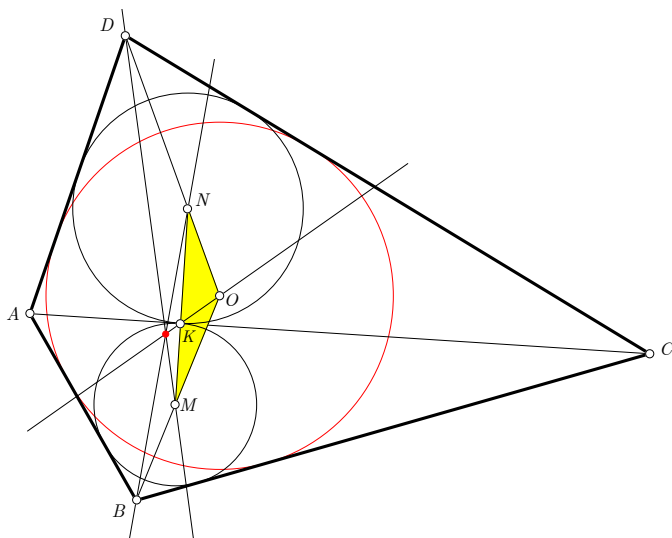


Figura 3: Gráfico asociado a la solución del Problema 138.

COROLARIO. Si el cuadrilátero $ABCD$ es circunscriptible, entonces los círculos I y J inscritos en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, respectivamente, son tangentes a la diagonal AC en el mismo punto.

Ahora, para resolver el problema propuesto deducimos del corolario anterior que, por ser $ABCD$ circunscriptible, los círculos M y N , inscritos en $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, son tangentes a la diagonal AC en el punto K y entonces $MN \perp AC$ (véase la figura 3).

Denotemos por R el radio de la circunferencia O , inscrita en $ABCD$, y por r_1 y r_2 los radios de las circunferencias M y N respectivamente.

La homotecia de centro B y razón $\frac{r_1}{R}$ transforma O en M , y los segmentos BM y BO verifican

$$\frac{BM}{BO} = \frac{r_1}{R}. \quad (1)$$

De igual forma, la homotecia de centro D y razón $\frac{r_2}{R}$ envía O en N , y los segmentos DN y DO satisfacen que

$$\frac{DN}{DO} = \frac{r_2}{R}. \quad (2)$$

Ahora, por ser $MK = r_1$ y $NK = r_2$, teniendo en cuenta (1) y (2), llegamos a

$$\frac{MB}{BO} \cdot \frac{OD}{DN} \cdot \frac{NK}{KM} = \frac{r_1}{R} \cdot \frac{R}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = 1$$

y, en consecuencia, por el recíproco del teorema de Ceva aplicado al triángulo $\triangle MON$, las rectas BN , DM y KO son concurrentes, con lo que hemos terminado.

También resuelto por M. Amengual, D. Lasaosa y el proponente.