Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

René Thom: no sólo catástrofes

por

Juan J. Nuño-Ballesteros

René Thom es, sin ninguna duda, uno de los grandes matemáticos del siglo XX. Es considerado como uno de los fundadores de la topología diferencial por su teoría del cobordismo gracias a la cual obtuvo la Medalla Fields en 1958 y, posteriormente, también estableció las bases de la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables. Sin embargo, fue la teoría de catástrofes la que le dio mayor popularidad e hizo que su nombre traspasara el ámbito estrictamente matemático y apareciese en campos tan diversos como la biología, la economía, las ciencias sociales o la filosofía de la ciencia.

René Thom

Biografía

Comenzaremos con algunos datos biográficos. René Thom nació el 2 de septiembre de 1923 en Montbéliard, una pequeña ciudad del este de Francia, cercana a la frontera suiza. Hijo de tenderos, desde muy pequeño se mostró como un alumno brillante obteniendo becas para realizar sus estudios primarios en el Collège Cuvier, en Montbéliard. Posteriormente, cursó el bachillerato en matemáticas elementales en Besançon en 1940.

Sin embargo, esta época de su vida coincidiría con la II Guerra Mundial y los padres de Thom decidieron enviarlo junto con su hermano a Suiza. Thom volvió a Francia después de ayudar en la cosecha en la ciudad suiza de Romont y fue llevado a vivir a Lyon a casa de un amigo de su madre. Allí continuó con su educación y en junio de 1941 recibió el bachillerato en filosofía. Posteriormente volvió a Montbéliard con sus padres, aunque pronto tuvo que abandonarlos de nuevo para preparar su ingreso a l'École Normal Supérieure (ENS) de Paris.

Thom asistió al Lycée Saint-Louis en Paris y realizó el examen de ingreso de la ENS en 1942. Aunque no consiguió aprobar el examen de ingreso, su determinación para realizar sus estudios universitarios en la ENS lo llevó a intentarlo de nuevo el año siguiente, esta vez con más éxito. Durante su estancia en la ENS, la vida en París no era fácil, al estar ocupada por las fuerzas alemanas. Sin embargo, matemáticamente fue una época realmente influyente, al encontrarse con Henri Cartan y otros matemáticos del grupo Bourbaki. La II Guerra Mundial finalizó y Thom se licenció en la ENS en 1946.

Una vez graduado, Thom siguió los pasos de Henri Cartan (que entonces se convertiría en su director de tesis) y consiguió un puesto de investigador del CNRS en Estrasburgo, donde encontraría en el seminario de Ehresmann un lugar privilegiado donde poder introducirse en las nuevas técnicas de la topología. Además, también recibiría influencias de otros matemáticos como Koszul y Wu Wen Tsun. En 1951 finalizó su tesis doctoral titulada “Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrood”. Aunque el trabajo de la tesis fue realizado en Estrasburgo, Thom hizo la defensa en la Facultad de Ciencias de Paris. En su tesis doctoral ya encontramos los fundamentos de lo que después sería la teoría de cobordismo.

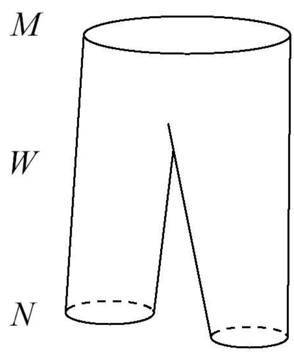
Al finalizar el doctorado, Thom consiguió una beca postdoctoral en Estados Unidos que le permitiría conocer a matemáticos de la talla de Einstein, Weyl, Steenrood, Calabi y Kodaira. En 1953, Thom volvió a Francia para trabajar como profesor en las facultades de ciencias de Grenoble y posteriormente de Estrasburgo (entre 1954 y 1963). En el International Congress of Mathematicians de 1958 celebrado en Edimburgo, Thom fue galardonado con la Medalla Fields por sus trabajos sobre la teoría del cobordismo. Este hecho le dio libertad para elegir una nueva dirección en su investigación y también un nuevo puesto de trabajo.

De hecho, en 1963 se trasladó al por entonces recién creado Institute des Hautes Études Scientifiques en Bures-sur-Yvette, una pequeña ciudad cercana a Paris. El puesto le sería ofrecido por el presidente del instituto para suceder a Dieudonné y teniendo como único colega matemático a Alexander Grothendieck. Allí permaneció como profesor permanente hasta el 1988, año en que se jubiló, y posteriormente como profesor emérito. Durante esta época, el mundo de los matemáticos parisinos se interesaba casi exclusivamente por el seminario de Grothendieck y Thom se sentía abandonado. Esto le incitó a abordar nociones más generales y a desarrollar la teoría de las catástrofes. René Thom murió el 25 de octubre de 2002 en Bures-sur-Yvette a la edad de 79 años a causa de una enfermedad vascular.

La Teoría del Cobordismo

Como ya hemos mencionado, la primera etapa de la obra matemática de Thom estuvo dedicada a desarrollar la teoría del cobordismo. Hopf describiría la definición de cobordismo de Thom como una de esas construcciones elementales y aparentemente triviales que apenas se puede esperar que rinda resultados significativos. Comparable a la definición de Hurewicz de los grupos de homotopía, se trata de una idea muy simple que resulta ser extremadamente fructífera. Es precisamente esta conexión entre cobordismo y homotopía la que Thom explota.

Basada en los problemas planteados por Poincaré y posteriormente Pontryagin sobre la clasificación topológica de las variedades diferenciables, la noción de cobordismo trata de responder a la pregunta de cuándo una variedad de dimensión n es la frontera de una variedad de dimensión $n+1$.



Ejemplo de cobordismo

Definición 1 *Dos n-variedades M, N cerradas (es decir, compactas y sin frontera) son* cobordantes *si existe una $(n+1)$-variedad W compacta cuya frontera ∂W es difeomorfa a la unión disjunta $M \sqcup N$.*

En el caso de que M, N estén orientadas, se dice que son cobordantes *(como variedades orientadas) si existe una $(n+1)$-variedad compacta orientada W tal que ∂W es difeomorfa mediante un difeomorfismo que conserva la orientación a $M \sqcup -N$, donde $-N$ denota la variedad N con la orientación contraria.*

Dada la extrema dificultad de la clasificación de las variedades, parece claro que la clasificación por cobordismo produciría un avance significativo del problema.

El conjunto de clases de cobordismo de variedades diferenciables de dimensión n, denotado por $\mathfrak{N}_n$, tienen estructura de grupo abeliano con la unión disjunta. De hecho, $\mathfrak{N} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{N}_n$ tiene estructura de $\mathbb{Z}_2$-álgebra graduada conmutativa inducida por el producto cartesiano de variedades. Análogamente, el conjunto de clases de cobordismo de variedades orientadas de dimensión n se denota por Ω_n y también tiene estructura de grupo abeliano con la unión disjunta y $\Omega = \oplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ es una $\mathbb{Z}$-álgebra graduada conmutativa.

La aportación clave de Thom consiste en traducir el problema del cobordismo en el cálculo de los grupos de homotopía estable de ciertos espacios.

TEOREMA 2 *Los grupos de cobordismo $\mathfrak{N}_n$ y de cobordismo orientado Ω_n son isomorfos a los grupos de homotopía estable*

$$\lim_{r} \pi_{n+r}(TBO_r, t_0)$$

y

$$\lim_{r} \pi_{n+r}(TBSO_r, t_0)$$

respectivamente.

En el teorema anterior, TBG denota el espacio de Thom asociado con el fibrado canónico del espacio clasificante universal del grupo G, siendo G uno de los dos grupos O_r (grupo ortogonal) o SO_r (grupo ortogonal especial). Aunque estos espacios tienen una construcción más o menos sofisticada (la cual no detallaremos aquí), sus grupos de homotopía se pueden calcular (al contrario de lo que ocurre con las esferas) y, por tanto, es posible determinar la estructura de $\mathfrak{N}$ y Ω. Una de las primeras consecuencias que se obtiene es la siguiente.

TEOREMA 3 *Para cada n, la dimensión de $\mathfrak{N}_n$ como $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial es igual al número de particiones no diádicas de n.*

Una partición de n es un conjunto finito de enteros positivos cuya suma es n. Se dice que es no diádica si ninguno de estos enteros es de la forma $2^d - 1$. Así, por ejemplo, se comprueba fácilmente que 3 no admite ninguna partición no diádica. Por tanto, $\mathfrak{N}_3$ es trivial y de aquí se deduce que toda 3-variedad cerrada es el borde de una 4-variedad (esto no ocurre en dimensión 2, en donde el espacio proyectivo real no es el borde de ninguna variedad de dimensión 3). La estructura completa de $\mathfrak{N}$ viene determinada por el siguiente resultado.

Teorema 4 $\mathfrak{N}$ *es la* $\mathbb{Z}_2$*-álgebra libre que tiene un generador en cada dimensión que no es de la forma* $2^d - 1$*. Además, dos variedades diferenciables son cobordantes si y sólo si los números característicos de Stiefel-Whitney de sus fibrados tangentes coinciden.*

En el caso de Ω, Thom sólo calcula su parte libre al tomar coeficientes racionales. La estructura completa de Ω es bastante compleja y fue determinada posteriormente por C.T.C. Wall. En este caso, además de tener en cuenta los números característicos de Stiefel-Whitney, hay que considerar también los números de Pontryagin.

Teorema 5 $\Omega \otimes \mathbb{Q}$ *es la* $\mathbb{Z}$*-álgebra libre con un generador en cada dimensión de la forma* $4k$ *correspondiente al espacio proyectivo complejo* $\mathbb{C}P^{2k}$*.*

Las aplicaciones del cobordismo en topología algebraica y diferencial son numerosas y todas ellas de gran profundidad. A mediados de los 50, Hirzebruch ya utiliza el cobordismo para calcular la signatura de la forma cuadrática de $H_{2k}(M, \mathbb{R})$ siendo M una variedad de dimensión $4k$. Esto le permitiría demostrar el teorema de Riemann-Roch generalizado para variedades algebraicas proyectivas complejas y posteriormente le conduciría al desarrollo, en colaboración con Atiyah, de la K-teoría topológica. Otros ejemplos en los que el cobordismo juega un papel fundamental son el teorema del índice, gracias al cual Atiyah y Singer han obtenido recientemente el Premio Abel, las estructuras exóticas de las esferas de Milnor, la demostración de Smale de la conjetura de Poincaré generalizada para $n \geq 5$ o, más recientemente, la teoría cuántica de campos desarrollada por Atiyah y otros a finales de los 80.

Singularidades de Aplicaciones Diferenciables

Se considera que la teoría de las singularidades de aplicaciones diferenciables tiene sus orígenes en los trabajos pioneros de H. Whitney sobre singularidades estables de aplicaciones del plano en el plano o de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{2n-1}$. Inspirado en los resultados de Morse sobre puntos críticos no degenerados de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, Whitney consigue clasificar las singularidades estables de dichas aplicaciones y además demuestra que, en tales dimensiones, cualquier aplicación diferenciable puede ser aproximada por una aplicación estable. Esto llevaría a Whitney a conjeturar que, en general, las aplicaciones estables son un subconjunto denso de las aplicaciones diferenciables propias entre variedades cualesquiera M, N.

Definición 6 *Dos aplicaciones diferenciables entre variedades* $f : M \to N$ *y* $g : M' \to N'$ *son* $\mathcal{A}$-equivalentes *(o equivalentes a derecha e izquierda) si existen difeomorfismos* $\phi : M \to M'$ *y* $\psi : N \to N'$ *tales que* $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = g$*. Esto significa que podemos pasar de una aplicación a otra mediante cambios de variable en el dominio y el codominio de las aplicaciones.*

Podríamos decir que el objetivo de la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables es la clasificación local de las aplicaciones por $\mathcal{A}$-equivalencia. En el caso regular (es decir, cuando la aplicación tiene rango máximo) la aplicación es localmente $\mathcal{A}$-equivalente a una aplicación lineal y por tanto, este caso queda totalmente resuelto. Es en el caso singular en el que la definición tiene interés y por ello a cada una de las clases de $\mathcal{A}$-equivalencia local se le llama singularidad de aplicación diferenciable. Por ejemplo, Morse demuestra que toda función C^∞ $f : M \to \mathbb{R}$ con un punto singular no degenerado $x_0 \in M$ (es decir, tal que la matriz Hessiana tiene rango máximo) es localmente $\mathcal{A}$-equivalente en dicho punto a la forma cuadrática $x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_m^2$.

Una clase especial de singularidades son las llamadas estables, que son aquellas que permanecen invariantes cuando perturbamos ligeramente la aplicación. Para esta definición, es necesario utilizar un concepto de proximidad, es decir, una topología en el espacio de aplicaciones $C^\infty(M, N)$. En la topología C^∞ de Whitney, la proximidad entre las aplicaciones depende, no sólo de la proximidad de los valores que toman, sino también de sus derivadas de cualquier orden.

Definición 7 *Una aplicación $f : M \to N$ es* estable *si existe un entorno V de f en $C^\infty(M, N)$ con la topología C^∞ de Whitney tal que toda $g \in V$ es $\mathcal{A}$-equivalente a f (es decir, si la $\mathcal{A}$-clase de f es abierta en $C^\infty(M, N)$).*

Conjetura 8 (Whitney) *El conjunto de aplicaciones estables es denso en el subespacio $C^\infty_{pr}(M, N)$ de aplicaciones propias de $C^\infty(M, N)$ con la topología C^∞ de Whitney.*

El primer contacto de Thom con este tema es la noción de genericidad de aplicaciones diferenciables, un concepto hasta entonces utilizado en geometría algebraica (sobre todo, en la escuela italiana) y que Thom exportaría a la categoría diferenciable, siguiendo algunas sugerencias de Chevalley y de Rham. Su primera aportación sería la definición del concepto de transversalidad, una noción que introduce ya en sus trabajos sobre cobordismo y que hoy en día resulta clave en prácticamente todos los ámbitos de la topología diferencial.

Definición 9 *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades y $P \subset N$ una subvariedad. Se dice que f* corta transversalmente *a P si para todo $x \in f^{-1}(P)$,*

$$f_*(T_x M) + T_{f(x)} P = T_{f(x)} N,$$

siendo $f_* : T_x M \to T_{f(x)} N$ la aplicación tangente o diferencial de f en el punto x.

Una de las propiedades básicas de la transversalidad es la siguiente generalización del teorema de la función implícita: si f corta transversalmente a la subvariedad P, entonces $f^{-1}(P)$ es también una subvariedad de la misma codimensión que P.

Para poder enunciar el teorema de transversalidad de Thom en su versión más general, utilizaremos los fibrados de jets de Ereshmann $J^k(M,N)$, los cuales son una generalización del fibrado tangente de una variedad y proporcionan un lenguaje adecuado para utilizar derivadas de orden superior en el contexto de las variedades diferenciables. Dada una aplicación diferenciable $f : M \to N$, denotamos por $j^k f : M \to J^k(M,N)$ su extensión como k-jet, que es la aplicación a cada punto $x_0 \in M$ le hace corresponder el k-jet de f en x_0, $j^k f(x_0)$.

Teorema 10 (Teorema de transversalidad de Thom) *Sean M, N variedades diferenciables y sea $W \subset J^k(M,N)$ una subvariedad. Entonces el conjunto T_W de aplicaciones $f \in C^\infty(M,N)$ tales que $j^k f : M \to J^k(M,N)$ corta transversalmente a W es residual (y por tanto denso) en $C^\infty(M,N)$ con la topología C^∞ de Whitney. Si además W es cerrado, entonces T_W es también abierto.*

Este teorema fue presentado por Thom en el Coloquio de México de 1956. Su demostración está basada en el teorema de Sard (el conjunto de valores críticos de toda aplicación diferenciable tiene medida nula) y constituye la herramienta básica para demostrar que toda aplicación puede ser aproximada por otra que cumple una cierta propiedad, la cual se traduce en transversalidad a una cierta subvariedad del fibrado de jets. Se dice entonces que dicha propiedad es una propiedad genérica.

Thom utiliza el teorema de transversalidad para intentar demostrar la conjetura de Whitney y unos años más tarde encuentra un contraejemplo, al demostrar que existe una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^9$ en $\mathbb{R}^9$ que no puede ser aproximada por una aplicación estable. Sin embargo, Thom desarrolla todo un programa para intentar traducir la estabilidad en términos de transversalidad y conjetura que el conjunto de aplicaciones topológicamente estables (cambiando difeomorfismos por homeomorfismos en la definición de $\mathcal{A}$-equivalencia) sí que es denso en $C^\infty_{pr}(M,N)$.

Dada una aplicación diferenciable $f : M \to N$, Thom define los conjuntos singulares de primer orden $S_i(f)$ como los conjuntos formados por los puntos $x \in M$ tales que f tiene rango $n - i$ en x. Estos conjuntos se pueden caracterizar por $S_i(f) = j^1 f^{-1}(S_i)$, siendo $S_i \subset J^1(M,N)$ la subvariedad formada por los 1-jets cuya parte lineal tiene rango $n - i$. Del teorema de transversalidad se deduce entonces que, si f es genérica, $j^1 f$ es transversal a estas subvariedades y, así, los conjuntos singulares $S_i(f)$ son subvariedades de M. El paso siguiente consiste en restringir f a cada una de estas subvariedades y considerar $S_{i,j}(f) = S_j(f|_{S_i(f)})$. Utilizando otra vez el teorema de transversalidad se tiene que, si f es genérica, los conjuntos $S_{i,j}(f)$ son de nuevo subvariedades y es posible iterar el proceso. Esta construcción fue posteriormente completamente formalizada por Boardman, al definir las denominadas subvariedades de Thom-Boardman $S_{i_1,\dots,i_k} \subset J^k(M,N)$, las cuales verifican $S_{i_1,\dots,i_k}(f) = j^k f^{-1}(S_{i_1,\dots,i_k})$ y, por tanto, la genericidad se deduce del teorema de transversalidad.

El programa de la estabilidad C^∞ sería completado por J. Mather a finales de los 60 y principios de los 70 en una serie de seis artículos titulados "Stability of C^∞-mappings I-VI". Entre otras cosas, Mather consigue caracterizar la estabilidad C^∞ en términos de multitransversalidad (es decir, transversalidad en el espacio de multijets) y determina los pares (m, n) tales que las aplicaciones C^∞ estables son densas en $C^\infty_{pr}(M, N)$, siendo $m = \dim M$ y $n = \dim N$. Dichos pares (m, n) son conocidos como las "nice dimensions" de Mather. Además, también demuestra que la clasificación por $\mathcal{A}$-equivalencia de las aplicaciones C^∞ estables viene determinada por la clasificación algebraica de la denominada álgebra de contacto de la singularidad.

Con respecto a la conjetura de Thom sobre la densidad de las aplicaciones topológicamente estables, el propio Thom da indicaciones de los pasos a seguir para demostrarla. Para ello, introduce una categoría intermedia entre la categoría diferenciable y la categoría PL (una variedad PL, del inglés "piecewise linear" o lineal a trozos, es una variedad topológica con un atlas maximal cuyas funciones de transición son PL): la categoría de espacios y aplicaciones estratificados. Parte de su interés proviene del lema de regularidad de Whitney, el cual asegura que todo conjunto analítico complejo admite una estratificación en el sentido de Thom. S. Łojasiewicz generalizó esto posteriormente a los conjuntos semialgebraicos y usó esta extensión para probar que cualquier conjunto semialgebraico cerrado es triangulable. El trabajo de Thom sobre conjuntos estratificados culminaría con sus famosos primer y segundo lemas de isotopía sobre trivialidad topológica de los morfismos estratificados. Dichos lemas de isotopía resultarían claves para que Mather, utilizando su propio trabajo sobre estabilidad C^∞, obtuviese también una prueba definitiva de la conjetura de Thom a principios de los 70.

Además de los resultados ya mencionados, las aportaciones de Thom en este campo han sido muchas y algunas de ellas de gran importancia en el desarrollo posterior de la teoría. Por ejemplo, Thom introduce de una forma más o menos empírica el concepto de desdoblamiento universal de una singularidad como una sección transversal del estrato de morfismos que tienen una singularidad no genérica de codimensión finita (aunque descubriría hacia 1972 que su colega Grothendieck había construido en 1962 toda una teoría de deformaciones formalmente definidas: este es un detalle que muestra el tipo de relación que había entre ambos matemáticos). Otros ejemplos son el concepto de suficiencia en los espacios de jets o la versión diferenciable del teorema de preparación, conjeturado por Thom y demostrado más adelante por B. Malgrange.

También son de destacar los trabajos de Thom sobre los aspectos globales de las singularidades de aplicaciones diferenciables. Su aportación más importante en este campo consiste en considerar un subconjunto estratificado S de $J^k(M, N)$ invariante por la acción de los grupos de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M) \times \mathrm{Diff}(N)$ (por ejemplo, las subvariedades de Thom-Boardman $S_{i_1,\ldots,i_k}$ o más generalmente, la adherencia de una órbita de dicha acción). Thom demuestra que el conjunto de puntos singulares de tipo S, es decir, $(j^k f)^{-1}(S)$, define una clase fundamental dual a un polinomio universal (denominado polinomio de Thom) en las clases de Stiefel-Whitney de M y de las imágenes por f^* de las de N.

La Teoría de las Catástrofes

La teoría de las catástrofes fue desarrollada por Thom en su última etapa e intenta proporcionar modelos para describir los procesos discontinuos que aparecen al variar continuamente los parámetros de control de un cierto sistema. El interés de Thom por estos problemas tiene su inicio en 1960, cuando ayudado por un colega físico de la Universidad de Estrasburgo diseñan ciertos experimentos de óptica geométrica para verificar físicamente la estabilidad topológica de las singularidades de aplicaciones diferenciables. La sorpresa de Thom se produce al encontrar ciertas cáusticas con singularidades estables (los umbílicos) no previstas por la teoría. A Thom le llevaría varios años entender la razón de este fenómeno (la extremalidad debida al principio de Fermat) y a introducir el concepto de estabilidad estructural.

Otro antecedente que influyó en Thom para el desarrollo de esta teoría fue el artículo de 1960 de C. Zeeman "Topology of the Brain" en donde se pone de manifiesto las enormes posibilidades de modelización de los fenómenos físicos o fisiológicos por los modelos de la dinámica clásica. También en este mismo año, Thom entra en contacto en Estados Unidos con el grupo Peixoto-Lefschetz que trabajaba sobre la estabilidad estructural de los sistemas dinámicos. Por último, hacia 1966 conoce el interés de V.I. Arnol'd y su escuela por las dinámicas hamiltonianas (clasificación de las proyecciones de las variedades lagrangianas).

En 1967, Thom publica la lista de las siete catástrofes elementales, o clasificación de las singularidades de funciones diferenciables de codimensión ≤ 4, que son las piezas centrales de la teoría de las catástrofes. El concepto de codimensión significa, de una forma un poco intuitiva, el número mínimo r de parámetros necesarios para que una singularidad aparezca en una familia r-paramétrica genérica de funciones. Equivalentemente, la codimensión puede interpretarse como la "codimensión" de la $\mathcal{A}$-clase en el espacio de funciones (de manera que las funciones de Morse o estables son las de codimensión 0).

Teorema 11 *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función C^∞ que posee una singularidad degenerada de codimensión ≤ 4 en $x_0 \in M$. Entonces, f es localmente $\mathcal{A}$-equivalente en x_0 a uno de los siguientes tipos:*

1. *el pliegue:* $x_1^3 \pm x_2^2 + \cdots \pm x_m^2$,
2. *la cúspide:* $x_1^4 \pm x_2^2 + \cdots \pm x_m^2$,
3. *la cola de milano:* $x_1^5 \pm x_2^2 + \cdots \pm x_m^2$,

4. *la mariposa:* $x_1^6 \pm x_2^2 + \cdots \pm x_m^2$,

5. *el umbílico elíptico:* $x_1^3 - x_1x_2^2 \pm x_3^2 + \cdots \pm x_m^2$,

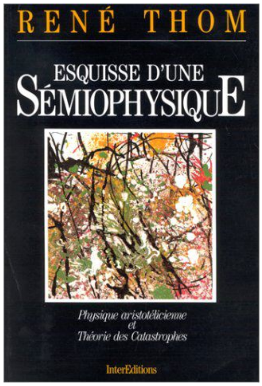
6. *el umbílico hiperbólico:* $x_1^3 + x_1x_2^2 \pm x_3^2 + \cdots \pm x_m^2$,

7. *el umbílico parabólico:* $x_1^2x_2 + x_2^4 \pm x_3^2 + \cdots \pm x_m^2$.

Podríamos decir que la teoría de las catástrofes comienza con el libro "Stabilité structurelle et morphogenèse", escrito por Thom durante los años 1966–67 y publicado más tarde en 1972. En este libro, Thom explota sistemáticamente las posibilidades de modelización de fenómenos controlados por una función potencial estructuralmente estable que depende, a lo sumo, de los cuatro parámetros espacio temporales como parámetros de control. De esta forma, las únicas singularidades que aparecen son las siete catástrofes elementales antes mencionadas. Thom consigue así establecer una fuerte relación entre las singularidades de aplicaciones diferenciables y la "morfogénesis" o nacimiento de las formas en la Naturaleza, con aplicaciones en los ámbitos más diversos como física, biología, lingüística, etc.

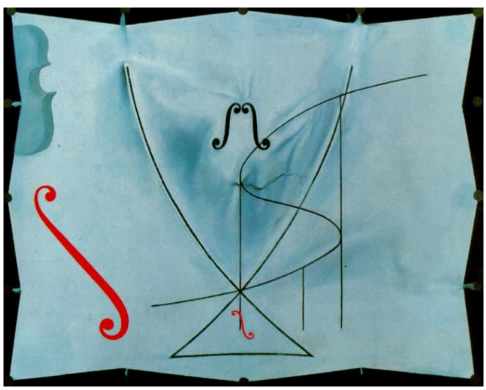
En los años 1972–73, Zeeman se convierte en uno de los principales defensores de esta teoría, al aportar una considerable extensión a la teoría general de sistemas, siendo en los años 1974–75 cuando la teoría de las catástrofes conoce sus mayores éxitos mediáticos. Sin embargo, a partir de 1975–76 comenzarían a aparecer las primeras críticas, muchas de ellas justificadas, dado el carácter de ineficacia predictiva de los modelos de la teoría de las catástrofes. Incluso el propio nombre elegido por Thom para esta teoría resulta confuso, pues en ciertos medios de comunicación esta teoría aparecería asociada con la predicción de terremotos u otras catástrofes naturales. Quizá hubiese sido más apropiado llamarla teoría de las transiciones, ya que, en realidad, lo que estos modelos proporcionan son herramientas para interpretar los cambios bruscos o discontinuos que se producen al variar de una forma continua los parámetros de control. De hecho, a finales de los 80, Arnol'd y otros matemáticos de la escuela rusa acuñan el término "perestroika" para denominar a estos tipo de fenómenos, en clara referencia a la transición política ocurrida en la U.R.S.S.

Esta controversia sobre la utilidad práctica de la teoría de las catástrofes ha ido diluyéndose con el tiempo, si bien durante los años 1984–85 encontramos una tímida reaparición de estos modelos en la literatura aplicada. No obstante, lo que no se puede negar es que esta teoría supuso un verdadero cambio en la forma de entender las matemáticas, basado sobre todo en la búsqueda de la interdisciplinariedad y del pensamiento cualitativo propugnado por Thom. Posteriormente, encontramos estos elementos en otros modelos como la teoría del caos o los fractales. Durante la última época de su vida, la obra de Thom es cada vez menos matemática y más filosófica, como muestra una de sus últimas publicaciones "Esquisse d'une Sémiophysique".



Portada del libro "Esquisse d'une Sémiophysique"

Por último, no podíamos finalizar esta nota sin dejar de mencionar la influencia de Thom en el pintor catalán Salvador Dalí, dado que este año se celebra el centenario de su nacimiento. La relación entre Thom y el maestro del surrealismo comienza en 1978, año en que Dalí es nombrado académico en París y conoce al matemático francés. Dalí queda realmente fascinado por las ideas de Thom, llegando a manifestar que "no es posible encontrar una noción más estética que la reciente teoría de las catástrofes de René Thom, que se aplica tanto a la geometría del umbílico parabólico como a la deriva de los continentes". El interés de Dalí por la teoría de las catástrofes y su amistad con Thom le lleva dedicar la última serie de sus pinturas en el año 1983 a este tema, con títulos como "El rapto topológico de Europa, Homenaje a René Thom", "La cola de milano", etc. , así como algunos manuscritos como el "Tratado de escritura catastrofeiforme", de 1982.



"La cola de milano", S. Dalí (1983)

REFERENCIAS

[1] M. F. ATIYAH, The impact of Thom's cobordism theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), posted on March 24, 2004, PII S 0273-0979(04)01022-5 (to appear in print).

[2] A. HAEFLIGER, Un aperçu de l'oeuvre de Thom en topologie différentielle (jusqu'en 1957), *Pub. Mat. IHES* **68** (1988), 13–18.

[3] V. NAVARRO, René Thom (1923–2002). *SCM Not.* No. 18 (2003), 3–6.

[4] D. SULLIVAN, René Thom's work on geometric homology and bordism, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), posted on April 13, 2004, PII S 0273-0979(04)01026-2 (to appear in print).

[5] B. TEISSIER, Travaux de Thom sur les singularités, *Pub. Mat. IHES* **68** (1988), 19–25.

[6] R. THOM, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **69**, no. 3, (1952), 109–182.

[7] R. THOM, Quelques propiétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.* **28** (1954), 17–86.

[8] R. THOM, Les singularités des applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1955-56), 43–87.

[9] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 240–284.

[10] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogenèse. Essai d'une théorie générale des modèles*, Mathematical Physics Monograph Seires. W.A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972.

[11] R. THOM, Liste de publications (écrits mathématiques), *Pub. Mat. IHES* **68** (1988), 9–11.

[12] R. THOM, Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique: un bilan, *Pub. Mat. IHES* **70** (1989), 199–214.

Juan J. Nuño-Ballesteros
Departament de Geometria i Topologia
Universitat de València
Campus de Burjassot, 46100 Burjassot
Correo electrónico: `nuno@uv.es`