El Diablo de los Números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo

Endre Szemerédi, Premio Abel 2012

por

Gábor Lugosi y Oriol Serra

El pasado 21 de marzo, el presidente de la Academia Noruega de Ciencias y Letras, Nils Christian Stenseth, anunció el ganador de la edición 2012 del Premio Abel, considerado la máxima distinción científica en matemáticas y dotado con un millón de dólares. El galardón se ha otorgado al matemático húngaro Endre Szemerédi, miembro del *Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet* de Budapest y profesor en la *Rutgers University* en New Jersey, EEUU. La cita del premio dice:

> Por sus contribuciones fundamentales a la matemática discreta y a las ciencias de la computación y en reconocimiento del profundo y duradero impacto de estas contribuciones a la teoría aditiva de números y a la teoría ergódica.

Quizás uno de los resultados más célebres de Szemerédi sea el teorema que lleva su nombre sobre la existencia de progresiones aritméticas en conjuntos de enteros de densidad positiva. Pero la contribución fundamental de Szemerédi consiste más bien en un original y peculiar modo de pensar las matemáticas, que uno de los miembros del comité del premio, Terence Tao [49], sintetizaba en los siguientes términos en el ICM que se celebró en Madrid:

> Un teorema famoso de Szemerédi afirma que todos los conjuntos de enteros con densidad superior positiva contienen progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Hay distintas demostraciones de este profundo teorema, pero todas ellas están basadas en una dicotomía fundamental entre estructura y aleatoriedad, lo que a su vez conduce a la descomposición de cualquier objeto en una componente estructurada y una componente aleatoria.

Convertir este principio genérico en un instrumento eficaz capaz de hacer emerger resultados precisos con sentido matemático es una de las contribuciones de la *mente irregular* de Szemerédi, cuyo valor para la historia de las matemáticas y las ciencias

Endre Szemerédi.

de la computación ha sido objeto del máximo reconocimiento y ha unido su nombre a la lista de los once destacadísimos matemáticos que han recibido el Premio Abel hasta ahora.

Endre Szemerédi es autor de más de 200 artículos, la mayoría de los cuales han tenido un impacto profundo en la investigación matemática de los últimos cincuenta años, y su ritmo de trabajo sigue manteniéndose, a sus 71 años, en plena actividad.

En este artículo se pretende mostrar algunas de sus contribuciones más significativas. En primer lugar el mencionado *Teorema de Szemerédi* en la sección 1. La demostración de Szemerédi de este teorema sigue siendo considerada como uno de los ejercicios más sofisticados de razonamiento combinatorio hasta la fecha. Uno de sus ingredientes, el denominado *Lema de Regularidad*, ha sido singularizado como un potente instrumento que ha encontrado múltiples aplicaciones y ha sido analizado desde muy diversas perspectivas, algunas de las cuales se discuten en la sección 2. La sección 3 trata una de las consecuencias del Lema de Regularidad, el denominado *Lema de Eliminación*, que ha dado lugar a demostraciones más sencillas del teorema de Szemerédi y a extensiones del teorema a grupos finitos. Las aplicaciones más naturales del Lema de Regularidad se encuentran en la propia teoría de grafos. En la sección 4 se discuten algunas contribuciones de Szemerédi en esta área. En la sección 5 se discuten algunas contribuciones adicionales de Szemerédi a la teoría de números. A continuación, en la sección 6 se trata una de las contribuciones más significativas de Szemerédi a la teoría de Ramsey: la determinación de los números de Ramsey $R(3, n)$. La última sección 7 se dedica al aspecto biográfico y humano de Szemerédi.

En este artículo se omiten contribuciones sustanciales de Szemerédi a la informática teórica, en particular aquellas relativas a técnicas innovadoras basadas en algoritmos aleatorios y su desaleatorización, iniciadas en el célebre artículo de Ajtai, Komlós y Szemerédi [2] donde se describe un algoritmo rápido paralelizado para el problema básico de ordenación. En Gowers [19] se puede encontrar una breve descripción de estas contribuciones. Tampoco se tratan sus aportaciones a la geometría discreta, que parten de otro célebre resultado, el teorema de Trotter-Szemerédi [45], en el que se establecen cotas óptimas para el número de cruces entre rectas en el plano, y que han derivado en numerosas aplicaciones. En particular al problema de Erdős sobre el número de distancias distintas que pueden tener n puntos en el plano, un problema que ha sido resuelto muy recientemente [22].

1. Progresiones aritméticas

En 1928, Göttingen se había convertido en La Meca de la investigación matemática europea, atrayendo a muchos de los matemáticos que marcarían la historia de la primera mitad del siglo XX. Uno de los visitantes en el verano de 1928 fue el joven van der Waerden, que conoció allí un problema de enunciado simple que estaba resistiendo los esfuerzos de los matemáticos más ilustres concentrados en el lugar: se trataba de probar que, en cualquier partición finita de los enteros, alguna de las partes contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Van der Waerden consiguió demostrar el resultado que ahora lleva su nombre. El artículo de Ignasi Mundet [34], publicado en 2011 en esta misma sección, trata de forma exhaustiva este resultado y sus derivaciones hasta la actualidad.

El teorema de van der Waerden es uno de los fundamentos de lo que se conoce hoy como teoría de Ramsey aritmética. Esta denominación se hace en relación al teorema de Ramsey, cuyo enunciado se puede resumir de forma imprecisa como el hecho de que, para ciertas categorías de objetos, cualquier partición finita de un objeto contiene una subestructura dada en una de sus partes. El teorema original que da nombre a la teoría fue probado por otro peculiar matemático, Frank Plumpton Ramsey, en 1930 (véase [7], por ejemplo, para una historia de esta teoría). Pál Erdős y György Szekeres probaron un resultado análogo, de forma independiente, en 1935, y de hecho el desarrollo de la teoría de Ramsey se debe en gran parte al empuje de Erdős. No es de extrañar que Erdős, fundamentalmente interesado en la teoría de números, relacionara el teorema de van der Waerden con el clásico problema de la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas en el conjunto de los números primos.

Como había ocurrido en otros problemas aritméticos de carácter combinatorio, Erdős enfocó el problema atendiendo más a propiedades cualitativas muy generales que a las propiedades aritméticas intrínsecas de la sucesión en estudio. Como un primer paso, Erdős y Turán conjeturaron en 1936 que la existencia de progresiones aritméticas de una longitud dada k en un conjunto de enteros está asegurada simplemente por razones de densidad: un conjunto de enteros con densidad superior positiva debe contener una progresión aritmética de longitud dada k. La medida de la densidad de un conjunto A de enteros se refiere aquí a la densidad superior,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n},$$

es decir, al límite superior de la proporción de elementos de A en intervalos de la forma $[1,n]$. El teorema de van der Waerden es una consecuencia inmediata de esta conjetura, ya que en cualquier partición finita de los enteros alguna de las partes debe tener densidad superior positiva.

Veinte años después de haber sido formulada, Klaus Roth obtuvo el primer resultado positivo de la conjetura de Erdős-Turán para progresiones de longitud tres. Roth usa una versión del método del círculo de Hardy y Littlewood junto con una idea que será utilizada más tarde por Szemerédi: el resultado es trivialmente cierto para conjuntos de enteros de densidad grande, próxima a uno, digamos. Se trata entonces de analizar la densidad máxima para la que pudiera aparecer un posible contraejemplo y llegar a contradicción viendo que el conjunto debe tener entonces densidad estrictamente mayor en alguna progresión aritmética larga. El uso del análisis de Fourier para obtener el resultado limitaba la aplicación, al menos en aquel momento, a progresiones aritméticas de longitud tres.

Szemerédi extendió primero el teorema de Roth a progresiones aritméticas de longitud 4, en 1969, utilizando métodos combinatorios. Seis años más tarde, en 1975, en una sesión abarrotada en el *Colloque de Théorie de Graphes et Combinatoire* en Marseille y con el críptico título *On certain sets of integers*, Endre Szemerédi presentó la demostración de la conjetura de Erdős-Turán para progresiones aritméticas de longitud arbitraria, lo que se conoce actualmente como teorema de Szemerédi.

Teorema 1 (Teorema de Szemerédi). *Todo conjunto de enteros con densidad superior positiva contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud k para cada entero k.*

Erdős tenía la costumbre de ofrecer recompensas por los problemas que proponía, cuyo valor daba una idea de su dificultad. Para la conjetura de Erdős-Turán había ofrecido la muy respetable cantidad de 1000 \$. Llegado el momento, sus dificultades financieras le permitieron satisfacer solo la mitad de este importe, a pesar de lo cual es la mayor cantidad que nunca llegó a tener que pagar por la solución de uno de sus problemas.

La demostración de Szemerédi del teorema que lleva su nombre sigue siendo considerada una obra maestra de razonamiento combinatorio. Quizás el diagrama que acompaña el artículo en el que se presenta la demostración [43], y que se reproduce en la figura 1, da una idea de la complejidad del razonamiento.

Uno de los elementos de la demostración, que se ha convertido en una herramienta básica en diversos ámbitos, incluyendo la teoría de grafos, la teoría de la computación, la teoría de números o la geometría discreta, es el denominado *Lema de Regularidad de Szemerédi.* En la sección 2 se discute el enunciado y algunas aplicaciones del Lema de Regularidad. En la sección 3 se indica cómo puede usarse para obtener de forma bastante directa una demostración del teorema de Roth para progresiones de longitud tres.

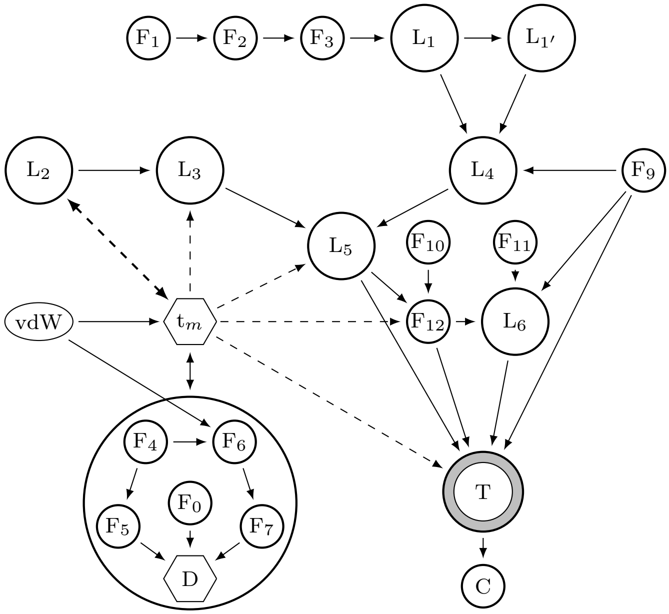

Figura 1: El esquema representa el diagrama de flujo aproximado de la demostración del teorema de Szemerédi [43, página 202]. Los diversos símbolos tienen el significado siguiente: $\mathrm{F}_k \equiv$ Hecho k, $\mathrm{L}_k \equiv$ Lema k, T $\equiv$ Teorema, C $\equiv$ Corolario, D $\equiv$ Definiciones de B, S, P, α, β, etcétera, $\mathrm{t}_m \equiv$ Definición de t_m, vdW $\equiv$ teorema de van der Waerden, $\mathrm{F}_0 \equiv$ «si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es subaditiva, entonces existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$».

Quizás la complejidad de la demostración del teorema de Szemerédi fue el estímulo que animó a otros matemáticos a encontrar una nueva demostración del teorema. De forma sorprendente, Hillel Furstenberg [14] obtuvo poco después, en 1977, una demostración del teorema de Szemerédi basada en la teoría ergódica. El teorema de recurrencia de Furstenberg establece que, dado un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y un entero k, para cada operador T invertible que conserva la medida y cada conjunto A de medida positiva existen infinitos naturales n tales que

$$\mu(A \cap T^n A \cap T^{2n} A \cap \cdots \cap T^{(k-1)n} A) > 0.$$

Furstenberg estableció que el enunciado anterior es lógicamente equivalente al teorema de Szemerédi a través de lo que se denomina hoy el *principio de correspondencia de Furtsenberg,* introduciendo una topología en los enteros y asociando a cada conjunto de enteros de densidad positiva un conjunto de medida positiva en cierto espacio de probabilidad. Las subsiguientes generalizaciones de este teorema de recurrencia dieron lugar a numerosas aplicaciones a la teoría de Ramsey y, en particular, a la siguiente versión d-dimensional del teorema de Szemerédi obtenida por Furtsenberg y Katznelson [15], para la cual solo se dispuso de una demostración «ergódica» durante muchos años.

Teorema 2 (Teorema de Szemerédi d-dimensional). *Sean* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{N}^d$. *Para cualquier conjunto* A *de densidad superior de Banach positiva en* $\mathbb{N}^d$ *existen infinitas parejas* $(a, r) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ *tales que* $a + rv_1, \ldots, a + rv_k \in A$.

El teorema de Szemerédi se reduce al caso $d = 1$ y $v_i = i - 1$, $i = 1, \ldots, k$. El impulso que dio el teorema de Szemerédi a esta fructífera conexión con la teoría ergódica se encuentra reflejado también en la nominación del premio Abel a Szemerédi.

En 2001, Gowers [17] obtuvo una tercera demostración del teorema de Szemerédi por medio del análisis de Fourier, extendiendo así el camino iniciado por Roth para las progresiones de longitud tres. Para ello Gowers introduce herramientas innovadoras en el análisis de Fourier clásico, como las ahora llamadas *normas de Gowers*, así como otras herramientas combinatorias, como por ejemplo una versión refinada del teorema de Balog-Szemerédi (de nuevo Szemerédi en acción), que se conoce hoy como teorema de Balog-Gowers-Szemerédi. La ventaja de la demostración analítica de Gowers es que proporciona los mejores resultados cuantitativos sobre la menor densidad para la que se puede garantizar la existencia de progresiones aritméticas. Erdős denota por $r_k(n)$ el tamaño máximo de un conjunto de enteros en el intervalo $[1, n]$ que no contiene progresiones aritméticas de longitud k. El teorema de Szemerédi establece que

$$r_k(n) = o(n) \quad (n \to \infty)$$

para cualquier k. La demostración de Gowers proporciona

$$r_k(n) < \frac{n}{(\log\log n)^{c(k)}}, \quad c(k) = 2^{-2^{k+9}},$$

que, para k arbitrario, es la mejor cota que se conoce. Para apreciar el valor de este resultado cuantitativo debe recordarse que las cotas involucradas en las demostraciones del teorema de van der Waerden crecen de forma astronómica, en realidad de forma inevitable, como también probó Gowers [16], aunque la cota anterior reduce su valor en varios órdenes de magnitud.

Como era habitual en Erdős, establecido el teorema de Szemerédi planteó un nuevo reto en la misma dirección: ¿es cierto que cualquier sucesión de enteros $a_1 < a_2 < \cdots$ para la que la serie de sus inversos

$$\sum_i \frac{1}{a_i}$$

diverge contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas? Este es aún un problema abierto cuya respuesta positiva resolvería inmediatamente el clásico problema de la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas en la sucesión de los números primos. De todos modos, combinando de nuevo las herramientas proporcionadas por Szemerédi junto con otros ingredientes, Green y Tao [21] probaron en 2005 su ahora célebre resultado que afirma que cualquier sucesión de primos con densidad relativa positiva en el conjunto de primos contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Este resultado es la culminación del trabajo iniciado por Roth y Szemerédi en este problema.

Existe aún una cuarta demostración del teorema de Szemerédi, de naturaleza puramente combinatoria y relacionada con su Lema de Regularidad. Nos extenderemos en esta demostración en la sección siguiente.

2. El Lema de Regularidad

El Lema de Regularidad, concebido por Szemerédi como una herramienta para demostrar su teorema sobre progresiones aritméticas, ha resultado ser un instrumento de múltiples aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas. La aplicación de este instrumento conforma lo que se denomina hoy el *método de regularidad* de Szemerédi.

El Lema de Regularidad se expresa en el lenguaje de la teoría de grafos, unos de los elementos más simples del universo matemático junto a los números y los conjuntos. Recordemos que un grafo es simplemente un conjunto de pares de elementos de un conjunto dado, que expresa una relación binaria simétrica entre sus elementos. De acuerdo con el imaginario habitual, que permite visualizar los grafos, los elementos del conjunto base V son los vértices del grafo y el conjunto E de pares de vértices son sus aristas, de modo que un grafo es un par $G = (V, E)$. Si G tiene n vértices, su número de aristas es, como mucho, $\binom{n}{2}$.

El Lema de Regularidad establece que todo grafo suficientemente grande se puede aproximar por un grafo «aleatorio» en un cierto sentido que podemos hacer preciso. Consideremos para empezar un grafo bipartito, es decir, su conjunto de vértices V está partido en dos subconjuntos $V = A \cup B$ y todas las aristas tienen exactamente un vértice en cada uno de los dos conjuntos. Supongamos que escogemos cada uno de los pares $(a, b) \in A \times B$ con probabilidad p para formar parte del conjunto de aristas de G. El número esperado de aristas en G es entonces $p|A| \cdot |B|$, y la densidad esperada de aristas del grafo es

$$p = \frac{|E(G)|}{|A| \cdot |B|}.$$

Además, para cualquier par de subconjuntos $X \subset A$ e $Y \subset B$, la densidad esperada del subgrafo inducido en $X \cup Y$ es también

$$p = \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|},$$

donde $e(X, Y)$ denota el número de aristas de G con un vértice en X y uno en Y.

Consideremos ahora un grafo arbitrario G y dos conjuntos disjuntos $A, B \subset V$. La densidad del par de conjuntos en G se define como

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Para un número real $\epsilon > 0$, se dice que el par (A, B) es *ϵ-regular* si

$$\forall X \subset A,\ \forall Y \subset B,\ |X| \geq \epsilon|A|,\ |Y| \geq \epsilon|B|,$$

se satisface que

$$|d(A,B) - d(X,Y)| \leq \epsilon.$$

Es decir, la densidad de cualquier par de subconjuntos suficientemente grandes (se podría decir de densidad positiva) de A y B difiere en menos de ϵ de la densidad del par (A,B). Los grafos bipartitos aleatorios definidos anteriormente tienen ciertamente la propiedad de que, con alta probabilidad, son ϵ-regulares. De este modo se puede decir que un par ϵ-regular se comporta aproximadamente como un grafo aleatorio bipartito.

La ventaja del modelo de grafos aleatorios es que su análisis es de gran simplicidad, al menos para muchos de los problemas naturales que aparecen en la teoría de grafos. Esta ventaja se mantiene con el grado de aproximación definido por el parámetro ϵ en los pares ϵ-regulares. El Lema de Regularidad establece que, fijado $\epsilon > 0$, cualquier grafo arbitrario puede ser dividido en un número finito de partes, la mayoría de las cuales forman pares ϵ-regulares. Más específicamente,

TEOREMA 3 (Lema de Regularidad, Szemerédi [44]). *Para cada $\epsilon > 0$ y cada entero positivo m existen $M = M(\epsilon, m)$ y $N = N(\epsilon, m)$ con la siguiente propiedad. Cualquier grafo G con $n \geq N$ vértices admite una partición del conjunto de vértices $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ en un número de partes*

$$m \leq k \leq M$$

de tamaños casi iguales

$$|V_i - V_j| \leq 1,$$

tales que todos los pares (V_i, V_j), salvo ϵk^2 de ellos, son ϵ-regulares.

El enunciado del Lema de Regularidad captura de forma precisa una propiedad universal que permite desarrollar técnicas de análisis de gran eficacia. La elegancia de su formulación, en la que la aproximación se describe en términos de un único parámetro ϵ (el papel del entero k tiene el objeto de que las partes de la partición regular no sean demasiado pequeñas) es un ejercicio de creatividad que de nuevo se reconoce en la distinción del premio Abel.

Se puede dar un contenido más preciso al Lema de Regularidad interpretándolo como un resultado que establece que cualquier grafo se puede aproximar bien por un grafo aleatorio. Consideremos la clase $\mathcal{R}$ de grafos aleatorios $R(v, k, \{p_{i,j}, 1 \leq i < j \leq k\})$ cuyo conjunto de vértices es la unión disjunta $V_1, \ldots, V_k$ de k conjuntos de tamaño v, y sus aristas se escogen de forma independiente para cada par $V_i \times V_j$ con probabilidad p_{ij}. El Lema de Regularidad se puede enunciar entonces diciendo que cualquier grafo suficientemente grande se puede aproximar por un grafo de la clase $\mathcal{R}$ con un grado de aproximación arbitrario.

Una primera observación es que si $\{G_n, n \geq 1\}$ es una familia de grafos con n vértices y $o(n^2)$ aristas (por ejemplo un número de aristas lineal en n), el Lema de Regularidad simplemente afirma que los grafos de la familia se pueden aproximar por grafos nulos (sin aristas). En otras palabras, el Lema de Regularidad resulta útil solo para familias de grafos *densos*, es decir, con una proporción positiva del número máximo $\binom{n}{2}$ de aristas. El lema tiene también un enunciado trivial si las partes tienen cardinal uno, puesto que entonces todos los pares son trivialmente ϵ-regulares (la familia de conjuntos con al menos $\epsilon|V_i|$ vertices se reduce a V_i).

Las constantes M y N cuya existencia asegura el enunciado son, en términos cuantitativos, relativamente pobres. El sentido de la constante M está en que acota superiormente el número de partes en una partición regular y por tanto acota inferiormente su tamaño. Sin embargo, como observó también Gowers [16], la cota que se obtiene para M es inevitablemente alta, una torre $2^{2^{2^{\cdots}}}$ de altura proporcional a ϵ^{-5}.

Estas observaciones, sin embargo, no eliminan la eficacia del lema. Su universalidad se manifiesta no solo en las aplicaciones sino también en las conexiones que se van estableciendo con otras áreas de las matemáticas.

Lovász y Szegedy [32] han desarrollado un programa ambicioso en el que el Lema de Regularidad se sitúa en la perspectiva del análisis, dando tres interpretaciones analíticas del Lema de Regularidad. En esta perspectiva se considera el espacio $\mathcal{W}$ de las funciones medibles acotadas $W : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Para una partición $\{S_1, \ldots, S_m\}$ de $[0,1]$, las funciones de $\mathcal{W}$ constantes en las celdas $S_i \times S_j$ son funciones escalonadas. Un grafo se identifica de manera natural con funciones escalonadas que toman valores en $\{0,1\}$ asociadas a particiones en las que todos los S_i tienen la misma medida. Se define entonces la norma

$$\|W\|_\square = \sup_{S,T \subset [0,1]} \left| \int_{S\times T} W(x,y)\, dx\, dy \right|$$

en $\mathcal{W}$. El Lema de Regularidad (en realidad, una versión débil del mismo) se puede expresar entonces de la forma siguiente. Sea $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ el conjunto de las funciones que toman valores en $[0,1]$.

Teorema 4 (Lema de Regularidad). *Para cada función $W \in \mathcal{W}_0$ y cada $\epsilon > 0$ existe una función escalonada $W' \in \mathcal{W}_0$ con a lo sumo $\lceil 2^{2/\epsilon^2} \rceil$ escalones tal que*

$$\|W - W'\|_\square \leq \epsilon.$$

De hecho se puede probar que el conjunto de funciones escalonadas correspondientes a grafos es denso en $\mathcal{W}_0$ y que, aumentando a $2^{20/\epsilon^2}$ el número de escalones, la función W' se puede tomar como una función cuyo valor en cada celda es el promedio de los valores de W en dicha celda.

Con la misma notación, Lovász y Szegedy [32] dan también la siguiente interpretación topológica del Lema de Regularidad. Consideremos el conjunto Φ de las aplicaciones biyectivas $\phi : [0,1] \to [0,1]$ que conservan la medida. Para cada $W \in \mathcal{W}$ definamos $W^\phi(x,y) = W(\phi(x), \phi(y))$. Entonces,

$$\delta_\square(U,W) = \inf_{\phi\in\Phi} \|U^\phi - W\|_\square, \quad U, W \in \mathcal{W},$$

resulta ser una distancia en $\mathcal{W}$ si identificamos las funciones U, W con $\delta_\square(U,W) = 0$. Si $\mathcal{X}_0$ denota el espacio métrico que se obtiene de $\mathcal{W}_0$ con esta identificación y la distancia $\delta_\square$, entonces el Lema de Regularidad se enuncia como:

Teorema 5 (Lema de Regularidad). *El espacio métrico $\mathcal{X}_0$ es compacto.*

Las interpretaciones analítica y topológica descritas inician la teoría de los grafos límite, que permite analizar cualquier secuencia infinita de grafos a través de sus subsucesiones convergentes. La identificación de las funciones que pueden aparecer como límites de secuencias de grafos plantea problemas topológicos y analíticos de gran riqueza que constituyen una activa rama de la teoría de grafos en la actualidad, véase por ejemplo [33, 8].

Una aproximación distinta al Lema de Regularidad se debe a Tao [48], en la que se utilizan herramientas de probabilidad y teoría de la información. Dado un grafo bipartito denso $G = (V_1 \cup V_2, E)$ se escogen con distribución uniforme dos vértices, x_1 en V_1 y x_2 en V_2. Entonces el conjunto de aristas E se interpreta como el suceso que $(x_1, x_2) \in E$, y se identifica el conjunto como un elemento de la σ-álgebra asociada al par de variables aleatorias x_1, x_2. Así pues, la densidad del grafo es la probabilidad de E en el correspondiente espacio de probabilidad.

Si G es un grafo aleatorio, los sucesos dados por dos subconjuntos $A_1 \subset V_1$ y $A_2 \subset V_2$ (es decir, que $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$) están incorrelados con E, lo que se expresa como el hecho que la densidad de aristas en el subgrafo inducido por $A_1 \times A_2$ es la misma que la densidad global del grafo. En el caso opuesto, por ejemplo si G contiene todas las aristas de $A_1 \times A_2$ y ninguna arista adicional, entonces E está determinado por dos bits de información: basta con saber que $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$.

El Lema de Regularidad se expresa entonces diciendo que, dadas dos variables aleatorias x_1, x_2 y un suceso E, existen variables aleatorias Z_1, Z_2 con poca entropía (bajo nivel de complejidad) determinadas por x_1 y x_2, respectivamente, de modo que E es aproximadamente independiente de x_1 y x_2 cuando se condiciona a Z_1, Z_2. Es decir, para las variables condicionadas se ve el grafo como si fuera (aproximadamente) aleatorio, y las variables Z_1, Z_2 requieren poca información (responden a una estructura). El enunciado preciso de esta versión del Lema de Regularidad requiere una preparación que está aquí fuera de lugar. Sin embargo, es esta versión la que permite obtener generalizaciones sustanciales del Lema de Regularidad relacionadas con sus aplicaciones al teorema de Szemerédi y la versión para primos de Green y Tao.

3. El lema de eliminación

Una de las consecuencias más utilizadas del Lema de Regularidad es lo que se denomina *lema de la eliminación.* Fijemos un grafo H con h vértices. El grafo completo K_n (es decir, el que contiene todos los posibles pares de vértices como aristas) contiene $cn^h + o(n^{h-1})$ copias de H para una cierta constante $c < 1$. En efecto, cada uno de los $\binom{n}{h} = n^h/h! + o(n^{h-1})$ subconjuntos de tamaño h puede alojar, a lo sumo, $h!$ copias de H. El lema de eliminación dice que un grafo arbitrario G suficientemente grande, o bien contiene una proporción positiva $c'n^h$ de copias de H, o bien es próximo a un grafo que no contiene ninguna copia de H, en el sentido de que eliminando $o(n^2)$ aristas se pueden eliminar todas las copias de H que contiene.

Este lema apareció por primera vez, referido a triángulos, en un artículo de Ruzsa y Szemerédi [39] y estaba enunciado como sigue.

Lema 6 (Lema de eliminación, Ruzsa-Szemerédi [39]). *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualquier grafo $G = (V, E)$ con n vértices y a lo sumo δn^3 triángulos contiene un conjunto $E' \subset E$ de a lo sumo ϵn^2 aristas tal que el grafo $G' = (V, E \setminus E')$ es libre de triángulos.*

La demostración del lema de eliminación sigue un proceso estándar en lo que se denomina método de regularidad, pero que por su carácter más bien técnico se omite aquí. Una de las motivaciones de Ruzsa y Szemerédi era la de dar una demostración directa del teorema de Szemerédi para progresiones de longitud tres que evitara la complejidad de la demostración original, pero ilustrara el uso de las técnicas combinatorias inherente en el mismo. De hecho la demostración del teorema es ahora bien simple.

Sea $A \subset [1, n]$ con $|A| = cn$. Construimos un grafo tripartito G con conjunto de vértices $V_1 = [1, n]$, $V_2 = [1, 2n]$ y $V_3 = [1, 3n]$. Cada vértice $i \in V_1$ es adyacente a los vértices de la forma $i + a \in V_2$ para cada $a \in A$. Análogamente, cada vértice de la forma $i \in V_2$ es adyacente a los vértices de la forma $i + a \in V_3$ para cada $a \in A$. Finalmente, cada vértice de la forma $i \in V_3$ es adyacente a los vértices de la forma $i - 2a \in V_1$ para cada $a \in A$ tal que $i - 2a \in [1, n]$.

Cada triángulo en el grafo corresponde a una solución de la ecuación $x+y-2z = 0$ con $x, y, z \in A$, y entonces los elementos de la terna (x, y, z) son los términos de una progresión aritmética de longitud tres en A, que puede ser degenerada, es decir, con $x = y = z$. En esta posibilidad reside precisamente la fuerza del argumento: el grafo G contiene $n|A| = cn^2$ triángulos, correspondientes a estas progresiones aritméticas degeneradas; si el grafo no contiene otros triángulos, es decir, alguna progresión aritmética genuina de longitud tres, el lema de eliminación concluye que se pueden eliminar todos los triángulos eliminando a lo sumo ϵn^2 aristas para un $\epsilon > 0$ que tiende a cero con $n \to \infty$. Pero los triángulos correspondientes a progresiones aritméticas degeneradas son disjuntos en aristas, y para eliminarlos hay que suprimir al menos una arista para cada triángulo, lo que, para c fijo y n grande, lleva a una contradicción.

La asombrosa simplicidad y elegancia del argumento anterior ilustra de algún modo el estilo matemático de toda la escuela húngara en general y de Szemerédi en particular.

La aparición de este resultado sugirió la posibilidad de obtener una demostración análoga para progresiones aritméticas de longitud k arbitraria. El mismo esquema se puede adaptar si en lugar de grafos se consideran hipergrafos. Un hipergrafo es simplemente un par $H = (V, E)$ de conjuntos de vértices y aristas, excepto que las aristas son ahora subconjuntos de tamaño arbitrario en vez de pares de vértices. En realidad el objeto interesante es el de los hipergrafos k-uniformes, en los que las aristas tienen todas tamaño k. Frankl y Rödl [13] propusieron un programa que condujese a una nueva demostración del teorema de Szemerédi a través del lema de eliminación, y marcaron como objetivo la obtención de un Lema de Regularidad para hipergrafos. Este programa fue emprendido por Elek y Szegedy [11], por Gowers

[18], por Rödl y Skokan [37, 38], y por Tao [47], que obtuvieron el resultado buscado independientemente entre 2006 y 2007. La versión del Lema de Regularidad para hipergrafos que se obtiene difiere ligeramente en las cuatro versiones, pero todas ellas permiten obtener la siguiente versión del lema de eliminación.

Teorema 7 (Lema de eliminación para hipergrafos). *Sea K un hipergrafo k-uniforme con h vértices. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualquier hipergrafo H con n vértices que contiene menos de δn^h copias de K contiene un conjunto de a lo sumo ϵn^k aristas cuya eliminación destruye todas las copias de K en H.*

Esta versión del lema de eliminación para hipergrafos permite, con un argumento análogo al anterior, obtener una demostración simple del teorema de Szemerédi. Una versión especialmente simple de dicho argumento se puede encontrar en Szegedy [42]. Asimismo, esta versión permite obtener una demostración directa de la versión d-dimensional del teorema de Szemerédi (enunciado en la sección 1) con un argumento de parecida brillantez sugerido por Solymosi [40] y puesto en práctica por Gowers [18].

De hecho, el lema de eliminación permite ir mucho más allá. En realidad, las progresiones aritméticas de longitud k se pueden ver como la solución de un sistema lineal de $k-2$ ecuaciones con k incógnitas (para el caso $k=3$ se trata simplemente de la ecuación $x-2y+z=0$). Green [20] estableció una versión algebraica del Lema de Regularidad para grupos abelianos cuyo objetivo era el de probar el siguiente lema de eliminación algebraico.

Lema 8 (Lema de eliminación algebraico). *Sea G un grupo abeliano de orden n y $X \subset G$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si una ecuación lineal de la forma $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ tiene a lo sumo δn^{k-1} soluciones en X, entonces se pueden eliminar a los sumo ϵn elementos de X para obtener un conjunto en el que no hay ninguna solución de la ecuación.*

Aplicado a la ecuación $x-2y+z$, el lema anterior prueba el teorema de Szemerédi para progresiones de longitud tres en grupos abelianos. En particular, tomando el grupo cíclico, un argumento estándar permite obtener el resultado también para los enteros. El lema de eliminación fue generalizado por Král', Serra y Vena a grupos no abelianos [29] y a sistemas de ecuaciones lineales en grupos abelianos finitos [30, 31], lo que en particular permite extender el teorema de Szemerédi al contexto de grupos abelianos finitos en general (y de nuevo obtener el teorema para los enteros).

Como muchas de las contribuciones de Szeméredi, el lema de eliminación ha encontrado numerosas aplicaciones en otras áreas distintas, en particular en la informática teórica. Una de las más espectaculares es la obtención de algoritmos de enorme eficiencia para detectar la existencia de estructuras determinadas en grandes grafos, lo que se denomina *Property Testing.* Para determinar si un grafo grande contiene un subgrafo determinado o satisface cierta propiedad estructural, por ejemplo la planaridad, no se puede evitar hacer una búsqueda exhaustiva y necesariamente costosa. Sin embargo, el lema de eliminación permite distinguir con enorme eficiencia si un grafo se encuentra muy próximo o no a tener dicha propiedad estructural, véase por ejemplo [3, 4, 5, 36].

4. Algunas aplicaciones a la teoría de grafos

Quizás uno de los ámbitos en los que el Lema de Regularidad ha encontrado un marco más natural de aplicaciones es en la denominada teoría extremal de grafos. La pregunta básica en teoría extremal de grafos es determinar el número máximo de aristas en un grafo de n vértices que no contiene un grafo dado H. En otras palabras, se pregunta por el mínimo número de aristas que garantiza que H aparece como subgrafo. Además de tratarse de una pregunta natural en el ámbito de la teoría de grafos, su respuesta tiene relación con otras áreas, en particular, con la teoría de números, como se ha ilustrado en la sección anterior, la teoría de Ramsey o la teoría de la computación.

El grafo completo K_n contiene naturalmente todos los subgrafos de orden $n' \le n$. Sin embargo, basta con que un grafo contenga más de $n^2/4$ aristas para garantizar que contiene un triángulo, y este valor es óptimo para el caso de triángulos. El primer resultado en el área de la teoría extremal, y uno de los más emblemáticos, es debido a otro matemático húngaro, Pál Turán.

Teorema 9 (Teorema de Turán [50]). *Sea r un entero positivo. El número máximo de aristas de un grafo de $n \ge r$ aristas que no contiene al grafo completo K_{r+1} como subgrafo es*

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Además, el único grafo extremal (con máximo número de aristas) que no contiene ningún K_{r+1} es el grafo completo bipartito $K_{n_1,\dots,n_r}$ donde $n_1+\cdots+n_r = n$ y $|n_i - n_j| \le 1$.

El número máximo de aristas de un grafo con n vértices que no contiene un grafo dado se denota por $\mathrm{ex}(n,H)$. Así pues, el teorema de Turán establece que

$$\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

De forma relativamente sorprendente, Erdős y Stone [12] probaron que se puede conseguir una estimación análoga para cualquier grafo H, la cual depende únicamente de su número cromático. Recordemos que el número cromático de un grafo H es el mínimo número de partes en una partición del conjunto de vértices tal que cada parte induce un grafo sin aristas; es decir, que todas las aristas de H conectan puntos en distintas partes. Los grafos de Turán son extremales (con el máximo número de aristas) para la propiedad de tener n vértices y número cromático $r+1$.

Teorema 10 (Erdős-Stone). *Sea H un grafo con número cromático $\chi(H) = r+1$. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,H) = \left(1-\frac{1}{r}\right)\binom{n}{2} + o(n^2).$$

Una de las primeras aplicaciones del Lema de Regularidad a la teoría de grafos fue la demostración de este teorema. A esta siguieron una larga serie de resultados de los que mencionamos solo algunos en los que Szemerédi contribuyó directamente y que utilizan, de una forma que no se especifica aquí, el Lema de Regularidad. El lector interesado puede consultar [27] para una exposición detallada.

El primero de estos resultados, el teorema de Hajnal-Szemerédi [23], es una versión del teorema de Turán en la que se exige que el número de aristas esté localmente bien repartido y se concluye que el grafo no solo contiene una copia de K_r sino un cierto número de ellas disjuntas (sin aristas comunes). Recordamos que el grado de un vértice es el número de aristas que son incidentes en él. El menor de los grados de un grafo G se denota por $\delta(G)$.

Teorema 11 (Hajnal, Szemerédi). *Sea un grafo G con n vértices y grado mínimo*

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) n.$$

Entonces G contiene $\lfloor n/r \rfloor$ copias disjuntas del grafo completo K_r.

Además de ser una referencia recurrente en el área, y un resultado notoriamente difícil, Hajnal y Szemerédi usaron el teorema anterior para resolver una conjetura de Erdős. El hecho de que un grafo H tenga número cromático $k = \chi(H)$ indica que su conjunto de vértices se puede partir en k partes de forma que todas las aristas unen vértices en partes distintas. Sin embargo, no dice nada del tamaño relativo de las partes de dicha partición. De hecho, se pueden construir grafos en los que la discrepancia entre el tamaño de las partes es inevitable. Un teorema clásico en teoría de grafos debido a Brooks establece que el número cromático H de un grafo que no sea un ciclo impar o un grafo completo es, a lo sumo,

$$\chi(H) \leq \Delta(H),$$

donde $\Delta(H)$ denota el grado máximo del grafo.

Erdős conjeturó que, si se admiten particiones de a lo sumo $\Delta(H) + 1$ partes, entonces se puede exigir que tengan todas el mismo cardinal (salvo una unidad). Por esta razón, a veces el teorema de Hajnal-Szemerédi se presenta con el enunciado siguiente.

Teorema 12 (Hajnal, Szemerédi). *Sea un grafo $G = (V, E)$ con n vértices y grado máximo $\Delta(G)$. Existe una partición $V_1, \ldots, V_k$ con $k \leq \Delta(G)+1$ tal que $|V_i - V_j| \leq 1$ para todo i, j y los grafos inducidos $G[V_i]$ en cada uno de los conjuntos no contienen aristas.*

El teorema 11 fue extendido de forma aproximada a grafos arbitrarios por Alon y Yuster [6], y la forma exacta fue formulada como la siguiente conjetura.

Conjetura 13 (Alon-Yuster). *Dado un grafo H con h vértices y número cromático $r = \chi(H)$, existe una constante K tal que cualquier grafo G con n vértices y grado mínimo*

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) hn$$

contiene la unión de copias disjuntas en aristas de H que cubren todas las aristas salvo K.

La conjetura ha sido probada por Komlós, Sárközy y Szemerédi [26] para n suficientemente grande usando una versión especial del Lema de Regularidad.

El tipo de problemas mencionados anteriormente consideran subgrafos fijos de un grafo denso grande. Cuando se estudia el problema para subgrafos de orden comparable al del grafo que lo contiene no pueden, en general, establecerse resultados del mismo tipo, ya que el teorema de Ramsey lo impide (ver la sección 6). Sin embargo, el problema vuelve a tener sentido si se restringe la clase de subgrafos que se quiere sumergir. El caso más típico es el de la clase de árboles. Recordemos que un árbol es un grafo conexo (es decir, hay un camino entre cualquier par de vértices) que no tiene ciclos (es decir, el camino que une un par de vértices dado es único).

Un simple argumento muestra que el mínimo número de aristas para que un grafo G con n vértices contenga una estrella de k aristas (el árbol formado por un vértice de grado k y k vértices de grado uno) es $(k-1)n/2+1$. Erdős y Sós conjeturaron que este mismo número provoca la aparición de todos los árboles de k aristas.

Conjetura 14 (Erdős-Sós). *Sea G un grafo con n vértices y más de*

$$(k-1)n/2$$

aristas. Entonces G contiene todos los árboles de k aristas.

En [28] se anuncia la resolución de esta conjetura para n suficientemente grande por Ajtai, Komlós, Simonovits y Szemerédi, en un trabajo no publicado todavía.

Un teorema clásico de teoría de grafos debido a Dirac establece que, si G es un grafo con n vértices y grado mínimo $\delta(G)\geq n/2$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano, es decir, un ciclo que pasa por todos los vértices del grafo una sola vez. Seymour en 1974 conjeturó la siguiente extensión del teorema de Dirac. Recordemos que para un grafo H, su potencia k-ésima H^k se define como el grafo con el mismo conjunto de vértices que contiene todas las aristas $\{x,y\}$ de vértices a distancia a lo sumo k en H.

Conjetura 15 (Seymour). *Sea G un grafo con n vértices y grado mínimo*

$$\delta(G)\geq \frac{k}{k+1}\,n.$$

Entonces G contiene la potencia k-ésima de un ciclo hamiltoniano.

Se puede probar que el resultado conjeturado por Seymour implica el profundo teorema de Hajnal-Szemerédi enunciado anteriormente. De nuevo para n suficientemente grande, la conjetura fue resuelta por Komlós, Sárközy y Szemerédi [25].

Para la clase general de grafos, Bollobás y Elridge sugirieron la siguiente conjetura, que generaliza también el teorema de Hajnal-Szemerédi.

Conjetura 16 (Bollobás-Eldridge). *Sea G un grafo con n vértices y grado mínimo*

$$\delta(G)\geq \frac{kn-1}{k+1}.$$

Entonces G contiene cualquier subgrafo H con grado máximo $\Delta(H)\leq k$.

La conjetura fue probada para $k = 3$ y n suficientemente grande por Csaba, Shokoufandeh y Szemerédi [10].

La relación anterior de resultados ilustra la fuerza del Lema de Regularidad para la resolución de problemas extremales en teoría de grafos. Por supuesto, no se trata de una lista exhaustiva, pero recoge una serie de resultados con enunciados homogéneos que han sido claves en la evolución de la teoría de grafos de los últimos 25 años.

5. De vuelta a la teoría de números

Como buen discípulo de Erdős, Szemerédi guardó siempre una relación especial con la teoría de números. Más allá de su célebre teorema, trató diversos problemas en los que su característico estilo de pensamiento se hizo patente.

Quizás el más antiguo de ellos sea el que trata una conjetura de Erdős y Heilbronn. Sea G un grupo abeliano de orden n. Erdős y Heilbronn conjeturaron que existe una constante c tal que cualquier subconjunto $S \subset G$ de tamaño $|S| \geq c\sqrt{n}$ contiene un subconjunto S' tal que

$$\sum_{x \in S'} x = 0.$$

Szemerédi probó la conjetura en 1970, en uno de sus primeros artículos. El óptimo valor para $c = c(G)$ se denomina actualmente constante de Olson de dicho grupo, de la que se conocen buenas estimaciones. Erdős y Heilbronn conjeturaron que el valor de esta constante para grupos cíclicos de orden primo p es $c = \sqrt{2}$.

Szemerédi volvió repetidamente sobre los conjuntos suma. Aunque un conjunto de enteros $A \subset [1, n]$ pueda carecer de estructura, los conjuntos suma $A + A$, $A + A + A$, adquieren una estructura cada vez mayor a medida que crece el número de sumandos. Uno de los proyectos más recientes de Szemerédi con Van Vu [46] trata sobre la existencia de progresiones aritméticas en conjuntos de la forma $A + A + \cdots + A$. Basándose en estos resultados, Nguyen, Szemerédi y Vu [35] resolvieron en 2008, después de muchos intentos anteriores, la conjetura de Erdős y Heilbronn. *On revient toujours au premier amour.*

El hecho de que la suma y el producto sean operaciones en cierto modo ortogonales se manifiesta en muchos problemas de la teoría de números. La dificultad de encontrar una progresión aritmética (una estructura aditiva) en el conjunto de los primos (una estructura multiplicativa) es solo un ejemplo que ilustra la relativa incorrelación entre las dos operaciones aritméticas básicas.

Erdős y Szemerédi propusieron la siguiente manera de poner de relieve esta incorrelación. Sea A un conjunto de enteros finito. Es fácil ver que el tamaño del conjunto suma $|A + A|$ es, al menos, $2|A| - 1$, y que la igualdad se satisface solo para progresiones aritméticas. En este caso, sin embargo, el tamaño del conjunto producto $|A \cdot A|$ es mayor que $|A|^{2-\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$ y para A suficientemente grande. Recíprocamente, $|A \cdot A| \geq 2|A| - 1$ y la igualdad se satisface solo para progresiones geométricas, en cuyo caso el conjunto suma $A + A$ tiene orden máximo $|A|^2$. Erdős y Szemerédi llegaron a probar que existe un $\delta > 0$ tal que todo conjunto de enteros A suficientemente grande satisface

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq |A|^{1+\delta},$$

y conjeturaron que la desigualdad sigue siendo cierta para cualquier $\delta < 1$. El primer avance significativo en este problema se debe a Elekes, quien probó la desigualdad para todo $\delta < 1/4$ utilizando un resultado geométrico de Szemerédi y Trotter. El lector interesado puede consultar el excelente artículo de Solymosi [41] en esta misma sección de *La Gaceta*, que relata la apasionante evolución del problema hasta hoy y, en particular, su demostración de que la desigualdad es cierta para cualquier $\delta < 1/3$, que es el récord en este lindo problema.

Terminamos esta breve revisión con otra de las grandes contribuciones de Szemerédi que lleva la marca de su estilo. Se trata de nuevo de un problema aditivo. Sea A un conjunto finito de enteros. Es claro que si $A + A$ tiene un cardinal pequeño, digamos $|A + A| \leq c|A|$, entonces hay muchos elementos en el conjunto suma $A + A$ que se representan de muchas maneras distintas como suma de dos elementos de A. Balog y Szemerédi se plantearon la cuestión inversa. ¿Es cierto que si hay muchas cuadruplas $x, x', y, y' \in A$ con $x + x' = y + y'$ el conjunto suma debe ser pequeño? En este contexto se define la energía de un conjunto A como

$$\omega(A) = |\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A \times A \times A \times A : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}|.$$

Es claro que $\omega(A) \leq n^3$, donde $n = |A|$. No es difícil probar que si $|A + A| \leq cn$ entonces $\omega(A) \geq n^3/c$. El problema es decidir si el hecho de que $\omega(A)$ sea una proporción positiva de su máximo posible valor implica que el conjunto suma debe tener un tamaño lineal en $|A|$. La respuesta a esta pregunta es, en general, negativa: un conjunto puede tener una energía muy grande y sin embargo contener unos pocos elementos dispersos que hacen que $|A+A|$ sea grande. El lema de Balog y Szemerédi da una respuesta específica a esta situación.

Teorema 17 (Lema de Balog-Szemerédi). *Sea A un conjunto de enteros con $\omega(A) \geq 1/K$. Existen constantes c, C y un subconjunto $A' \subset A$ con $|A'| \geq cK^{-C}|A|$ tales que*

$$|A' + A'| \leq CK^C|A'|.$$

En otras palabras, un conjunto con energía grande debe contener un subconjunto grande cuyo conjunto suma es pequeño. Este teorema se conoce hoy como lema de Balog-Gowers-Szemrédi, ya que Gowers dio una versión para conjuntos suma más generales $A+B$ (en lugar de $A+A$) con una estimación mejor de las constantes. Esta versión es uno de los ingredientes que Gowers utiliza en su demostración analítica del teorema de Szemerédi.

6. Números de Ramsey

El teorema de Ramsey que se menciona en la sección 1 tiene una versión en el contexto de los grafos que resulta sencilla de enunciar. Un conjunto S de vértices de un grafo es *estable* si no hay aristas entre sus vértices. En el polo opuesto, es decir, si todos los pares de vértices de S están conectados por una arista, se dice que S es un *clique*. No es difícil comprobar que cualquier grafo de seis vértices contiene o bien un conjunto estable de tamaño 3 o bien un clique de tamaño 3: si un vértice fijado x tiene grado mayor o igual que tres, entonces tres de sus vecinos, o bien forman un conjunto independiente, o dos de ellos son adyacentes formando un triángulo con x; si x tiene grado menor que tres se puede hacer un argumento análogo en el grafo complementario de G. Esta afirmación deja de ser cierta si el grafo tiene menos de seis vértices: un pentágono no contiene triángulos y su complemento es de nuevo un pentágono. La versión para grafos del teorema de Ramsey generaliza esta observación y se puede enunciar como sigue.

Teorema 18 (Ramsey). *Para cada dos enteros k, l, existe un entero $R(k, l)$ con la siguiente propiedad. Cualquier grafo de $n \geq R(k, l)$ vértices o bien contiene un clique de k vértices o bien un estable de l vértices.*

Los números de Ramsey son los enteros $R(k, l)$ cuya existencia asegura el teorema de Ramsey. De acuerdo con la discusión anterior, el número de Ramsey $R(3, 3)$ es igual a 6. Excepto para unos pocos valores de k y l, el problema de determinar los números de Ramsey ha resultado ser de una complejidad inesperada, y los intentos por encontrar cotas para estos números han sido el germen de numerosas técnicas que han resultado de aplicación muy general. La demostración de Erdős y Szekeres del enunciado anterior del teorema de Ramsey proporciona la cota

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

La obtención de una cota inferior para los números de Ramsey diagonales, $k = l$, dio lugar al nacimiento del método probabilístico de Erdős, que se ha convertido en una herramienta fundamental desde entonces, y proporciona, combinada con la cota superior anterior, la desigualdad

$$ck2^{k/2} < R(k, k) \leq c4^k k^{-1/2}.$$

Ambos resultados se obtuvieron entre 1935 y 1945, y desde entonces se han hecho pocos progresos a pesar de la intensa actividad que ha habido sobre este problema. Es por ello que cualquier avance supone un acontecimiento singular. En 1980 Ajtai, Komlós y Szemerédi [1] introdujeron una técnica algorítmica que se conoce hoy como método semialeatorio de Ajtai-Komlós-Szemerédi, que proporciona la cota superior

$$R(k, l) \leq c_k \frac{l^{k-1}}{(\log l)^{k-2}}.$$

La cota anterior tiene sentido para k fijo como una apoximación asintótica en l. No solo la técnica se ha incorporado a las herramientas habituales en combinatoria y teoría de la complejidad algorítmica, sino que 18 años después, en un célebre artículo que le valió el premio Fulkerson en 1997, Jeong Jon Kim [24] demostró que, para $k = 3$, la cota anterior tiene el orden correcto de magnitud:

$$R(3, l) \sim c \frac{l^2}{\log l},$$

para una cierta constante c. De este modo, los números de Ramsey $R(3, l)$ constituyen la única familia infinita no trivial para los que se conoce el comportamiento asintótico de forma precisa.

El teorema de Ramsey que se ha enunciado se refiere a grafos completos: para cualquier grafo G con $n \geq R(k, k)$ vértices, o bien G o bien su complementario contienen el grafo completo K_k. Por supuesto, esto implica que contienen también cualquier grafo de k vértices. Sin embargo, si en vez de exigir que G o su complementario contengan un grafo completo de k vértices, se exige solo que contengan un cierto subgrafo H, las cotas para el número $R(H)$ correspondiente no solo pueden ser menores sino que además pueden arrojar cierta luz sobre el problema. Erdős y Burr conjeturaron que de hecho $R(H)$ es una función lineal de k con una constante que depende del grado máximo de H. Chvátal, Rödl, Szemerédi y Trotter [9] probaron el siguiente resultado de asombrosa generalidad: existe una función f tal que, para cualquier grafo H de k vértices y grado máximo $\Delta(H)$ se tiene

$$r(H) \leq f(\Delta(H))k.$$

De nuevo la demostración se basa en el Lema de Regularidad.

7. Endre Szemerédi

Terminamos con una breve referencia biográfica y humana del personaje que nos ha llevado al paseo matemático de las secciones anteriores.

Endre Szemerédi nació en Budapest en el año 1940. Su encuentro con las matemáticas fue casi accidental. Después del bachillerato, cediendo a la presión de su padre, empezó a estudiar medicina, pero pronto lo dejó, pues «había que estudiar mucho, que no era lo mío», según cuenta en una entrevista reciente. Después del intento fallido, trabajó en una fábrica como trabajador no cualificado. Fue un amigo suyo quien le convenció para que estudiara matemáticas y en el año 1960 se matriculó en la Facultad de Matemáticas y Física de la Universidad Eötvös Lóránd de Budapest. Según dice, las matemáticas no le entusiasmaron mucho hasta que asistió a un curso de Pál Turán sobre teoría de números. Fue durante este curso cuando decidió dedicarse a la investigación matemática. Durante sus estudios en Budapest, Pál Erdős y András Hajnal tuvieron una gran influencia sobre su carrera.

Después de graduarse, decidió hacer un doctorado en Moscú bajo la supervisión de Alexander *Gelfond*. Sin embargo, por un error de escritura en cirílico, le asignaron a Israel *Gelfand* como director de tesis. Con las palabras de Szemerédi: «Gelfand pensó que era un estudiante húngaro con buenas intenciones pero incapaz de aprender las matemáticas modernas y me dejó escribir la tesis sobre el tema que yo quería», es decir, matemática discreta.

Desde que volvió a Budapest de Moscú, ha sido miembro del Instituto Alfréd Rényi de Investigaciones Matemáticas. Desde el año 1986, divide su tiempo entre Budapest y la Universidad Rutgers donde es profesor en el departamento de Computer Science a pesar de que, como él reconoce, no sabe manejar un ordenador hasta el punto que es su mujer quien le lee su correo electrónico. Szemerédi ha publicado más de 200 artículos y su ritmo de producción sigue en pleno rendimiento.

Además del premio Abel, su trabajo ha sido reconocido con numerosas distinciones, entre las que se encuentran el premio Grünwald (1968), el premio Pólya (1975), el premio AMS Leroy M. Steele (2008) o el premio Rolf Schock (2008). Ha tenido puestos de profesor en Stanford, McGill University, University of Chicago, MSRI Berkeley, CalTech, es miembro del Institute of Advanced Studies de Princeton y fue obsequiado con un doctorado honoris causa por la Universidad Karlova de Praga en 2010.

Sin embargo, es célebre por su exagerada modestia y discreción, que se refleja en muchas de las entrevistas que ha tenido que conceder recientemente, y por su peculiar manera de lidiar con las formalidades del mundo académico, no exenta de un fino sentido del humor.

Szemerédi tiene una familia grande —cinco hijos— a la que tiene una devoción enorme. Parte de su familia le conecta con nuestro país. Sus dos hijas gemelas realizaron sus estudios de posgrado en la Universitat Pompeu Fabra de Barcelona, y no perdió ocasión de visitar la ciudad para seguir de cerca sus progresos. Una de ellas reside actualmente en Madrid. Todos los que le conocen saben que es una persona extraordinariamente entrañable, cariñosa y sencilla.

Szemerédi es un apasionado de los deportes. Juega al tenis con regularidad y sigue de cerca los acontecimientos deportivos; sobre todo es muy futbolero, fiel seguidor del Milan y del Barça, hasta el punto que, en una entrevista reciente, vaticinó correctamente el resultado del encuentro de los dos equipos en la copa europea.

Referencias

[1] M. Ajtai, J. Komlós y E. Szemerédi, A note on Ramsey numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **29** (1980), no. 3, 354–360.

[2] M. Ajtai, J. Komlós y E. Szemerédi, Sorting in $c \log n$ parallel steps, *Combinatorica* **3** (1983), no. 1, 1–19.

[3] N. Alon, E. Fischer, M. Krivelevich y M. Szegedy, Efficient testing of large graphs, *Combinatorica* **20** (2000), 451–476.

[4] N. Alon, W. Fernández de la Vega, R. Kannan y M. Karpinski, Random sampling and approximation of MAX-CSPs, *J. Comput. System Sci.* **67** (2003), 212–243.

[5] N. Alon y A. Shapira, Every monotone graph property is testable, *Proc. of the 37 ACM STOC, Baltimore*, ACM Press (2005), 128–137.

[6] N. Alon y R. Yuster, H-factors in dense graphs, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **66** (1996), 269–282.

[7] B. Bollobás y A. Thomason, Frank Ramsey. Special issue on Ramsey theory, *Combin. Probab. Comput.* **12** (2003), no. 5-6, 469–475.

[8] C. Borgs, J. Chayes y L. Lovász, Unique limits of dense graph sequences (manuscrito).

[9] V. Chvatál, V. Rödl, E. Szemerédi y W. T. Trotter, The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree, *J. Combin. Theory Ser. B* **34** (1983), no. 3, 239–243.

[10] B. Csaba, A. Shokoufandeh y E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Bollobás and Eldridge for graphs of maximum degree three, *Combinatorica* **23** (2003), no. 1, 35–72.

[11] G. Elek y B. Szegedy, Limits of hypergraphs, removal and regularity lemmas. A non-standard approach, `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0705/0705.2179v1.pdf`.

[12] P. Erdős y A. H. Stone, On the structure of linear graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946), 1087–1091.

[13] P. Frankl y V. Rödl, Extremal problems on set systems, *Random Structures and Algorithms* **20** (2002), 131–164.

[14] H. Furstenberg, Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. Analyse Math.* **31** (1977), 204–256.

[15] H. Furstenberg y Y. Katznelson, An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. *Journal d'Analyse Mathématique* **34** (1978), 275–291.

[16] W. T. Gowers, Lower bounds of tower type for Szemerédi's Uniformity Lemma, *Geom. Func. Anal.* **7** (1997), 322–337.

[17] W. T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 465–588.

[18] W. T. Gowers, Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem, *Ann. of Math.* **166** (2007), 897–946.

[19] W. T. Gowers, The work of Endre Szemrédi, `http://www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php?tid=54060`

[20] B. Green, A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, with applications, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 340–376.

[21] B. Green y T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. of Math.(2)* **167** (2008), no. 2, 481–547.

[22] L. Guth y N. H. Katz, On the Erdős distinct distance problem in the plane, `http://arxiv.org/abs/1011.4105`.

[23] A. Hajnal y E. Szemerédi, Proof of a conjecture of P. Erdős, *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, North-Holland (1970), 601–623.

[24] J. H. Kim, The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$, *Random Structures Algorithms* **7** (1995), no. 3, 173–207.

[25] J. Komlós, G. Sárközy y E. Szemerédi, Proof of the Seymour conjecture for large graphs, *Ann. Comb.* **2** (1998), 43–60.

[26] J. Komlós, G. Sárközy y E. Szemerédi, Proof of the Alon-Yuster conjecture, *J Discrete Math.* **235** (2001), 255–269.

[27] J. Komlós, A. Shokoufandeh, M. Simonovits y E. Szemerédi, The regularity lemma and its applications in graph theory, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, v. 2292, Springer, Berlin (2002), 84–112.

[28] J. Komlós y M. Simonovits, Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (D. Miklos et. al, eds.)*, Bolyai Society Mathematical Studies 2 (1996), 295–352.

[29] D. Král', O. Serra y L. Vena, A combinatorial proof of the removal lemma for groups, *J. Combin. Theory Ser. A* **116** (2009), 971–978.

[30] D. Král', O. Serra y L. Vena, A removal lemma for systems of linear equations over finite fields, *Israel J. Mathematics* **187** (2012), 193–207.

[31] D. Král', O. Serra y L. Vena, On the removal lemma for linear systems over abelian groups, `http://arxiv.org/abs/1106.4243`.

[32] L. Lovász y B. Szegedy, Limits of dense graph sequences, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **96** (2006), 933–957.

[33] L. Lovász y B. Szegedy, Testing properties of graphs and functions, *Israel Journal of Mathematics* **178** (2010), 113–156.

[34] I. Mundet i Riera, Progresiones aritméticas de todos los colores, *La Gaceta de la RSME* **14** (2011), 715–738.

[35] H. Nguyen, E. Szemerédi y V. Vu, Subset sums modulo a prime, *Acta Arith.* **131** (2008), no. 4, 303–316.

[36] D. Ron, Algorithmic and analysis techniques in property testing, *Now Publishers* (2010).

[37] V. Rödl y J. Skokan, Regularity lemma for k-uniform hypergraphs, *Random Structures and Algorithms* **25** (2004), 1–42.

[38] V. Rödl y J. Skokan, Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs, *Random Structures Algorithms* **28** (2006), no. 2, 180–194.

[39] I. Z. Ruzsa y E. Szemerédi, Triple systems with no six points carrying three triangles, En: Combinatorics (Keszthely, 1976), *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **18**, Vol. II, 939–945.

[40] J. Solymosi, Note on a generalization of Roth's theorem, *Discrete and Computational Geometry* **25** (2003), 825–827.

[41] J. Solymosi, Sumas contra productos, *La Gaceta de la RSME* **12** (2009), no. 4, 707–719.

[42] B. Szegedy, The symmetry preserving removal lemma, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 2, 405–408.

[43] E. Szemerédi, Integer sets containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 299–345.

[44] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, En: *Colloques Internationaux CNRS 260 – Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes (Orsay, 1976)*, CNRS, Paris (1978), 399–401.

[45] E. Szemerédi y W. T. Trotter, Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica* **3** (1983), no. 3-4, 381–392.

[46] E. Szemerédi y V. Vu, Finite and infinite arithmetic progressions in sumsets, *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), no. 1, 1–35.

[47] T. Tao, A variant of the hypergraph removal lemma, *J. Combin. Theory Ser. A* **113** (2006), no. 7, 1257–1280.

[48] T. Tao, Szemerédi's regularity lemma revisited, *Contrib. Discrete Math.* **1** (2006), no. 1, 8–28.

[49] T. Tao, The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes, *International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006)*, Eur. Math. Soc., Zurich (2007), Vol. I, 581–608.

[50] P. Turán, On an extremal problem in graph theory (en húngaro), *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941), 436–452.

Gábor Lugosi, ICREA y Universitat Pompeu Fabra, Barcelona
Correo electrónico: gabor.lugosi@upf.edu
Página web: http://www.econ.upf.es/~lugosi

Oriol Serra, Dpto. Matemàtica Aplicada 4, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona
Correo electrónico: oserra@ma4.upc.edu
Página web: http://www-ma4.upc.edu/~oserra