Las Medallas Fields

Sección a cargo de

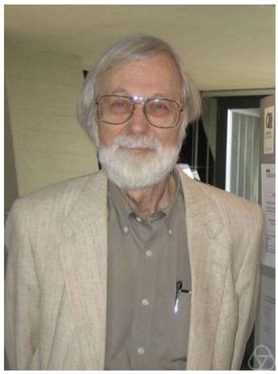
Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

John Willard Milnor, Medalla Fields 1962

por

Enrique Artal Bartolo, José I. Cogolludo Agustín y Alejandro Melle Hernández*

1. Biografía



John W. Milnor en 2007.[2]

Según la bibliografía que aparece en los archivos de la Universidad de St Andrews en Escocia [30], John Willard Milnor nació el 20 de febrero de 1931 en Orange (Nueva Jersey, EE.UU.). Recibió la medalla Fields en 1962 en el Congreso Mundial celebrado en Estocolmo del 15 al 22 de agosto. Como es tradicional, fue uno de los conferenciantes plenarios; su conferencia *Topological Manifolds and Smooth Manifolds* tenía el tema de uno de los logros que le valieron el galardón. Más adelante citaremos algunos de los premios y galardones que ha recibido, pero convenimos que uno de ellos destaca sobre los demás: el Premio Abel, que le fue concedido en su edición de 2011. La ceremonia de entrega del premio se realizó en Oslo el 24 de mayo de dicho año y en ella se destacó que el premio había sido concedido por *sus descubrimientos pioneros en topología, geometría y álgebra*. Volviendo a sus orígenes científicos, J. Milnor se graduó en 1951 por la Universidad de Princeton, donde también se doctoró en 1954. Su tesis *Isotopy of Links* fue dirigida por Ralph Fox, reputado especialista en Teoría de Nudos. Ocupó su primer puesto académico en Princeton en 1953 (antes de doctorarse),

*Los dos primeros autores están financiados por el proyecto MTM2010-21740-C02-02; el tercer autor está financiado por el proyecto MTM2010-21740-C02-01

[2]Foto realizada por G.-M Greuel, `http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=9831`

donde fue nombrado profesor en 1960 y obtuvo la Cátedra Henry Putman en 1962. Dejó la Universidad de Princeton en 1967 y, tras un breve paso por la UCLA y el MIT, se incorporó en 1970 al *Institute for Advanced Study at Princeton*. En 1989 fue nombrado director del *Institute for Mathematical Sciences* de la *State University of New York at Stony Brook* (también conocida como *Stony Brook University*), del que ahora es codirector.

Su contribución en matemáticas es impresionante. Su primer gran resultado, el teorema de Fáry-Milnor [15] lo obtuvo antes de terminar el grado, en 1950 (Fáry lo demostró independientemente en 1949): *si la curvatura total de un nudo es menor o igual que* 4π*, entonces el nudo es trivial*. Cuentan las leyendas urbanas que, tras faltar a una clase, Milnor encontró unos enunciados en la pizarra que interpretó como problemas del curso. No parece que sean ciertas, pero eso no disminuye la sorpresa de su profesor, A. Tucker, al comprobar que la demostración de su estudiante era correcta. A partir de ahí los resultados de Milnor son apabullantes: existencia [16] y posterior clasificación [11] (junto con Michel Kervaire) de estructuras exóticas en la esfera de dimensión 7, contraejemplo a la *Hauptvermutung* [17] (o conjetura principal: sobre la existencia de complejos simpliciales homeomorfos pero combinatoriamente distintos), el teorema de la bola peluda mediante métodos elementales [23] (solo las esferas de dimensión 1, 3 y 7 se pueden paralelizar o *peinar*), el teorema de Milnor-Wolf [20] (los grupos resolubles de *crecimiento polinómico* son virtualmente nilpotentes, resultado generalizado posteriormente por M. Gromov [9]). Las contribuciones importantes no acaban aquí y destacan notablemente las que realizó en K-teoría [22], sistemas dinámicos [25] o geometría algebraica y teoría de singularidades [21]. Una buena muestra de su impacto a lo largo de los últimos 50 años puede verse en el volumen [8] editado por su 60 cumpleaños, en el que participan los máximos exponentes de las diversas áreas de la matemática en las que el trabajo de Milnor ha influido.

En el quehacer de muchos matemáticos, el nombre de Milnor aparece continuamente: número de Milnor, fibración de Milnor, bola de Milnor, esferas exóticas de Milnor, invariante de Kervaire-Milnor y torsión de Milnor, entre otros.

La actividad investigadora de Milnor es espectacular. Se encuentran más de 150 entradas en `MathSciNet` (la última de 2011), y sus obras completas ya cuentan con cinco volúmenes. Además de sus artículos de investigación, hay que destacar sus libros, que han sido, son y serán obras de referencia tales como *Topology from the differentiable viewpoint* [24], y sus libros en la serie *Annals of Mathematics Studies* de la editorial de la Universidad Princeton (Teoría de h-cobordismo [19], singularidades [21], Teoría de Morse [18], clases características [27], K-teoría [22], dinámica compleja [25]).

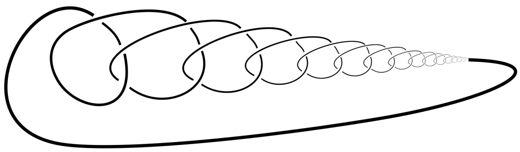
Su faceta de comunicador es admirable, como podemos comprobar en una de sus más recientes charlas [26] sobre el estado de la Conjetura de Poincaré el 18 de mayo de 2011 en Stony Brook University. En su charla da crédito a W. Thurston, R. Hamilton y G. Perelman por sus contribuciones a la solución de dicha conjetura, aclara las diferencias entre morfismos continuos y diferenciables entre variedades diferenciables (no todo difeomorfismo entre variedades diferenciables puede aproximarse por homeomorfismos), y habla sobre teoría de Morse y h-cobordismo.

De acuerdo al *Mathematics Genealogy Project* (Proyecto Genealógico de Matemáticas)[3], a lo largo de los años Milnor ha dirigido 18 tesis y cuenta con 109 descendientes.

Todas estas contribuciones y actividades se han traducido en un buen número de premios que tienen como grandes hitos la Medalla Fields de 1962 y el Premio Abel de 2011. Entre ambos galardones, recibió la *US National Medal of Science* en 1967, el Premio Steele de la AMS (en 1982, 2004 y 2011) y el Premio Wolf en 1989.

2. Esferas exóticas

La clasificación de las variedades topológicas es el gran objetivo (por otra parte inalcanzable) de la topología. Una n-variedad es un espacio topológico que se comporta localmente como el espacio euclídeo n-dimensional. Para ser más riguroso, todo punto debe poseer un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ y cumplir algunas condiciones más técnicas (ser Hausdorff y segundo numerable). Los esfuerzos de los topólogos del primer tercio del siglo XX mostraron que el problema tiene ramificaciones que se alejan del problema: los nudos *salvajes* o espacios como la esfera con cuernos [1] o la esfera de Antoine [2], muestran que es necesario imponer a las variedades estructuras suplementarias. Este hecho, además de la necesidad de poder realizar operaciones como el cálculo diferencial, llevaron a introducir estructuras diferenciables o *lineales a trozos*.



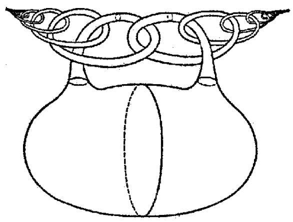


Figura 1: Nudo salvaje y esfera con cuernos[4].

De manera natural surgen las cuestiones sobre las comparaciones entre las *categorías* topológica, diferenciable y lineal a trozos (conocida como PL). La categoría PL estudia los complejos simpliciales (generalización abstracta de los poliedros): se trata de objetos topológicos que se obtienen como unión (localmente finita) de símplices, de manera que dos símplices se cortan en un subsímplice común. Las aplicaciones consideradas entre estos espacios son localmente afines y dos objetos se consideran equivalentes si poseen subdivisiones combinatoriamente equivalentes. T. Radó demostró que toda superficie es triangulable [31], mientras que E. Moise [28] hizo lo propio para las variedades de dimensión 3. Milnor demostró que no es cierto que dos complejos simpliciales homeomorfos admitan subdivisiones combinatoriamente

[3] `http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu`

[4] `http://people.ricam.oeaw.ac.at/m.hodorog/software/knot/knottheory.html`

equivalentes (el famoso *Hauptvermutung*); los contraejemplos encontrados no eran variedades.

En los casos de dimensión 2 y 3, cualquier variedad topológica admite, como mucho, una estructura de variedad diferenciable[5] [29]. No era descabellado pensar que lo mismo iba a ocurrir en dimensión superior: dos variedades diferenciables homeomorfas (que se puedan deformar continuamente) son difeomorfas o, en un lenguaje menos riguroso, si una variedad se puede deformar en otra, se puede conseguir que la deformación sea *suave*.

La existencia de contraejemplos a esta afirmación fue un hecho sorprendente para la comunidad matemática, incluso para el propio autor del resultado. Su consecución fue uno de los factores que le supuso la obtención de la medalla Fields en 1962. El ejemplo de Milnor sorprendió por dos razones: su existencia y su simplicidad. Dicho ejemplo se basa en variedades tan *sencillas* como las esferas.

La esfera de dimensión n es el conjunto

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1 \right\},$$

es decir, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ que se encuentran a una distancia euclídea 1 del origen de coordenadas; este espacio se llama la *n-esfera estándar*. De manera más general, un espacio topológico es una n-esfera si es homeomorfa al espacio anterior. Por supuesto, las esferas de cualquier centro y radio lo son, pero también elipsoides y muchos otros espacios.

Milnor construyó en [16] una familia de variedades diferenciables y sobre ellas trabaja en dos vías. Por una parte prueba que son todas homeomorfas a la n-esfera estándar y por otra que no son difeomorfas. Vamos a explicar sucintamente la construcción de la familia y las dos vías sobre las que reposa la demostración.

2.1. Construcción de la familia

Los ejemplos de Milnor son fibrados localmente triviales de base $\mathbb{S}^4$ y fibra $\mathbb{S}^3$. De manera informal, los fibrados localmente triviales son *productos torcidos*. Para ser más explícitos, un fibrado localmente trivial es una aplicación continua $\rho : E \to B$, de manera que $\forall p \in B$ existe un entorno abierto U de p en B y un homeomorfismo $\varphi_U : \rho^{-1}(U) \to U \times F$ tal que $\rho_{|U} = \varphi_U \circ \pi_U$ (π_U es la primera proyección de $U \times F$). En general, un fibrado localmente trivial no es globalmente trivial (no es homeomorfo a un producto); sin embargo, sí que lo es cuando la base es contractible, es decir, tiene el tipo de homotopía de un punto.

Recordemos que la n-esfera estándar se puede obtener como el pegado de sus dos hemisferios (norte y sur) a lo largo del ecuador; los hemisferios son homeomorfos a un bola cerrada n-dimensional y el ecuador es homeomorfo a una $(n-1)$-esfera.

[5]Entendemos por variedad diferenciable un espacio topológico que localmente se puede parametrizar como el espacio euclídeo n-dimensional y de modo que el cambio de parametrizaciones es diferenciable, es decir, en el que podemos hacer cálculo diferencial.

Un fibrado $\pi : M \to \mathbb{S}^4$ de fibra $\mathbb{S}^3$ se obtiene, por tanto, como el pegado de dos copias de $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ a lo largo de sus bordes, donde $\mathbb{B}^4$ es la bola cerrada unidad en $\mathbb{R}^4$. *Pegar* los bordes de las copias de $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ no es más que identificar dichos bordes $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ por un homeomorfismo que respete las fibras, es decir, un homeomorfismo $\Phi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ que cumpla

$$(p, q) \mapsto (p, \varphi_p(q)).$$

Podemos interpretar φ como una aplicación $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^3)$, $p \mapsto \varphi_p$, donde $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^3)$ es el grupo de homeomorfismos (orientados) de $\mathbb{S}^3$. Tanto en la definición de fibrado como en el caso anterior, podemos reemplazar homeomorfismo por difeomorfismo. En realidad, es suficiente considerar aplicaciones $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$, ya que $\mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$, el grupo de isometrías orientadas de $\mathbb{R}^4$, actúa naturalmente sobre $\mathbb{S}^3$ y se puede ver como un subgrupo de $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S}^3)$.

En realidad, dado un fibrado, la aplicación solo está bien definida salvo isotopía; de hecho, dos aplicaciones $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$ homotópicamente equivalentes dan lugar a fibrados difeomorfos, por lo que el espacio de los fibrados que nos interesan viene medido por $\pi_3(\mathrm{SO}(4; \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}^2$, el grupo de clases de homotopía de $\mathbb{S}^3$ en $\mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$.

Antes de continuar con la construcción del fibrado, vamos a indicar cómo es la identificación $\pi_3(\mathrm{SO}(4; \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}^2$. Para ello, recordemos la definición de los cuaterniones de Hamilton. Se trata de un cuerpo no conmutativo $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$; identificamos $\mathbb{R}^4$ como la suma directa $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$; el espacio $\mathbb{R}^3$ lo consideramos con el producto escalar estándar y con una orientación determinada por una base ortonormal i, j, k. Dado $p \in \mathbb{H}$, la descomposición anterior se escribe $\Re(p) + \Im(p)$ (partes real e imaginaria). El producto viene determinado por las propiedades siguientes:

- $\mathbb{R}$ es central y actúa en $\mathbb{R}^3$ como el producto por un escalar.
- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Con estos datos podemos comprobar que si $u, v \in \mathbb{R}^3$, es decir, son imaginarios puros, entonces

$$uv := -u \cdot v + u \wedge v$$

donde uv representa el producto como elementos de $\{0\} \oplus \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$, $\cdot$ es el producto escalar y $\wedge$ es el vectorial.

Es fácil ver que si consideramos el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^4$, en el que $(1, i, j, k)$ es una base ortonormal positiva, los productos a izquierda y derecha producen isometrías positivas de $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$, es decir, elementos de $\mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ se construye una aplicación $\varphi_{a,b} : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(4; \mathbb{R})$ de manera que dado $p \in \mathbb{S}^3$, su imagen es la isometría $\varphi_{a,b}(p) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\varphi_{a,b}(p)(q) := p^a q p^b$.

Todos estos prolegómenos nos permiten definir las variedades buscadas mediante técnicas de pegado. Sea $\ell \in \mathbb{Z}$, impar. Vamos a construir el fibrado $\pi_{a,b} : M_{a,b} \to \mathbb{S}^4$, en el que $(a, b) = (\frac{1-\ell}{2}, \frac{1+\ell}{2})$. Tomamos dos copias $\mathcal{N}$ y $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^3$, y en cada una de ellas una copia de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^3$ que denotaremos $\mathcal{N}_0$ y $\mathcal{S}_0$ respectivamente. Sea $\psi_{a,b} : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{S}_0$ el difeomorfismo definido por

$$(p, q) \mapsto \psi_{a,b}(p, q) := \left(\frac{p}{\|p\|^2}, \frac{p^a q p^b}{\|p\|} \right).$$

Pegamos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{S}$ mediante este difeomorfismo para obtener $M_{a,b} := \mathcal{N} \cup_{\psi_{a,b}} \mathcal{S}$. Utilizaremos la notación $\pi_\ell \colon M_\ell \to \mathbb{S}^4$ para el fibrado construido.

La razón de los nombres $\mathcal{N}, \mathcal{S}$ proviene de la proyección estereográfica. Gracias a ella podemos identificar $\mathbb{S}^4$ con $N \cup_\psi S$ donde N, S son dos copias de $\mathbb{R}^4$, N_0, S_0 son dos copias de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ en N, S respectivamente, y $\psi : N_0 \mapsto S_0$ está definida por $\psi(p) := \frac{p}{\|p\|^2}$. La proyección $M_\ell \to \mathbb{S}^4$ está definida por las proyecciones al primer factor $\mathcal{N} \to N$ y $\mathcal{S} \to S$.

2.2. Las variedades M_ℓ son esferas topológicas

Es *relativamente* sencillo probar que una n-variedad es homeomorfa a la n-esfera estándar[6]. En cualquier caso, lo es si tenemos la fortuna de encontrar una función de Morse con pocos puntos críticos. Una función de Morse de una variedad diferenciable M es una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ de manera que sus puntos críticos[7] son no degenerados[8].

Consideremos la proyección del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre una de sus variables. La restricción de esta proyección a la esfera estándar $\mathbb{S}^n$ es una función de Morse con solo dos puntos críticos, el máximo y el mínimo. Este tipo de funciones de Morse se llaman funciones altura. No es difícil ver que si una función de Morse sobre una variedad cerrada solo tiene dos puntos, dicha variedad debe ser homeomorfa a $\mathbb{S}^n$ (Milnor [16] adjudica la paternidad del resultado a G. Reeb [32]). Milnor va más allá y demuestra que existe un homeomorfismo que es un difeomorfismo salvo, a lo sumo, en un punto. La técnica de demostración es ya clásica en topología diferencial: construir un campo vectorial apropiado y definir un difeomorfismo (de hecho una isotopía) a partir de la integración de dicho campo.

Consideremos la función

$$f : M_\ell \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{\Re(q)}{\sqrt{1+\|p\|^2}} & \text{si } x = (p,q) \in \mathcal{N}, \\[2ex] \dfrac{\Re(p'(q')^{-1})}{\sqrt{1+\|p'\|^2}} & \text{si } x = (p',q') \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Esta función está bien definida y sus únicos puntos críticos se encuentran en $(0, \pm q) \in \mathcal{N}$, que son además no degenerados. Esta función demuestra que M_ℓ, ℓ impar, es homeomorfa a $\mathbb{S}^7$.

2.3. Las variedades M_ℓ no son esferas diferenciables estándar

Para ver que estas esferas no son difeomorfas hay que acudir a invariantes más finos, dominar la teoría de cobordismo de R. Thom [34] y la de clases características.

[6]La palabra *relativamente* es lo suficientemente vaga para que uno pueda aceptar dicha afirmación.

[7]Donde se anulan todas las derivadas.

[8]El hessiano o determinante de las derivadas segundas es no nulo.

Esto no era un problema para J. Milnor que más adelante escribiría un libro junto con J. D. Stasheff sobre dicha teoría [27].

Sea M^7 una variedad diferenciable compacta sin borde y orientada tal que $H^3(M^7;\mathbb{Z}) = H^4(M^7;\mathbb{Z}) = 0$. Por la sucesión exacta larga de homotopía, las variedades M_ℓ satisfacen esta hipótesis. Usando [34] se obtiene una variedad orientada B^8 de dimensión 8 cuyo borde es M^7. Estas hipótesis determinan una clase de homología relativa $\nu \in H_8(B^8, M^7;\mathbb{Z})$. Con esta clase se determina una forma bilineal simétrica ψ en $H^4(B^8, M^7;\mathbb{Z})$ (módulo torsión) dada por $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \cup \beta)(\nu)$. Sea $\tau(B^8)$ la signatura de ψ.

Consideremos ahora $p_1(B^8) \in H^4(B^8;\mathbb{Z})$, la primera clase característica de Pontrjagin de B^8, que es invariante por difeomorfismo. La hipótesis sobre M^7 permite comprobar que la aplicación natural $\iota : H^4(B^8;\mathbb{Z}) \to H^4(B^8, M^7;\mathbb{Z})$ es un isomorfismo, usando la sucesión exacta larga de pares. Definimos

$$q(B^8) := \psi(\iota^{-1}(p_1(B^8)), \iota^{-1}(p_1(B^8))).$$

Milnor demuestra que la clase de congruencia de $2q(B^8) - \tau(B^8) \pmod 7$ no depende de la variedad B^8 elegida, por lo que este valor define un invariante $\lambda(M^7) \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En [16] se calcula este invariante y se obtiene $\lambda(M_\ell) = \ell^2 - 1 \pmod 7$.

Posteriormente Milnor y M. Kervaire [11], siguiendo de nuevo técnicas de cobordismo, describieron el espacio de estructuras exóticas de n-esferas ($n \neq 3, 4$). En particular, obtuvieron 28 estructuras exóticas para $n = 7$.

El uso de técnicas de h-cobordismo (en las que Milnor es un experto [19]) dificulta el uso de estas técnicas en dimensión baja. Un h-cobordismo entre dos variedades diferenciables M, N (compactas sin borde) de dimensión n es una variedad diferenciable compacta W de dimensión $n+1$ tal que $\partial W = M \coprod (-N)$ y M, N son retractos por deformación de W; el teorema del h-cobordismo de Smale [33] afirma que si M, N son simplemente conexas y $n > 4$, entonces W es difeomorfa a $M \times [0, 1]$. El resultado es cierto para $n = 4$ si reemplazamos *difeomorfismos* por *homeomorfismos* (M. Freedman [7]), pero es falso en la categoría diferenciable (S. Donaldson [5]). Por ello, hay que esperar a los años 80 con los trabajos de M. Freedman [7] y R. Kirby [12], entre otros, en los que se obtuvieron resultados todavía más sorprendentes: $\mathbb{R}^4$ admite una infinidad de estructuras exóticas (S. Donaldson [4]).

3. Singularidades de hipersuperficies

La teoría de singularidades de hipersuperficies complejas tiene una fuerte relación con la topología diferencial y con la teoría de nudos. A principios del siglo XX, en un intento de resolver el problema de Riemann para superficies (ver F. Enriques [6]), surge de manera natural la cuestión sobre la topología del complementario de curvas algebraicas planas. Comprender esta topología motiva y empuja la teoría de nudos (especialmente nudos y enlaces algebraicos) con polinomios de Alexander (que ya usó independientemente O. Zariski [35]), presentaciones de Wirtinger y gran parte de los fundamentos modernos de la teoría de nudos.

El gran salto de calidad se produce con el libro de Milnor [21], en el que resuelve de manera elegante un buen número de problemas sobre la topología de las singularidades de hipersuperficies. Explicaremos los avances de Milnor y cómo su nombre ha quedado ligado a esta teoría.

Consideremos una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$, donde U es un abierto de $\mathbb{C}^n$, $0 \in U$. Supondremos que $f(0) = 0$ y estamos interesados en el estudio local de f en un entorno del origen, por lo que U puede ser restringido si es necesario. Por ejemplo, si la diferencial

$$df(0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{x=0} \neq 0,$$

es decir, $df(0)$ es suprayectiva, el teorema de la función implícita nos garantiza la existencia de un cambio de variable tal que $f = x_1$. Cuando esto no se puede asegurar, es decir, cuando la diferencial $df(0)$ es nula se dice que $0 \in U$ es un *punto singular de* f. A partir de ahora supondremos que 0 es un punto singular aislado, es decir, $df(x) \neq 0$ si $x \in U \setminus \{0\}$.

De lo dicho anteriormente se deduce en particular que si $S := f^{-1}(0)$ se tiene que $S^* = S \setminus \{0\}$ es una variedad analítica lisa de dimensión compleja $n-1$, es decir, una hipersuperficie lisa.

3.1. Fibración de Milnor

Una de las primeras aportaciones de Milnor en su libro [21] es la siguiente.

Lema 1. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ se tiene que la intersección de S y $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ es transversa.*

En el Lema 1 se identifica $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$; se denotan mediante $\mathbb{B}_\varepsilon^{2n}$ y $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ las bolas y esferas euclídeas de centro el origen y radio ε. Observemos que si el lema fuera falso encontraríamos una sucesión $x^n \in U$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, de puntos críticos para la función

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

restringida a S. Una de las grandes o pequeñas maravillas técnicas del libro es el llamado *Lema de selección de caminos*, que garantiza, en circunstancias como esta, la existencia no solo de una sucesión sino de un camino analítico, lo que permite llegar a contradicción.

Como consecuencia del Lema 1 y de los resultados clásicos de topología diferencial, se comprueba que $S \cap \mathbb{B}_\varepsilon^{2n}$ es de hecho un cono sobre $L_\varepsilon := S \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ para cualquier $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ y, por lo tanto, L_ε es un invariante de la singularidad al que llamaremos el *enlace* de la singularidad o enlace de $(f, 0)$. Más aún, se tiene lo siguiente:

Teorema 2. *El tipo de difeomorfismo de la variedad diferenciable del* enlace *L_ε, de dimensión $2n-3$, no depende de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

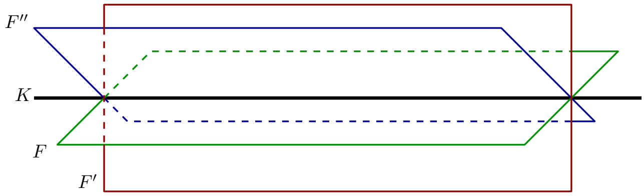


Figura 2: Descomposición en libro abierto de una esfera de Milnor.

Al valor ε_0 se le llama *radio de Milnor* de f y las bolas de radio a lo más ε_0 se dice que son *bolas de Milnor* de f.

El siguiente ejemplo nos permite enlazar esta sección con la anterior.

Ejemplo 3. E. Brieskorn [3] demostró que los enlaces de las singularidades en $\mathbb{C}^5$ definidas por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 + x_5^{6k-1} = 0, \quad k = 1, \ldots, 28,$$

son las 28 estructuras exóticas de $\mathbb{S}^7$.

En el caso clásico, $n = 2$, el enlace L_ε es una unión de circunferencias. Lo interesante es entender cómo estas circunferencias viven en la esfera, que en este caso es una esfera de dimensión 3. Como hemos señalado al principio de la sección, los nudos y enlaces así obtenidos se denominan enlaces algebraicos. Los enlaces algebraicos tienen una propiedad particular: son fibrados sobre la circunferencia y además lo son *en libro abierto*. Describamos lo que significa.

Sea L un enlace algebraico. Existe una aplicación diferenciable $\pi : \mathbb{S}^3 \setminus L \to \mathbb{S}^1$ que es un fibrado localmente trivial, cuyas fibras son superficies de Riemann abiertas. Si observamos esta fibración en un entorno de L, adquiere la estructura de un libro abierto: la clausura de las fibras son superficies compactas y lo que se añade es el borde, que es siempre L. Analíticamente significa que para cada componente conexa K de L podemos encontrar un entorno regular T de K (es decir, un toro sólido) tal que existe un difeomorfismo

$$\sigma : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}_1^2 \longrightarrow T, \quad \sigma(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = K,$$

tal que

$$\pi \circ \sigma(\lambda, z) = \frac{z}{|z|}.$$

Volvamos al caso general con la notación ya introducida. Milnor logra generalizar este resultado a cualquier dimensión de manera espectacular.

Teorema 4. *La aplicación*

$$\pi := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}^{2n-1} \setminus L \longrightarrow \mathbb{S}^1,$$

es un fibrado localmente trivial en libro abierto cerca de L.

La manera de atacar el problema es la siguiente. Aplicando topología diferencial clásica es fácil ver lo siguiente:

LEMA 5. *$\exists\ 0 < \eta \ll \varepsilon_0$, tal que $\forall t \in \mathbb{C}$, $|t| \leq \eta$, se tiene que la intersección de $f^{-1}(t)$ y $\mathbb{S}^{2n-1}_{\varepsilon_0}$ es transversa.*

Como consecuencia del Lema 5, si $X_{\varepsilon_0,\eta} := \mathbb{B}^{2n}_{\varepsilon_0} \cap f^{-1}(\mathbb{S}^1_\eta)$, la restricción

$$\pi' := \frac{f}{|f|} : X_{\varepsilon_0,\eta} \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

es una fibración localmente trivial. Integrando campos vectoriales, Milnor es capaz de conectar π con π' mediante una isotopía, lo que le permite demostrar el teorema 2. Estas ideas se esquematizan en la Figura 3, que aparece en prácticamente todas las conferencias dedicadas a singularidades de hipersuperficie.

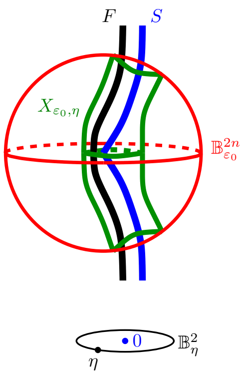


Figura 3: Bolas de Milnor.

Las fibraciones anteriores se conocen en la literatura como *fibraciones de Milnor*. Las fibras de π y π' son difeomorfas: se trata de variedades complejas de dimensión $n-1$ y para no desentonar reciben el nombre de *fibra de Milnor* y se denotan F. Sus clausuras se obtienen añadiendo L (en el caso de π) o una subvariedad difeomorfa a L (en el caso de π').

Los amplios conocimientos de teoría de homotopía permitieron a Milnor ir más lejos.

TEOREMA 6. *La fibra de Milnor F tiene el tipo de homotopía de un ramo de esferas de dimensión $n-1$. En particular, su homología reducida $\tilde{H}_k(F;\mathbb{Z})$ es trivial si $k \neq n$.*

El número de esferas del ramo se llama *número de Milnor* de f y se denota tradicionalmente por la letra μ. Un hecho notable es que este invariante topológico se puede obtener también de manera algebraica. Sea $R := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ el anillo de series convergentes cerca del origen en n variables. Como solo nos interesa el comportamiento de f en un entorno lo suficientemente pequeño del origen, podemos identificar f con un elemento de R. Sea $J(f)$ el ideal jacobiano de R, engendrado por las n derivadas parciales. Es conocido que f define una singularidad aislada en el origen si y solo si $\dim_{\mathbb{C}} R/J(f) < \infty$. De hecho, en esa situación

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} R/J(f).$$

3.2. Equisingularidad, multiplicidad y problemas relacionados

En [36], O. Zariski definió la noción de *equisingularidad topológica*: dos funciones holomorfas f_1 y $f_2 : U \to \mathbb{C}$, donde U es un abierto de $\mathbb{C}^n$, $0 \in U$ y $f_1(0) = f_2(0) = 0$, son *topológicamente equisingulares* si existe un homeomorfismo local $\phi : U \to U$ tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(f_1^{-1}(0)) = f_2^{-1}(0)$ (recordemos que U puede ser restringido si es necesario).

El número más simple que aparece asociado a una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = 0$ es su *multiplicidad*, es decir, el orden de f en el origen[9].

Zariski propuso el siguiente problema (que creía relativamente accesible para los topólogos diferenciales de la época).

Problema 1. *Dos funciones holomorfas f_1 y $f_2 : U \to \mathbb{C}$ que son topológicamente equisingulares, ¿tienen que tener la misma multiplicidad?*

Este problema solo ha sido resuelto para $n = 2$ y para $n > 2$ solo es conocido para algunos tipos particulares de funciones holomorfas. Un problema más sencillo es estudiar familias analíticas de funciones holomorfas $f_t \in \mathbb{C}\{t, x_1, \ldots, x_n\}$ que inducen una familia de hipersuperficies $S_t = \{f_t = 0\}$, cada una de las cuales posee una singularidad aislada en el origen. Si $n \neq 3$, D. T. Lê y C. P. Ramanujam [13] probaron que las funciones son topológicamente equisingulares si y solo si el número de Milnor $\mu(f_t)$ es constante en la familia. La condición $n \neq 3$ se debe a que en su demostración utilizan el teorema del h-cobordismo. En el caso $n = 3$, no se pueden aplicar ni el teorema del h-cobordismo ni tampoco el teorema del s-cobordismo. Este último caso fue demostrado independientemente por Barden, Mazur y Stallings; una demostración simplificada se encuentra en [10]. Con respecto al h-cobordismo, se reemplaza *retracto por deformación* por *mismo tipo de homotopía simple*, pero no se exige la hipótesis de simplemente conexo; este resultado tampoco es cierto para dimensión real 5 [14].

Problema 2. *Sea f_t una familia holomorfa de hipersuperficies con singularidad aislada y número de Milnor $\mu(f_t)$ constante. ¿Han de tener sus miembros la misma topología o la misma multiplicidad?*

Epílogo

La cantidad y calidad de las contribuciones de John Milnor al conocimiento matemático permitirían poder escribir varios trabajos similares a este en el que se traten otros temas. Aquí nos hemos limitado a dos tipos de contribuciones: unas, las que le valieron en su momento la medalla Fields y, otras, tal vez sus aportaciones más innovadoras y originales en teoría de singularidades.

[9]De manera equivalente, el orden de una serie centrada en el origen es el grado del primer término homogéneo no nulo en el desarrollo de Taylor de f en el origen.

REFERENCIAS

[1] J. W. ALEXANDER, *An example of a simple connected surface bounding a region which is not simply connected*, Nat. Acad. Proc. **10** (1924), 8–10.

[2] L. ANTOINE, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leur voisinages (Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Strasbourg)*, Journ. de Math. (8) **4** (1921), 221–325.

[3] E. V. BRIESKORN, *Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **55** (1966), 1395–1397.

[4] S. K. DONALDSON, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315.

[5] ———, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 1, 141–168.

[6] F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Ann. Mat. Pura Appl. **1** (1924), no. 1, 185–198.

[7] M. H. FREEDMAN, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453.

[8] L. R. GOLDBERG Y A. V. PHILLIPS (EDS.), *Topological methods in modern mathematics*, Houston, TX, Publish or Perish Inc., 1993.

[9] M. GROMOV, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., no. 53 (1981), 53–73.

[10] M. A. KERVAIRE, *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings*, Comment. Math. Helv. **40** (1965), 31–42.

[11] M. A. KERVAIRE Y J. W. MILNOR, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.

[12] R. C. KIRBY, *The topology of* 4*-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1374, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[13] D. T. LÊ Y C. P. RAMANUJAM, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 1, 67–78.

[14] T. MATUMOTO Y L. SIEBENMANN, *The topological s-cobordism theorem fails in dimension* 4 *or* 5, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **84** (1978), no. 1, 85–87.

[15] J. W. MILNOR, *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 248–257.

[16] ———, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405.

[17] ———, *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 575–590.

[18] ———, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[19] ———, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[20] ———, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Differential Geometry **2** (1968), 447–449.

[21] ———, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.

[22] ———, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 72, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[23] ———, *Analytic proofs of the «hairy ball theorem» and the Brouwer fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 7, 521–524.

[24] ———, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1997.

[25] ———, *Dynamics in one complex variable*, third ed., Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2006.

[26] ———, *Spheres*, `http://wn.com/Differential_topology`, 2011.

[27] J. W. Milnor y J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, vol. 76, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.

[28] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 96–114.

[29] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 521–554.

[30] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *John Willard Milnor*, disponible en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Milnor.html`.

[31] T. Radó, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Szeged **2** (1925), 101–121.

[32] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Actualités Sci. Ind., no. 1183, Hermann & Cie., Paris, 1952, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.

[33] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399.

[34] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.

[35] O. Zariski, *On the Topology of Algebroid Singularities*, Amer. J. Math. **54** (1932), no. 3, 453–465.

[36] ———, *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481–491.

Enrique Artal Bartolo, Dpto. de Matemáticas, IUMA, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza

Correo electrónico: `artal@unizar.es`

José I. Cogolludo Agustín, Dpto. de Matemáticas, IUMA, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza

Correo electrónico: `jicogo@unizar.es`

Alejandro Melle Hernández, Dpto. de Álgebra, ICMAT, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Correo electrónico: `amelle@mat.ucm.es`