En memoria de James Serrin, un gran matemático del siglo XX

por

Ireneo Peral Alonso

A media tarde del 23 de agosto de 2012 falleció en su casa de Minneapolis James Serrin, rodeado de su mujer, Barbara, y de sus hijas Martha, Elisabeth y Janet. No pudo superar una delicada intervención quirúrgica.

El Profesor Serrin se relacionó con bastantes matemáticos españoles. Recuerdo con nostalgia su participación en el curso que tuve ocasión de organizar en la UIMP de Santander el año 1996. Tengo una cálida memoria de aquellos días.

James Serrin en Perugia (Italia).

A lo largo de los años coincidí con James Serrin en muchas ocasiones. Fue en Perugia (Italia), a fines de mayo de 2012, cuando nos encontramos por última vez. Recuerdo nuestra despedida y sus palabras de afecto, elogio y ánimo, como era habitual en él. Su desaparición me ha impresionado y entristecido profundamente porque nos unía una buena amistad.

Tengo también una gran admiración por la profundidad de las matemáticas creadas por James Serrin. Con motivo de la preparación de la edición de una selección de sus trabajos, D. Kinderlehrer, P. Pucci y V. Radulescu me pidieron que comentara un par de artículos de los seleccionados. La elaboración de mi comentario me llevó a tener que ver más de cerca la obra científica de Serrin y, como consecuencia, mi respeto por su obra aumentó aún más si cabe.

La aportación de James Serrin al estudio las Ecuaciones en Derivadas Parciales es de tal profundidad que la hace decisiva en el desarrollo de esta área en la segunda mitad del siglo XX y los años transcurridos del XXI.

Me parece oportuno escribir una breve exposición de su biografía y de su obra para la comunidad matemática de habla hispana en general. Sirva como recuerdo y homenaje en el triste momento de la desaparición de James Serrin.

1. Biografía

James Serrin nació en Chicago el 1 de noviembre de 1926. Comenzó sus estudios en la Evanston Township High School, y obtuvo el Doctorado en Matemáticas en el año 1951 en la Universidad de Indiana bajo la dirección de David Gilbarg. Inició su carrera como *Fine Instructor of Mathematics* en la Universidad de Princeton en el mismo 1951. A continuación, de 1952 a 1954, desempeñó el puesto de *C.L.E. Moore Instructor of Mathematics* en el Massachusetts Institute of Technology. Fue durante esta época de Boston cuando conoció a Barbara West, su compañera de toda la vida, con quien se casó en septiembre del 1952. Tras la estancia en el MIT fue contratado como *Assistant Professor in Mathematics* en la Universidad de Minnesota, donde, desde entonces, desarrolló su fructífera carrera matemática: en 1956 pasó a desempeñar el puesto de *Associate Professor*, en el año 1959 es promovido a *Professor* y en 1969 es nombrado *Regents' Professor of Mathematics*.

James Serrin ha sido uno de los mejores matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, que, por otra parte, bien puede considerarse como un *Siglo de Oro* de las Ciencias, y en particular de las Matemáticas. Como tal, Serrin recibió numerosos reconocimientos académicos, por ejemplo el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Sussex (Reino Unido) en 1972, por las Universidades de Ferrara y de Padua (Italia) en 1992, y por la Université François-Rabelais de Tours (Francia) en 2005.

En 1973, la American Mathematical Society le concedió el prestigioso *George David Birkhoff Award in Applied Mathematics*. En 1979 recibió el *Distinguished Alumni Award* de la Universidad de Indiana, galardón muy apreciado en el ambiente universitario de Estados Unidos. Desde 1980 ha sido miembro de la *National Academy of Sciences* y de la de la *American Academy for the Advancement of Science*, y desde 1984 de la *American Academy of Arts and Sciences*. Entre las comisiones que presidió se cuentan el *Committee on Prizes* y el *Committee for Progress in Mathematics*, ambos de la American Mathematical Society.

James Serrin fue un editor activo en muchas de las mejores revistas matemáticas del mundo. Quiero destacar el periodo entre los años 1969 y 1986 en que fue co-editor de *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, una de las revistas clásicas y más apreciadas.

Serrin ha sido asiduo visitante de los centros más importantes del mundo e invitado a congresos internacionales del más alto nivel. Como ejemplo, fue conferenciante invitado en los *International Congresses of Mathematicians* de Niza en el año 1970 y de Varsovia en el año 1983.

2. Contribución científica

Las contribuciones de James Serrin a las Matemáticas son fundamentales y muy influyentes en el desarrollo de la teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y de sus aplicaciones. Serrin mostró su interés por una amplia gama de problemas. Voy a citar algunos resultados que, a mi modo de ver, son seminales y origen de métodos con gran proyección en el desarrollo de las matemáticas actuales.

De derecha a izquierda, J. Serrin, A. Struwe, M. Struwe, A. Ambrosetti, D. Ambrosetti, D. De Figueiredo, I. Peral y M. Walias, en Santillana del Mar (Cantabria).

Serrin se ocupó de un problema básico del *Cálculo de Variaciones*. En [1] prueba que, dado un lagrangiano $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, la convexidad de f respecto a la variable en $\mathbb{R}^n$ implica la semicontinuidad inferior débil del funcional

$$J(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Este resultado, con precedentes en Tonelli para el caso de una dimensión, ha sido origen de muchas extensiones al caso en que u es un vector, usando distintos conceptos de convexidad que aparecen de forma natural, por ejemplo, en la Teoría de la Elasticidad.

Una contribución trascendental de Serrin es la introducción y el desarrollo del método de *moving planes*, también conocido como *método de Alexandroff-Serrin*. En el trabajo [7], Serrin prueba el siguiente resultado para un problema sobredeterminado procedente de la *Teoría del Potencial*:

Considérese el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ y } \ \dfrac{\partial u}{\partial n} = c & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si tiene una solución, necesariamente Ω es una bola y la solución es la correspondiente solución radial.

Este resultado ha sido objeto de múltiples extensiones y, lo que es más interesante, el método de *moving planes* tiene una grandísima aplicación a estudiar simetría de las soluciones de problemas elípticos. Hay una larga lista de contribuciones importantes en este tema.

Otro problema que James Serrin ha considerado ampliamente, y sobre el que publicó más de una decena de artículos entre 1963 y 2011, es el comportamiento de la ecuación de *superficies mínimas*. Uno de los resultados clásicos en esta área se puede referir como sigue:

> *Dado un dominio regular, la condición de solubilidad para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de superficies mínimas es que la curvatura media en los puntos de la frontera sea no negativa.*

En este sentido, el artículo de James Serrin en los *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, [6], analiza cómo *ciertos invariantes de la ecuación juegan un papel central en la cuestión de la existencia de soluciones del problema de Dirichlet* para la ecuación

$$\mathfrak{A}(x,u,Du)D^2u = \mathfrak{B}(x,u,Du),$$

donde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son suficientemente regulares y $\mathfrak{A}$ es una matriz elíptica.

Esta es una contribución a la solución del Problema XX de Hilbert que, como apunta Serrin en su artículo [9], más que un problema es todo un programa. Una referencia adecuada para ver una panorámica de este campo de la *teoría de solubilidad* es el artículo del propio James Serrin en las actas del ICM de Niza de 1970, [8].

En relación con los Problemas de Hilbert XIX y XX, es necesaria la consideración de coeficientes no regulares en las ecuaciones elípticas en forma de divergencia que aparecen como ecuaciones de Euler de los funcionales que se estudian. Dicha falta de regularidad conlleva serias dificultades, y la solución del Problema XIX exigió a Ennio de Giorgi la elaboración de nuevos argumentos para demostrar que los mínimos de funcionales son, al menos, Hölder continuos.

Tal vez el paradigma para entender tales dificultades sea el famoso ejemplo que Serrin escribe en un corto artículo en los *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, [4]. Este ejemplo expresa cómo las hipótesis en el Teorema de De Giorgi son optimales y, además, le permite a Serrin formular una conjetura que es natural y lleva su nombre. La conjetura de Serrin es complementaria del resultado de De Giorgi y se formula como sigue:

> *Sea la ecuación* $\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0$*, donde* $A(x)$ *es una matriz uniformemente elíptica. Si los coeficientes son Dini-continuos, entonces cualquier solución distribucional* $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *verifica que es una solución variacional, es decir,* $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$.

La conjetura de Serrin ha sido recientemente probada por H. Brezis (ver [12] y las referencias allí incluidas).

El trabajo más veces citado de James Serrin está dedicado a la regularidad interior de soluciones de ecuaciones *casi lineales* y fue publicado en *Acta Mathematica* el año 1964, [3]. En él usa las técnicas de Moser en los problemas elípticos casi lineales obteniendo una completa visión sobre la regularidad de sus soluciones. El artículo [3] es un trabajo de referencia obligada.

Siguiendo su interés por el estudio de resultados optimales de regularidad, en un trabajo conjunto con D. Aronson en *Archive for Rational Mechanics and Analysis* de 1967, [5], Serrin extiende a una amplia clase de ecuaciones parabólicas casi lineales sus resultados para ecuaciones elípticas de [3]. En él aparece la *curva de Aronson-Serrin* que determina la frontera de sumabilidad del término independiente en orden a obtener soluciones acotadas. Otra vez nos encontramos con una piedra angular, ahora de la teoría ecuaciones parabólicas.

Quiero destacar otro resultado interesante relacionado de nuevo con el *Cálculo de Variaciones*. Como extensión de la identidad de Pohozaev, Serrin, en colaboración con Patrizia Pucci, obtiene en [10] una familia de desigualdades variacionales que son de gran utilidad en las aplicaciones.

La atención de Serrin por problemas básicos de la Física Matemática es muy considerable. Como primer ejemplo tenemos el más que notable artículo sobre regularidad interior de soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes publicado en *Archive for Rational Mechanics and Analysis* el año 1962, [2]. Podemos resumir el resultado como sigue:

> *Sea* $\Omega_T := \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^N \times (0,T)$, *donde* Ω *es un dominio regular. Supongamos que el término independiente cumple* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T)$, *que la solución débil* u *satisface las condiciones* $u \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, $\operatorname{rot} u \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$, *y que* $u \in L^{s'}((0,T); L^s(\Omega))$, *donde* $\frac{N}{s} + \frac{2}{s'} < 1$. *Entonces* u *tiene un representante en* $\mathcal{C}^\infty(\Omega_t)$ *para todo* $t < T$ *fijo.*

Como consecuencia, en dicha clase de funciones se tiene unicidad de solución. Y queda el problema abierto (clásico) de probar que toda solución débil verifica la regularidad que se postula en el resultado de Serrin.

Otros problemas derivados de la Física que interesaron a Serrin son los de Mecánica y Termodinámica. Entre 1959 y 1996 publicó más de una decena de trabajos en relación a la fundamentación teórica de la mecánica y la termodinámica basados en los trabajos clásicos de Kelvin, Clausius, Gibbs y Carathéodory. Como exponente de su interés en esta área está la monografía con C. S. Man, *Foundations of Thermodynamics*, en periodo de finalización y que esperamos aparezca pronto como obra póstuma de James Serrin.

A lo largo de su carrera, Serrin ha estudiado en profundidad muchos aspectos de las ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, el resultado con Peletier de unicidad de los *ground-states* de algunas ecuaciones elípticas semilineales en $\mathbb{R}^N$, los teoremas generales de existencia obtenidos con Franchi y Lanconelli, o los teoremas de comparación para ecuaciones elípticas casi lineales obtenidos con Patrizia Pucci y Zhou, que son pioneros. Una buena idea de este último apartado se puede ver en la monografía conjunta con P. Pucci, [11]. ¡Y un largo etcétera que llegaría hasta los casi 200 artículos publicados por Serrin!

Dejo aquí la referencia a los trabajos de Serrin, remitiéndome para más detalles al libro *Selected papers by James Serrin* que aparecerá publicado, en breve, en la editorial Birkhäuser.

3. Epílogo

La tristeza de la despedida de James Serrin es difícil de compensar porque es una pérdida irreparable. No obstante, la huella que deja en las Matemáticas es imborrable y por ello conservaré siempre en mi memoria su recuerdo.

Nos falta un amigo y un sabio consejero, nos queda su obra que, en palabras de Einstein,... *es para la Eternidad*.

Referencias

[1] J. Serrin, On a fundamental theorem of the calculus of variations, *Acta Math.* **102** (1959), 1–22.

[2] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962), 187–195.

[3] J. Serrin, Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Math.* **111** (1964), 247–302.

[4] J. Serrin, Pathological solutions of elliptic differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **18** (1964), 385–387.

[5] D. G. Aronson y J. Serrin, Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** (1967), 81–122.

[6] J. Serrin, The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **264** (1969), 413–496.

[7] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (1971), 304–318.

[8] J. Serrin, Boundary curvatures and the solvability of Dirichlet's problem, *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 2, 867–875, *Gauthier-Villars*, Paris, 1971.

[9] J. Serrin, The solvability of boundary value problems, *Mathematical developments arising from Hilbert problems (De Kalb, Ill., 1974)*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, 507–524, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[10] P. Pucci y J. Serrin, A general variational identity, *Indiana Univ. Math. J.* **35** (1986), no. 3, 681–703.

[11] P. Pucci y J. Serrin, *The maximum principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **73**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[12] H. Brezis, On a conjecture of J. Serrin, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **19** (2008), no. 4, 335–338.

Ireneo Peral, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, España

Correo electrónico: `ireneo.peral@uam.es`