La Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), Núm. 1, Págs. 169–183

Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

La obra de Kunihiko Kodaira

por

Ignacio Sols Lucía

Introducción

En septiembre del año 1976, Arnaud Beauville comenzaba a impartir en la Universidad de Orsay (*Paris Sud*) un curso sobre los trabajos de Kunihiko Kodaira acerca de la clasificación de las superficies kählerianas compactas. En aquel entorno de Bures-sur-Ivette, el IHES, la geometría de que se había estado hablando, hasta hacía nada, era del tenor de aquella «*Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*». Se oía de pronto un lenguaje diferente: el teorema de Castelnuovo, el teorema de Enriques, las superfices de Bordiga, las superficies de dimensión de Kodaira nula. Y entre ellas, aquellas fascinantes K3, de las que se decía —ignoro con qué fundamento— que debían su nombre a Kummer, Klein y Kodaira (otros decían que era por ser su acceso más difícil que el del pico K2 en la cordillera del Himalaya).

Aquel curso sobre el famoso artículo de Kodaira fue aire fresco que revitalizó una geometría que llevaba casi dos décadas en las abstracciones de Alexander Grothendieck y sus discípulos, desarrolladas principalmente para demostrar las conjeturas de Weil, algo que hacía dos años Pierre Deligne había logrado, utilizando sólo una parte inesperadamente pequeña del formalismo desarrollado. En aquella aula abarrotada de gente se sentaban cada martes Deligne, Illusie, Verdier, Giraud, Berthelot, Boutot…, huérfanos de un Alexander Grothendieck que había partido desilusionado hacia la más modesta Universidad de Montpellier precisamente en ese mismo mes de septiembre de 1976. La vuelta a la geometría clásica, pero ahora con la potencia de los modernos métodos cohomológicos desarrollados en las décadas anteriores, suponía un cambio de paradigma en geometría, paradigma unido al nombre de un matemático japonés que, como día que despunta por oriente, aparecerá ubicuo no sólo en el análisis, sino también en la geometría diferencial y geometría algebraica: Kunihiko Kodaira.

Cuando poco en ciencia se oía hablar de Japón, nos llegó pues de Japón esta figura que en pocas líneas se me pide glosar, o desglosar, algo nada fácil por ser tan variada la temática de su trabajo en matemáticas. Grosso modo, y para que resulte inolvidable, dividiré la vida personal y científica de Kunihiko Kodaira en tres etapas que convendrá mucho recordar, porque son las etapas que idealmente debieran dividir la vida de cualquier científico, aunque algo retrasadas en el caso del matemático japonés por el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial en el momento de graduarse.

1. Período de formación

Nacido en Tokio el 16 de marzo de 1915, la etapa de formación de Kunihiko Kodaira sucede toda en su país, graduándose primero en Ciencias Matemáticas, en 1938, y luego en Ciencias Físicas, en 1941, en la Universidad de Tokio.

Primera lección: todo matemático debe saber física. Carl Friedrich Gauss adoptó como lema de su actividad matemática un verso de Shakespeare:

Thou, nature, art my goddess. To thy law my services are bound.[1]

Es decir, que nada de inventar por inventar.

La teoría ondulatoria y los operadores en espacios de Hilbert habían sido propuestos a finales de los años veinte en los trabajos iniciales de Schrödinger, Heisenberg y Paul Dirac, y más tarde Hermann Weyl utiliza las representaciones de grupos de Lie compactos (concretamente SU(2)) para explicar los números cuánticos de la teoría atómica y el principio de exclusión de Pauli. No puede ser casualidad que el primer interés matemático de Kodaira fueran precisamente esos temas de análisis funcional y análisis armónico, culminando en una tesis doctoral en 1949, que llega con bastante retraso debido a su aislamiento y a la guerra mundial.

[1] *Vos, Naturaleza, sois mi musa. Al servicio de vuestras leyes se dedican mis esfuerzos.* Gauss está citando literalmente palabras puestas por Shakespeare en boca de Edmund en el acto 1, escena 2, de su obra «*King Lear*». (Véase la biografía de Gauss escrita por Hans Wussing (en 1974); podréis encontrar la referencia a esta cita en la página 88 de la 4.ª edición de la biografía publicada en 1982, en Teubner, Leipzig.)

Segunda lección de la vida de Kodaira. Lee su tesis con casi treinta y cinco años, y, en realidad, este matemático que hará aportaciones decisivas a la geometría algebraica, no toma contacto con ella, como veremos, hasta esa edad. Lo normal hubiera sido desanimarse por el hecho de que la guerra le hubiese sorprendido en el año mismo de su graduación —recordemos que Japón entró en guerra, con el asalto a Pearl Harbour, el 7 de diciembre de ese año de 1941—. Lo normal hubiera sido concluir que las circunstancias no hacían posible proseguir una carrera investigadora, pero no fue ésta la conclusión que él sacó. (Siempre que algún joven con aptitud y vocación científica me ha hablado de circunstancias adversas, o le he oído decir que ya es tarde para él, o que es tarde para un cambio de orientación hacia matemáticas más profundas, le he recordado la vida de Kunihiko Kodaira, quien en circunstancias aún más adversas, y con un advenimiento a la geometría algebraica aún más tardío, llegó a cambiar su paradigma. Y a quien se desanima al encontrar que un teorema que le costó un gran esfuerzo ya estaba demostrado, algo muy frecuente en matemática, le he animado recordándole que Kodaira se encontró con que importantes resultados hallados en su aislamiento en Japón no habían sido sino redescubrimientos de teoremas conocidos, o descubiertos al mismo tiempo.)

En cuanto al tema de su tesis doctoral, presentada en 1949, Kunihiko Kodaira aprovecha su formación analítica para demostrar un teorema de regularidad (derivabilidad infinita) de soluciones de operadores diferenciales *elípticos* sobre una variedad riemanniana. Digamos, para quien no esté familiarizado con el análisis, que el hecho de que un operador diferencial sobre secciones de un fibrado diferenciable —secciones con tantas derivadas como exija el grado del operador— sea «elíptico» viene a significar que, simbólicamente, al sustituir las derivadas parciales respecto de coordenadas locales por meros símbolos, y sustituir la composición de esas derivaciones por el producto formal de esos símbolos, resulta en todos los puntos una matriz regular, o, más precisamente, un automorfismo del fibrado alzado al cotangente de la variedad. Elíptico es, por ejemplo, el laplaciano $\Delta_d = dd^* + d^*d$ de la derivación ordinaria d de formas diferenciales sobre una variedad riemanniana, posiblemente con valores en un fibrado diferenciable con estructura métrica elegida —dando sentido al operador adjunto d^*—, de modo que a sus soluciones bien podemos llamarles ondas (la naturaleza siempre inspira). O, análogamente, es elíptico el laplaciano $\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ de la derivación $\overline{\partial}$ respecto de las coordenadas conjugadas de formas diferenciables sobre una variedad compleja, eventualmente tomando valores en un fibrado complejo con estructura hermítica elegida.

Como representativas de la veintena de publicaciones que recogen el trabajo de primera época de Kunihiko Kodaira, fundamentalmente de aplicación de los métodos analíticos del espacio de Hilbert a las ecuaciones diferenciales, citemos [5] y [6]. Las soluciones que cumplen la condición de armonicidad jugarán un papel esencial en su segunda etapa de trabajo cohomológico, y las técnicas que entonces desarrollará serán a su vez fundamento del trabajo de clasificación algebro-geométrica en su tercera etapa. Un tema fundamental en la obra de Kodaira de esta época es la finitud de la dimensión del espacio de soluciones de un operador elíptico en el caso de que la variedad sea compacta, hecho que jugará un papel clave en su investigación posterior, pues serán precisamente esas dimensiones las que permitan redefinir en términos analíticos los invariantes que la antigua geometría algebraica italiana había asociado a curvas y superfices.

Para completar la bibliografía que recoge la más importante producción de Kodaira de esta primera etapa, incluyendo el teorema de Riemann-Roch para formas armónicas sobre una variedad riemanniana compacta, citemos [3] y [8], la publicación más tardía [9] y, en parte, la mucho más tardía [15].

2. Período de pura investigación

La segunda etapa es la de máxima producción científica, en edad primada para ello, formado ya pero aún sin obligaciones docentes —ni necesidad de trabajar en temas sencillos y seguros, a conveniencia de doctorandos—, y es entonces cuando el acorazado Kunihiko Kodaira va a velocidad de crucero. Me refiero a su larga etapa de investigador en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde acude invitado por el mismo Hermann Weyl. Etapa que se extiende desde la terminación de su tesis doctoral en 1949, hasta entrados los años sesenta, al cruzar la barrera de sus cuarenta y cinco años —siempre con ese desfase inicial por aquellos años de guerra y aislamiento—. (Tomad nota, jóvenes, porque muchos os van a aconsejar lo contrario: la calidad y amplitud de miras de un científico depende mucho de cuán larga y acertada sea esa etapa a la que hoy llamamos *postdoc*, etapa que bien puede transcurrir en área distinta de aquélla en que el joven se formó, e incluso un cambio de orientación presta a menudo cierta originalidad en el nuevo campo. Y, sobre todo, larga o breve, en modo alguno puede faltar esa aventura personal en la vida del joven científico, una vez desligado del ambiente en que se formó. En particular, ningún científico debería estar atado por obligaciones docentes, sino gozar de total libertad de movimiento, hasta casi los treinta y cinco años, algo difícil para los españoles, pues durante esos años son tentados —o eran tentados, pues mi generación arrampló con todo— por muchas voces que les hablan de titularidades, cátedras, enchufes, clanes, oposiciones y prebendas. Frases «sabias y prudentes», por supuesto bienintencionadas, como aquélla de «quien se fue a Sevilla, perdió su silla» o aquel «ahora que puedes, no quieres, y cuando quieras, no podrás» o cosas parecidas. No. Esa sabiduría, o más bien astucia, valdrá quizá para la política, pero no para la ciencia. Quien se fue de Tokio, volvió a Tokio, como enseguida veremos. Y por eso Tokio es hoy Tokio, en ciencia, como también veremos.)

Entrando ya en la temática científica, esta etapa de Kunihiko Kodaira va a estar dedicada a las técnicas cohomológicas en geometría diferencial y analítica, para las cuales utilizará su formación en análisis, llegando en este campo a sus contribuciones más decisivas a las matemáticas, aquéllas que le valen la medalla Fields en 1954. El ambiente que le rodea en Princeton, y que da lugar pronto a naturales colaboraciones, es ciertamente estimulante: De Rham, Chow, un muy joven Hirzebruch, y quien habrá de ser su principal colaborador, Donald Clayton Spencer, con quien desarrollará la teoría de deformaciones, hoy teoría de Kodaira-Spencer (esencial para la actual teoría de *moduli* en geometría analítica y geometría algebraica).

La clave de la aplicación del análisis armónico a las teorías cohomológicas está en que cada clase, módulo formas exactas, de formas diferenciables d-cerradas sobre una variedad riemanniana orientable, eventualmente con coeficientes en un fibrado con métrica, o bien formas diferenciables $\overline{\partial}$-cerradas sobre una variedad compleja, posiblemente con coeficientes en un fibrado hermitiano, tiene exactamente un representante armónico, es decir, solución del laplaciano Δ_d o $\Delta_{\overline{\partial}}$. Así pues, los espacios de cohomología pueden verse como espacios de formas armónicas, tema en el que Kodaira es experto. Este resultado es conocido como teorema de Hodge, pero Kodaira rellenó la laguna que había en la demostración de Hodge y además levantó la restricción de compacidad que Hodge exigía, pidiendo sólo que en cada punto hubiese un sistema numerable de entornos. Pudo hacer así contribuciones fundamentales en cohomología de fibrados holomorfos sobre variedades kählerianas compactas. Éstas son variedades complejas que admiten una métrica hermitiana —algo de suyo gratuito—, pero tal que la parte imaginaria de su $(1,1)$-forma diferencial es de hecho una forma cerrada, equipándola así con una estructura de variedad simpléctica, la estructura propia del espacio de fases en mecánica clásica.

Kodaira demuestra en [13] (año 1953) el famoso «teorema de anulación de Kodaira» para variedades complejas compactas: si L es un fibrado holomorfo de rango uno sobre una variedad compleja compacta y su $(1,1)$-forma de curvatura es negativa, entonces $H^q(L) = 0$ para todo q estrictamente menor que la dimensión de la variedad. A partir de este teorema demuestra, el año siguiente, el «teorema de inmersión de Kodaira»: todas las variedades kählerianas compactas de clase entera (se sobreentiende siempre, tras multiplicación por $i/(2\pi)$) admiten una inmersión en el espacio proyectivo. Este teorema egregio para las matemáticas (que en cierto modo discurre en sentido inverso al teorema egregio de Gauss pues descubre la geometría inmersa a partir de la geometría abstracta) fue publicado por Kodaira en 1954 en [17], y es quizá la más profunda contribución de Kodaira a las matemáticas, la que le valiera la Medalla Fields. Para comprender su significado, recordemos que el hecho de que una variedad simpléctica, en particular una variedad kähleriana, tenga clase entera significa que la 2-forma cerrada que la define es una clase de De Rham entera en el sentido de que corresponde en el isomorfismo de De Rham a una clase de cohomología con coeficientes enteros, algo que a su vez equivale a que sea curvatura de un fibrado complejo L de rango uno —por fuerza, en este caso, de un fibrado positivo—, y de hecho, en el caso kähleriano, en que esa 2-forma es de tipo $(1,1)$, es curvatura de un fibrado de rango uno holomorfo. Lo que demuestra Kodaira es que una variedad kähleriana compacta de clase entera admite siempre una inmersión en un espacio proyectivo complejo de modo que la $(1,1)$-forma cerrada de curvatura de $L^{\otimes n}$, para $n \gg 0$, sea *cohomóloga* a la restricción de la forma simpléctica del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}$, parte imaginaria de su métrica hermitiana de Fubini-Study, siendo $L^{\otimes n}$ restricción del fibrado de Hodge $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ (véase [14] y [16]).[2] Combinado este resultado con el teorema de Chow-Kodaira en [10], queda asegurado que la variedad es algebraica, obteniéndose así que lo mismo es una variedad algebraica proyectiva compleja que una variedad kähleriana compacta de clase entera. Es decir, que algo tan concreto y algebraico como una variedad lisa definida en el espacio proyectivo mediante ecuaciones homogéneas (geometría inmersa) es exactamente lo mismo

[2] En su tesis doctoral, G. Tian ha demostrado que no sólo es *cohomóloga*, sino que asintóticamente coinciden.

que el objeto totalmente abstracto y analítico consistente en una variedad compleja compacta equipada con una métrica hermitiana cuya parte imaginaria sea una forma cerrada, siendo entera la clase de cohomología de De Rham que esa forma representa (geometría abstracta). Esto muestra una profunda conexión entre álgebra y análisis. Esto es profundidad en las buenas matemáticas.

Estos teoremas encontrarán su aplicación en la tercera época de la vida de Kunihiko Kodaira, la dedicada a clasificación de superficies kählerianas, y ello en combinación con otro tema *leitmotiv* de toda su investigación, el teorema de Riemann-Roch, a cuya extensión a superficies analíticas compactas, y explotación para su clasificación, dedica parte de los esfuerzos de esta segunda etapa, objeto de [8], [10], [11], [14] y [16]; y, en relación con éstos, los trabajos [12] y [15] sobre el género aritmético p_a (es decir, género geométrico p_g menos irregularidad q). Añadamos que, también demostrado por el uso de representantes armónicos, en toda variedad kähleriana compacta X, los números de Betti b_n, dimensión de sus espacios de cohomología o dualmente de la homología sin torsión, son suma de los números de Hodge $h^{p,q} = \dim H^q(\Omega^p_X)$, dimensión del espacio de cohomología q-ésima de la potencia exterior p-ésima del fibrado cotangente $\Omega^p_X = \Lambda^p T^*_X$, para todos $p+q=n$. Se llega así hasta la topología misma, quedando patente la conexión profunda que hay en toda la geometría —álgebra, análisis, topología—, e incluso conexión con la teoría de números, faceta que no llegó a tocar Kodaira, pero que aparece ya en las conjeturas de André Weil de los años cuarenta, demostradas por Pierre Deligne en 1974, conjeturas que relacionan los números de Betti con el número de puntos que la variedad tiene sobre cuerpos finitos. Kunihiko Kodaira extiende, en [14], este teorema de Hodge al caso de clases de formas diferenciales $\overline{\partial}$-cerradas con valores en un fibrado complejo de rango uno.

La teoría de deformaciones de Kodaira-Spencer (citemos [21], [22], [23], [25] y [27] como referencias principales) es otro fruto de esta época exclusivamente investigadora en la vida de Kunihiko Kodaira, y encontrará su aplicación en la teoría de *moduli* de diversos objetos en geometría analítica (imitada luego en geometría algebraica), una vez clasificados por ciertos invariantes discretos y siendo ya un continuo —un «espacio de *moduli*» o espacio de parámetros— el que clasifique los objetos con invariantes discretos fijados. En cierto modo, podemos ver las fibras de un morfismo entre variedades analíticas $X \longrightarrow S$ como deformaciones genuinas de la variedad X_0, fibra en un punto especial $0 \in S$, siendo la variedad S el espacio de parámetros de la deformación. La aplicación lineal de Kodaira-Spencer, $T_{t_0}S \longrightarrow H^1(X_0, TX_0)$, hace corresponder a cada vector tangente a S en t_0, es decir, a cada valor infinitesimal del parámetro de deformación, un elemento de $H^1(X_0, TX_0)$, o sea una deformación infinitesimal de la variedad X_0.

No siempre las deformaciones infinitesimales son versión infinitesimal de una deformación genuina, correspondiendo esos casos a singularidades en el punto especial del espacio de *moduli*.[3] La filosofía que se repetirá en muy diversos tipos de *moduli* —de curvas de género dado, de superficies de tipo general, de fibrados vectoriales estables, de fibrados principales estables— es siempre la misma: las deformaciones

[3]Hablamos de «*moduli*» cuando la deformación es universal en el sentido de que cualquier otra deformación tiene espacio de parámetros contenido —o, más precisamente, aplicado— en el espacio de parámetros de la deformación universal.

infinitesimales forman un cierto espacio de cohomología H^i relacionado de algún modo con el objeto dado. De forma más precisa, cuando se trabaja con haces no localmente libres, empleando el isomorfismo de dualidad de Serre se obtiene un resultado más débil, ya que el isomorfismo no toma valores en la cohomología de grado complementario sino en un espacio de extensiones, un Ext^i. Las obstrucciones a extender la deformación infinitesimal de un orden infinitesimal al siguiente, hasta obtener una deformación «formal» (es decir, en todos los órdenes infinitesimales), yacen en un espacio H^{i+1}. Kodaira probó que una deformación formal es siempre la versión formal de una deformación genuina. Por tanto, la anulación de este espacio de cohomología implica (¡sólo implica!) la lisitud del *moduli* en el punto correspondiente a ese objeto, lo que implica en este caso que toda deformación infinitesimal es la versión infinitesimal de una deformación genuina. En este caso, H^i resulta ser el espacio vectorial tangente al *moduli* en ese punto. Y es siempre importante que el *moduli* de deformaciones (o espacio de parámetros de la deformación universal) tenga a su vez estructura como la del objeto bajo estudio, es decir, analítica, kähleriana, algebraica y, de hecho, proyectiva, si así fuese la estructura del objeto al que se aplica la teoría de deformaciones. Éste es un tema clave en geometría analítica y geometría algebraica, iniciado precisamente en los trabajos de Kodaira y Spencer.

La teoría de deformaciones ha encontrado también aplicaciones en física a través de la «simetría especular»[4] que la utiliza de modo fundamental, lo que muestra una vez más que matemáticas y física son ambas inspiración de una para la otra. Además, elementos de la teoría de deformaciones que nacen de los trabajos de Kodaira y Spencer son las condiciones suficientes de Grothendieck de prorrepresentabilidad de un funtor, o las más fácilmente comprobables de Schlessinger, las cuales han sido utilizadas para el estudio de las deformaciones de representaciones bidimensionales, sobre cuerpos finitos, del grupo absoluto de Galois —es decir, del grupo profinito de Galois de la clausura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbb{Q}$—, eslabón fundamental para la demostración de la modularidad de las curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$, primero semi-estables, después en general, uno de cuyos corolarios es el último teorema de Fermat.

En el ICM de Amsterdam en 1954, aún en los primeros años de su etapa en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, los resultados obtenidos hasta entonces por Kodaira se verán premiados con la Medalla Fields, una Medalla Fields compartida por un Kunihiko Kodaira de casi ya cuarenta años y un jovencísimo Jean Pierre Serre en sus años veinte. Es significativo que Jean Pierre Serre recibirá medio siglo más tarde el primer Premio Abel seguido al año siguiente por un matemático de perfil muy parecido al de Kodaira: Michael Atiyah, buen conocedor, también, de la física, y experto en la interfase topología, geometría diferencial y geometría algebraica. Atiyah y Singer, con quien compartió el premio, habían culminado con un muy general «teorema del índice» (si bien el teorema respondía a una pregunta propuesta por Gelfand).

Como se sabe, el teorema de Riemann-Roch, central en geometría algebraica, fue enunciado por Riemann para curvas algebraicas como mera desigualdad y completa-

[4]En inglés, *mirror simmetry.*

do por Roch al encontrar el término corrector que había que sustraer para que fuera una igualdad. Este teorema se ha mostrado válido en campos cada vez más amplios de las matemáticas, y es debida a Kodaira su versión como teorema de Riemann-Roch para superficies analíticas compactas. Hirzebruch lo llevó a fibrados de rango arbitrario sobre variedades algebraicas proyectivas de dimensión arbitraria —Severi había dicho que eso sería como llegar a la luna—, y Grothendieck lo generalizó después a morfismos lisos proyectivos entre variedades lisas cuasi-proyectivas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Baum, Fulton y MacPherson lo extendieron luego a variedades singulares, y Gerd Faltings a variedades aritméticas.

En la conversión por Kodaira del teorema de Riemann-Roch en un teorema para formas armónicas sobre variedades riemannianas compactas, es decir, para formas en el núcleo del operador Δ_d (por analogía con el teorema clásico que trata en realidad de dimensiones de espacios de formas en el núcleo del operador $\Delta_{\overline{\partial}}$), queda sugerida su generalización a un teorema sobre la dimensión del espacio de soluciones de un operador elíptico sobre secciones diferenciables de fibrados sobre variedades diferenciables compactas. Éste es el teorema del índice de Atiyah-Singer, que lleva así a la geometría diferencial la más profunda tecnología de la geometría algebraica (hoy existe incluso para variedades diferenciables con borde, como el teorema del índice de Atiyah-Singer-Patodi). El teorema del índice proporciona la dimensión del espacio de soluciones de un operador elíptico en función de invariantes topológicos de la variedad, del fibrado y del operador.[5]

En geometría analítica y algebraica, el teorema de Riemann-Roch, combinado con los teoremas de anulación de cohomología de Cartan (en el caso analítico), de Serre (en el caso algebraico), el ya citado teorema de anulación de Kodaira y el teorema de dualidad de Serre, permite en muchísimas ocasiones calcular la dimensión del espacio de secciones de un fibrado holomorfo de rango uno o, equivalentemente, la dimensión del espacio proyectivo de divisores efectivos equivalentes a un divisor dado, verdadero martillo pilón para la clasificación de las superficies algebraicas —labor emprendida por Enriques, pero no con la potencia de los métodos cohomológicos—. De ella hablaremos a continuación, al tratar de la tercera etapa en el trabajo de Kunihiko Kodaira.

Lo que he pretendido resaltar, con esta breve digresión sobre la proyección en el futuro de la investigación básica de Kodaira de esta segunda etapa, es que al primer Premio Abel otorgado a Jean Pierre Serre (que todos entendieron era para Grothendieck y Serre, pero en la conocida imposibilidad de rendir homenaje a la genialidad perdida de Alexander Grothendieck), siguió un Premio Abel compartido por Atiyah y Singer, suponiendo ambos en cierto modo, y en su conjunto, un homenaje póstumo a la desaparecida figura de Kunihiko Kodaira.

[5]Este teorema clave, que generaliza el teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch a un enunciado válido para variedades riemannianas compactas, es un caso más de inspiración física en la matemática, pues utiliza en su demostración el operador de Dirac, introducido por Paul Dirac para enunciar la ecuación que lleva su nombre en mecánica cuántica.

3. Período de enseñanza universitaria

La tercera etapa en la vida de Kunihiko Kodaira es la del profesor universitario. A edad oportuna, pasados sus cuarenta y cinco años, deja el instituto de investigación pura para iniciar su vida universitaria, donde no dejará de investigar pero lo hará ya rodeado de alumnos y alternando el trabajo original con la docencia. Incluso quizá pueden reconocerse en la elección de la temática de esta época preferencias propias de quien además de investigar ha de enseñar: deja atrás los hallazgos de originalidad bruta por el trabajo de clasificación y aplicación de las técnicas modernas que él mismo ha contribuido a crear, para poner orden y avanzar en un campo ya conocido.

En una colaboración con Chow ([10]), Kodaira demostró que el hecho de que sea 2 el grado de trascendencia, sobre el cuerpo de los números complejos, del cuerpo de funciones meromorfas de una superficie compleja compacta equivale a que esa superfice sea algebraica, lo que a su vez equivale a que sea proyectiva. Kodaira demostró en [28] que, si este grado de trascendencia es uno, entonces la superficie admite un morfismo analítico a una curva de género uno, cuya fibra genérica es de género uno; y demostró en [32] que, si el grado de trascendencia es cero, entonces la superficie resulta de explosiones iteradas de una superficie abeliana o de una superfice K3.[6]

Es el resultado de algebraicidad en el caso de grado de trascendencia 2 el que introduce a Kodaira en la labor de simplificación, clarificación y ampliación, con el apoyo de las nuevas técnicas cohomológicas, de la clasificación de Enriques de las superficies algebraicas. Emplea para ello su potente teorema de anulación, el ya citado teorema de Hodge que relaciona los invariantes topológicos de Betti y los invariantes analíticos de Hodge $h^{p,q}$, y el teorema de dualidad de Serre, que en particular implica $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$, siendo n la dimensión de la variedad, en este caso 2 (a lo que hay que añadir la obvia, pero muy útil, igualdad $h^{p,q} = h^{q,p}$, que creo aún no he citado).

Ya que hemos señalado los ingredientes teóricos de la versión moderna de esta clasificación, no quiero dejar de mencionar que un ingrediente esencial es debido a Hodge, el teorema del índice que lleva su nombre: una clase no nula de divisores que tenga intersección nula con un divisor amplio, en particular con la sección hiperplana de una inmersión proyectiva de la superficie, tiene necesariamente autointersección negativa.

Cuántos y cuánto hemos disfrutado con las demostraciones de esa clasificación, una de las más bellas páginas de la geometría. Teoremas cohomológicos, aparentemente tan abstractos, aparecían ahora al servicio de aquella geometría tan bella, tan

[6] El espacio tangente en cada punto de una superficie K3 tiene una estructura natural de espacio vectorial monodimensional sobre el cuerpo de los cuaterniones, pero no por esto puede decirse que las superficies K3 sean curvas cuaterniónicas porque esta estructura no es integrable. Sin embargo, son variedades hiper-kählerianas, en el sentido de que admiten varias estructuras (de hecho, todo un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) de Kähler. Generalización a dimensión superior de estas importantes estructuras han sido las variedades de Calabi-Yau, definidas éstas porque su sistema canónico es trivial y sus irregularidades son todas nulas: $h^i(\mathcal{O}_X) = 0$ para $0 < i < n$. En la actualidad juegan un importante papel en la conjetural teoría de supercuerdas, que supone que las seis dimensiones no expandidas en el inicio del universo forman una 3-variedad de Calabi-Yau compleja (seis dimensiones reales).

intuitiva, tan... italiana. De hecho, esta clasificación, que une el antiguo y respetable nombre de Enriques al nombre emergente de Kodaira, supone un cambio de paradigma, un cambio de instrumental, y hasta un cambio de geografía, en la geometría algebraica: en adelante, y durante casi dos décadas, se habrá de hacer geometría algebraica sólo en los cenáculos donde la nueva tecnología ha sido asimilada. Por eso el libro «*Algebraic Geometry*» de Robin Hartshorne, aparecido hacia finales de los años setenta, y el casi simultáneo «*Principles of Algebraic Geometry*» de Griffiths y Harris, rompieron con esta situación elitista y «socializaron» la geometría algebraica al exponer en forma asequible los principios algebraicos, el primero, y analíticos, el segundo, de esta nueva forma de hacer en geometría. Supusieron pues el advenimiento de una nueva etapa en geometría algebraica, digamos que etapa de amplia geografía, en que se podría cultivar también fuera de los lugares privilegiados.

Pero digamos algo más sustantivo acerca de esta clasificación ([32], [33], [34], [37]), a la que tengo especial afecto porque para mí supuso mi primer embelesamiento con la geometría, algo así como la melodía que aún perdura en el lugar del primer amor y que, al volver a oírla, podría repetir el prodigio. (Aunque D. Pedro Abellanas llamaba a esto, más que amor, envenenamiento. De hecho, siempre que he querido «envenenar» a algún joven para la geometría algebraica, lo he hecho con este mismo veneno que yo sorbí, desde entonces prisionero de las matemáticas en esa casa encantada que es la geometría algebraica: le explicaba el trabajo de Kodaira, y efecto asegurado. Y si tan poderoso imán no producía en él atracción alguna, me quedaba también tranquilo, porque significaba que esto de la geometría algebraica no era lo suyo, que tampoco es materia obligatoria.)

Como es sabido, en el caso de las curvas basta el género o dimensión del espacio de diferenciales holomorfas para clasificarlas: las de género cero son todas isomorfas a la recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, las de género uno son las curvas elípticas, clasificadas por un valor en el dominio fundamental de Dedekind en el plano complejo, y para cada género superior se tiene un *moduli* cuyo estudio ha sido objeto de décadas de investigación en geometría algebraica, y aún perdura. Pero lo que interesó a Kunihiko Kodaira fue la clasificación de superficies algebraicas, algo bastante más articulado que simplemente clasificar curvas, y que se basa en el teorema ya varias veces nombrado de Riemann-Roch, que Kodaira llegó a hacer válido en [26] para cualquier superficie compleja compacta S en la siguiente forma:

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{D^2 - DK}{2},$$

donde $\mathcal{O}_S(D)$ es el fibrado holomorfo de rango uno asociado a un divisor D (D es el divisor consistente en los ceros y polos de una sección de ese fibrado; el producto de divisores es, por supuesto, su número de intersección como ciclos topológicos, el cual admite una definición en términos puramente algebraicos). Escribimos $\mathcal{O}_S$ si se trata del fibrado trivial, correspondiente pues al divisor cero, y denotamos por χ la suma alternada de las dimensiones de los espacios de cohomología; así, por ejemplo,

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g,$$

donde q es la irregularidad $\dim H^1(\mathcal{O}_S)$ y p_g es el género geométrico,

$$p_g = \dim H^0(S, \omega_S) = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S)^\vee,$$

o dimensión del espacio de las diferenciales holomorfas de orden máximo (se ha utilizado, para el isomorfismo, la dualidad de Serre). La anulación de este género ya no es suficiente para que una superficie algebraica sea racional, es decir, birracionalmente isomorfa al plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, como podría sugerir el caso de las curvas, sino que la condición necesaria y suficiente para la racionalidad es que se anule la irregularidad q y también el segundo género $P_2 = \dim H^0(S, \omega_S^{\otimes 2})$ (estas dos condiciones implican la anulación de todos los plurigéneros $P_n = \dim\, H^0(S, \omega_S^{\otimes n})$).

¿Y no basta, para la racionalidad de S, que todos los plurigéneros P_n sean nulos, como cabría esperar por analogía con el caso de las curvas? No basta, como lo demuestra el hecho de que una superficie reglada S, es decir, birracional a $C \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, para una curva algebraica C, tiene sus plurigéneros todos nulos, ya que $\omega_S \cong \omega_C \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}$ y $H^0(S, \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$. De hecho, la anulación de todos los plurigéneros equivale a que la superficie sea reglada, algo pues bastante más general que la mera racionalidad. Más precisamente, que una superficie sea reglada es equivalente a que ¡su duodécimo género sea nulo! (teorema de Enriques).

Y es ahora cuando la noción de dimensión de Kodaira juega su papel capital en clasificación: se trata de la dimensión de la imagen del morfismo de la variedad en un espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ definido por sistemas pluricanónicos suficientemente altos, es decir, de un morfismo tal que la antimagen del fibrado de Hopf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}}(1)$ del espacio proyectivo sea precisamente $\omega_S^{\otimes n}$, para $n \gg 0$, o, en términos más italianos y geométricos, morfismo tal que la antimagen de las secciones hiperplanas sean los divisores pluricanónicos nK_S.[7]

Pues bien, el teorema de Enriques puede ser ahora enunciado de la siguiente forma: la dimensión de Kodaira es negativa si y sólo si la superficie es reglada. Las superficies de dimensión de Kodaira cero (algo que Kodaira mostró equivalente a que el duodécimo múltiplo del sistema canónico sea el trivial) son muy interesantes. Sobreentendiendo siempre que hablamos de superficies minimales (o sea, sin curvas racionales de autointersección -1), pues las no minimales se obtienen de éstas mediante iteradas explosiones en algunos de sus puntos, las superficies de dimensión de Kodaira cero son: las abelianas; las superficies K3 (a las que ya he hecho propaganda en una nota a pie de página); las superficies de Enriques, es decir, con $q = p_g = 0$,

[7]Como la matemática sigue, pocos años antes de la muerte en 1997 de Kunihiko Kodaira se demostró, con teoría de Donaldson primero y con drástica simplificación en teoría de Seiberg-Witten después, que la dimensión de Kodaira es un invariante diferencial, tal como estaba conjeturado: si dos superficies algebraicas son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión de Kodaira. De hecho, esto sirvió para demostrar que algunas superficies algebraicas concretas no eran difeomorfas a pesar de ser homeomorfas, puesto que no tenían la misma dimensión de Kodaira.

Como es sabido, la teoría de Donaldson y su simplificación en teoría de Seiberg-Witten se apoyan en el teorema del índice de Atiyah-Singer, que tiene su origen en las generalizaciones de Kodaira llevando el teorema de Riemann-Roch al contexto de la geometría diferencial, de modo que se imitan en ésta técnicas de la geometría algebraica.

De este modo, ha sido la misma herencia de Kodaira la que ha venido en ayuda de una conjetura fundamental sobre la propia dimensión de Kodaira.

no de tipo general (exactamente aquéllas cuyo sistema bicanónico $2K_S$ es trivial); y las superficies hiperelípticas, es decir, las que admiten un morfismo a la recta $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ cuyas fibras generales son curvas de género uno.

También son muy interesantes las superficies que son variedades de tipo general, en el sentido de que tienen dimensión de Kodaira máxima, en este caso dimensión 2. Gieseker encontró un espacio de *moduli* para las superficies de tipo general, con técnica de teoría geométrica de invariantes muy parecida, aunque algo más complicada, a aquélla con que había descrito poco antes el *moduli* de curvas de género dado. El estudio del *moduli* de superficies de tipo general es todavía objeto de investigación.

Entre las dimensiones de Kodaira 0 y 2 quedan, claro está, las superficies de dimensión de Kodaira 1, que se caracterizan por poseer un morfismo a una curva de género igual a su irregularidad, siendo sus fibras generales curvas de género uno. Utilizo esta expresión para las fibras generales ya que no las quiero llamar curvas elípticas, como hacen impropiamente los geómetras, porque la teoría de números enseña a no llamar curva elíptica a una curva de género uno hasta que no se ha fijado en ella un punto como cero de su ley de adición abeliana.

En un intento de clasificar las variedades algebraicas de dimensión arbitraria (siempre sobrentedemos variedades no singulares, lo que tiene sentido en característica cero gracias al teorema de desingularización de Heisuke Hironaka), el matemático japonés Iitaka demostró en los años setenta que toda variedad X admite un morfismo pluricanónico $X \twoheadrightarrow X' \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ (dado por un múltiplo suficientemente alto del sistema canónico) a un espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ cuya imagen X' es una variedad de tipo general de dimensión igual a la dimensión de Kodaira de X, y cuyas fibras generales tienen dimensión de Kodaira cero. Esto reducía la labor de clasificación únicamente al estudio de lo siguiente:

(a) Variedades de dimensión de Kodaira nula.

(b) Variedades de dimensión de Kodaira máxima.

(c) Fibraciones.

Hubo cierto entusiasmo con este programa a finales de los años setenta, entre los japoneses del entorno de Iitaka, o los alemanes del entorno de Viehweg, aunque esta tarea se mostró pronto más difícil de lo esperado, hasta quedar estancada. Pero este atasco fue superado con el advenimiento, poco después, de la teoría de Mori, nacida a principios de los años 80 de su famoso teorema que caracterizaba el espacio proyectivo como aquél en el que ninguna deformación infinitesimal de una recta está obstruida. Lo que hoy llamamos teoría de Mori es el nombre moderno de la teoría de clasificación de variedades, quizá el campo más activo de la actual geometría algebraica.

¡Iitaka, Mori...!, nombres ahora japoneses y, de hecho, ¡de japoneses en Japón! ¿Qué había pasado? Que Kunihiko Kodaira, después de su época profesoral en las Universidades de John Hopkins (desde 1962) y Stanford (desde 1965) había vuelto en 1967 a su Tokio natal, al Japón. Corolario: quien se fue a Sevilla, ¿perdió su silla? Desde luego, en ciencia, no. Quien se fue de Tokio, a Tokio volvió.

Kunihiko Kodaira murió en Tokio el 26 de julio de 1997. Un hombre cabal. Una vida lograda.

Reconocimientos

Me ha resultado de gran utilidad para la elaboración de este recuerdo del profesor Kodaira la publicación de su obra completa en [38], que los españoles tenemos a mano, por ejemplo, en la biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Agradezco a Ignasi Mundet su lectura crítica de este artículo y sus sugerencias.

Comentario sobre las referencias elegidas

Resultaría imposible traer aquí, ni aun resumidamente, las referencias sobre obra tan extensa y variada como la de Kunihiko Kodaira. Solo facilitamos las de algunos artículos de investigación del propio autor, seleccionadas de entre las más de setenta que publicó.

Referencias

[1] K. Kodaira, Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. I, II, III, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944), 186–198, 257–261, 353–358.

[2] K. Kodaira, Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944), 262–268.

[3] K. Kodaira, On the existence of analytic functions on closed analytic surfaces, *Kōdai Math. Sem. Reports* **1** (1949), 21–26.

[4] K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), *Ann. of Math. (2)* **50** (1949), 587–665.

[5] K. Kodaira, The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 921–945.

[6] K. Kodaira, On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 502–544.

[7] G. de Rham y K. Kodaira, *Harmonic Integrals*, Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1950.

[8] K. Kodaira, The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, *Amer. J. Math.* **73** (1951), 813–875.

[9] K. Kodaira, Green's forms and meromorfphic functions on compact analytic varieties, *Canad. J. Math.* **3** (1951), 108–128.

[10] W.-L. Chow, Wei-Liang y K. Kodaira, On analytic surfaces with two independent meromorphic functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **38** (1952), 319–325.

[11] K. Kodaira, On the theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on Kählerian varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **38** (1952), 522–527.

[12] K. KODAIRA, Arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **38** (1952), 527–533.

[13] K. KODAIRA, On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **39** (1953), 1268–1273.

[14] K. KODAIRA, On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* **39** (1953), 865–868.

[15] K. KODAIRA, Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, *Ann. of Math. (2)* **59** (1954), 86–134.

[16] K. KODAIRA, On Kähler varieties of restricted type, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **40** (1954), 313–316.

[17] K. KODAIRA, On Kähler varieties of restricted type (an intrinsec characterization of algebraic varieties), *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), 28–48.

[18] K. KODAIRA, Characteristic linear systems of complete continuous systems, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 716–744.

[19] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, On the variation of almost-complex structure, *Algebraic Geometry and Topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, 139–150, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[20] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, On deformations of complex analytic structures I, II, *Ann. of Math. (2)* **67** (1958), 328–466.

[21] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, On the existence of deformations of complex analytic structures, *Ann. of Math. (2)* **68** (1958), 450–459.

[22] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, *Acta Math.* **100** (1958), 281–294.

[23] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, Existence of complex structure on a differentiable family of deformations of compact complex manifolds, *Ann. of Math. (2)* **70** (1959), 145–166.

[24] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 477–500.

[25] K. KODAIRA, On deformations of some complex pseudo-group structures, *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), 224–302.

[26] K. KODAIRA, On compact complex analytic surfaces, I, *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), 111–152.

[27] K. KODAIRA Y D. C. SPENCER, Multifoliate structures, *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), 52–100.

[28] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces II, III, *Ann. of Math. (2)* **77** (1963), 563–626; *ibid.* **78** (1963), 1–40.

[29] K. KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surfaces I, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.* **50** (1963), 281–221.

[30] K. KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surfaces II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **51** (1964), 1100–1104.

[31] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces*, Lecture Notes prepared in connection with the Summer Institute on Algebraic Geometry, organized by O. Zariski, and held at the Whitney Estate, Woods Hole, Massachusetts, July 6 – July 31, 1964. Disponible en `http://www.jmilne.org/math/Documents/woodshole.pdf`.

[32] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces, I, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 751–798.

[33] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces, II, *Amer. J. Math.* **88** (1966), 682–721.

[34] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces, III, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 55–83.

[35] K. Kodaira, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, *J. Math. Soc. Japan* **20** (1968), 170–192.

[36] K. Kodaira, On the structure of complex analytic surfaces, IV, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 1048–1066.

[37] K. Kodaira, On homotopy K3 surfaces, *Essays on Topology and Related Topics. Mémoirs dédiés à George de Rham*, 58–69, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[38] Walter L. Baily, Jr. (editor), *Kunihiko Kodaira: Collected Works*, Vols. I, II and III, Iwanami Shoten Publishers, Tokio; Princeton University Press, Princeton, N. J., 1975.

Ignacio Sols Lucía, Dpto. de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid
Correo electrónico: `isols@mat.ucm.es`