En recuerdo de José Luis Rubio de Francia (1949–1988): una mirada al teorema de extrapolación

por

Javier Duoandikoetxea

Resumen. En este artículo recordamos a José Luis Rubio de Francia al cumplirse veinticinco años de su fallecimiento. En la primera parte presentamos su biografía y mencionamos algunas de sus aportaciones matemáticas. En la segunda parte exponemos los resultados en teoría de pesos A_p que han quedado permanentemente asociados a su nombre: el *algoritmo de Rubio de Francia* para construir pesos A_1 y el teorema de extrapolación.

Hace veinticinco años, el 6 de febrero de 1988, moría en Madrid José Luis Rubio de Francia a la edad de 38 años. Uno de los más brillantes matemáticos españoles de su generación, desapareció en un momento de gran creatividad y reconocimiento internacional. *Collectanea Mathematica* ([14]) y la *Revista Matemática Iberoamericana* ([7]) publicaron sendas necrológicas escritas por José García-Cuerva y Antonio Córdoba, respectivamente, en las que se comentan algunos de sus trabajos matemáticos. *Extracta Mathematicae*, de cuyo comité editorial formaba parte, publicó una descripción de su currículum. En 1988 no se publicaba La Gaceta.

La Real Sociedad Matemática Española instauró en 2004 el premio *José Luis Rubio de Francia*, en colaboración con las universidades de Zaragoza y Autónoma de Madrid, en las que ejerció la mayor parte de su actividad docente. El premio ha hecho que las nuevas generaciones de matemáticos se hayan familiarizado con su nombre, aunque posiblemente no conozcan quién fue y qué hizo.

La primera parte de este artículo presenta unas notas biográficas de José Luis Rubio y algunos apuntes sobre su labor matemática. En la segunda parte se expone uno de sus resultados más significativos: el teorema de extrapolación de pesos.

1. José Luis Rubio de Francia

José Luis Rubio de Francia nació en Miedes de Aragón (Zaragoza) el 17 de noviembre de 1949. Estudió bachillerato en el Colegio Cardenal Xavierre de Zaragoza, consiguiendo el Premio Extraordinario de Bachillerato Superior en 1965.[1] Al año

[1] En aquella época la enseñanza secundaria se empezaba normalmente el año en que se cumplían diez. Tras cuatro cursos se hacía una reválida que daba el título de Bachiller Elemental. Dos cursos más y otra reválida daban el título de Bachiller Superior. Al siguiente curso, el Preuniversitario, le seguían unas Pruebas de Madurez que daban el pase a la universidad. La entrada a la universidad era un año antes que ahora.

siguiente fue el ganador absoluto de la III Olimpiada Matemática Española con 77 puntos sobre 80 posibles en la fase final (figura 1).[2]

GANADORES DE LA OLIMPIADA

Primer premio nacional

JOSÉ L. RUBIO DE FRANCIA

Nació en Miedes de Aragón (Zaragoza). Tiene 17 años. Cursó todos sus estudios de Bachillerato en el Colegio «Cardenal Xovierre», de los P. P. Dominicos, en Zaragoza. Matrícula de Honor en Matemáticas todos los cursos. Obtuvo el Premio extraordinario del Bachillerato Superior.

Figura 1: Anuncio del primer premio de la III Olimpiada Matemática Española en la *Gaceta Matemática* de 1966.

Desde 1966 hasta 1971 cursó los estudios de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, ocupando además un puesto de profesor ayudante de problemas a partir del tercer curso. Se licenció con la calificación de Sobresaliente y consiguió el Premio Extraordinario de Licenciatura en 1971 y el Premio Nacional Fin de Carrera en 1972.

Durante los tres cursos siguientes fue profesor encargado de curso en la Universidad de Zaragoza, al tiempo que realizaba su tesis doctoral bajo la dirección del profesor Luis Vigil. La tesis, titulada *Sobre integración en grupos clásicos y abstractos y aplicaciones al análisis de Fourier* y presentada en 1974, recibió el Premio Extraordinario de Doctorado de 1975.

José Luis pasó los dos cursos siguientes en la Universidad de Princeton, como *Visiting Student* el primero y como *Visiting Fellow* el segundo, con una beca del Programa de Cooperación Cultural entre España y los Estados Unidos. Esa estancia marcó su orientación matemática, especialmente por la influencia de los cursos impartidos por Elias M. Stein, quien era la referencia mundial en el análisis de Fourier de la llamada «escuela de Calderón-Zygmund». Esos cursos atrajeron a José Luis a un campo menos abstracto que el desarrollado en su tesis doctoral. Redactó —en castellano— unas notas del curso de Stein en un cuaderno que más adelante, fotocopiado, fue una de las lecturas formativas de sus alumnos. Allí se encuentran temas ahora clásicos y entonces recientes, como los teoremas de restricción de la transformada de Fourier, los operadores de Bochner-Riesz, la función maximal esférica, la

[2] La Real Sociedad Matemática Española convocó la primera Olimpiada en 1964, para estudiantes de Preuniversitario. De cada distrito universitario salían tres finalistas y en la fase final se premiaba a los tres primeros. Como ahora se hace en La Gaceta, entonces los ganadores se anunciaban en la *Gaceta Matemática*, una de las revistas publicadas por la RSME, que también incluía las mejores puntuaciones de la fase final.

Figura 2: José Luis Rubio (cuarto por la derecha en la última fila) con algunos compañeros de la universidad de Zaragoza y su profesor Antonio Plans en el curso 67–68. Foto cortesía de Francisco Luquin.

transformada de Hilbert sobre curvas, y otros operadores singulares con homogeneidad generalizada. En casi todos ellos realizó él mismo aportaciones notables años después.

En diciembre de 1975 se presentó a las oposiciones de la época, ganando una plaza de Profesor Agregado de Análisis Matemático II en la Universidad Complutense, donde impartió docencia el curso 76–77, para pasar después a una plaza similar en la Universidad de Zaragoza en la que permaneció hasta 1981. El curso 79–80 también impartió docencia en el Colegio Universitario de Logroño, adscrito a la Universidad de Zaragoza.

Consiguió una cátedra de Análisis Matemático en la Universidad de Málaga en 1981, pero no ejerció como profesor en ella sino que se incorporó en comisión de servicios a la Universidad Autónoma de Madrid de la que fue catedrático a partir del curso siguiente hasta su fallecimiento.

1.1. Unas líneas sobre sus trabajos matemáticos

No fue hasta el principio de los años ochenta que las publicaciones de José Luis Rubio empezaron a aparecer regularmente en revistas de investigación. Aparte de la influencia de los cursos de Stein antes mencionados, su participación en un célebre congreso en Williamstown en 1978, en el que se reunieron todos los expertos en Análisis Armónico de la época, fue determinante en la orientación de su investigación. En particular, la conferencia de John Gilbert sobre factorización de operadores le inspiró en sus trabajos pioneros sobre la conexión entre desigualdades vectoriales y desigualdades con peso. A partir de ese momento, la cantidad y calidad de sus publicaciones crece considerablemente.

Su contribución a la estructura de las clases de pesos A_p con el ahora llamado *algoritmo de Rubio de Francia* de construcción de pesos A_1, que condujo a una nueva prueba, hoy estándar, del teorema de factorización y a su célebre *teorema de extrapolación* serán el tema de la segunda parte de este artículo. Fueron los resultados que colocaron a José Luis en una línea de reconocimiento internacional que le valió invitaciones a congresos y a estancias en instituciones extranjeras. Precisamente en una estancia en el Instituto Mittag-Leffler en 1983 completó la prueba de otro de sus brillantes resultados: la extensión del teorema de Littlewood-Paley al caso de intervalos cualesquiera de la recta. Varios autores han utilizado el término *desigualdad de Littlewood-Paley-Rubio de Francia* en el título de sus artículos. La demostración del resultado fue además un éxito de su teoría de integrales singulares vectoriales, desarrollada con sus estudiantes Francisco J. Ruiz y José Luis Torrea.

Otras aportaciones sobresalientes son la desigualdad $(1, 1)$-débil para integrales singulares homogéneas con núcleo no regular (*rough*) y sus varios resultados para los operadores de Bochner-Riesz. La primera ([4]), obtenida con Michael Christ, resolvía un problema abierto desde que Calderón y Zygmund dieran en 1956 la acotación en L^p para $p > 1$. Entre sus varios resultados sobre los operadores de Bochner-Riesz destaca el que consiguió probar con Tony Carbery y Luis Vega ([3]): la convergencia en casi todo punto para $p \geq 2$ en el rango óptimo y en todas las dimensiones, a pesar de que la acotación del operador en los correspondientes espacios L^p sigue sin conocerse a día de hoy.

No es este el lugar para extendernos más en sus resultados. Remito a los lectores interesados a [23], donde en cuatro artículos escritos por colaboradores y estudiantes de José Luis se presenta una detallada exposición de su labor matemática.

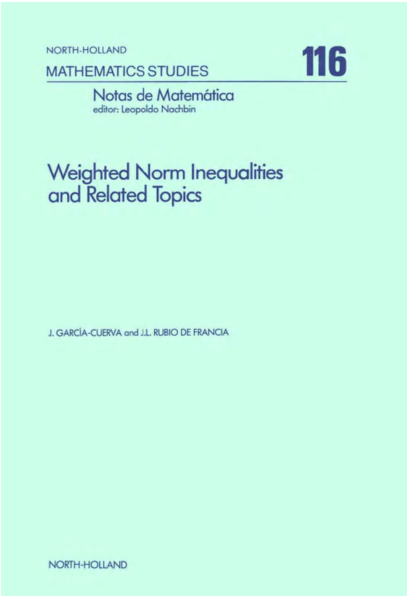


Figura 3: Portada del libro de García-Cuerva y Rubio de Francia, un clásico.

Sí merece la pena mencionar que en 1985 publicó, en colaboración con José García-Cuerva, el libro *Weighted Norm Inequalities and Related Topics* ([15], figura 3). Aunque destaca en su título el estudio de las desigualdades con peso, es todo un curso de análisis de Fourier por métodos de variable real. A pesar de estar agotado hace tiempo, el libro sigue siendo una referencia muy citada (casi 600 veces solo desde el año 2000, según *MathSciNet*), especialmente en lo relativo a la teoría de pesos. En su reseña en el *Bulletin de la American Mathematical Society*, Guido Weiss le dedicó el siguiente comentario elogioso:

> «Este libro representa un considerable esfuerzo de dos investigadores que poseen un completo control de su material. Debería servir como modelo para aquellos que escriban un texto avanzado en cualquier tema de matemáticas.»

1.2. Otras actividades y reconocimientos

En 1985 ganó el premio de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (sección de Ciencias Exactas) al mejor trabajo de investigación en Matemáticas con una obra titulada *Acotación de operadores en retículos de Banach y desigualdades con peso*, que publicó la propia Academia en una monografía ([22]).

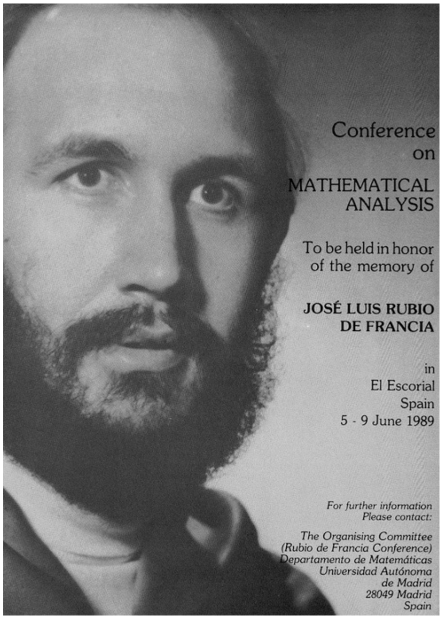


Figura 4: Cartel del congreso en memoria de José Luis Rubio de Francia.

Dirigió seis tesis doctorales de las que cinco se presentaron en la universidad de Zaragoza (José Javier «Chicho» Guadalupe, 1980; José Luis Torrea, 1980; María Luisa Rezola, 1982; Francisco J. Ruiz, 1983; Óscar Blasco, 1985) y una en la Autónoma de Madrid (Javier Duoandikoetxea, 1985). Además, dirigió dos tesinas de licenciatura en Zaragoza (Eduardo Casas y Miguel Ángel Triana, 1979) y otras dos en Madrid (Carlos Pérez, 1985; Luz M. Fernández-Cabrera, 1986).

Participó muy activamente en la organización de cursos, congresos y actividades de formación. Citemos, en particular, los congresos de Análisis Armónico y Ecuaciones en Derivadas Parciales de El Escorial en 1983 y 1987, que fueron el segundo y tercero de una serie de congresos cuya novena edición tuvo lugar en 2012. Ese mismo escenario de El Escorial fue elegido para celebrar en junio de 1989 un congreso en su memoria con destacada participación internacional (figura 4).

Una de sus inquietudes al volver de Estados Unidos fue la organización de seminarios regulares en la universidad, similares a los que allí se celebraban. El que en 1978 creó en la Universidad de Zaragoza lleva ahora el nombre de *Seminario Rubio* *de Francia*. También durante el curso 79–80, que pasó en el Colegio Universitario de Logroño, organizó un seminario cuya continuación actual es el *Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas* de la Universidad de La Rioja. Además del premio que otorga la RSME y del seminario de la Universidad de Zaragoza, su nombre está ligado también a la *Conferencia Memorial Rubio de Francia* que organiza anualmente la Universidad Autónoma de Madrid. La ciudad de Zaragoza le dedicó una calle en 1989 (figura 5).

Figura 5: Placa de la calle Rubio de Francia en Zaragoza.

2. Pesos, algoritmo de Rubio de Francia y extrapolación

La caracterización por Benjamin Muckenhoupt, en 1972, de las acotaciones en espacios L^p con peso para el operador maximal de Hardy-Littlewood marca un antes y un después en la teoría de desigualdades con peso dentro del análisis de Fourier. Cuando José Luis Rubio llegó a Princeton era una época de gran actividad en el área. Aunque no inmediatamente, años después hizo aportaciones que han pasado a la historia de la teoría de pesos.

2.1. La función maximal de Hardy-Littlewood

El operador básico sobre el que se construye la teoría de pesos, y que ya jugaba un papel esencial en la teoría de Calderón-Zygmund del análisis de Fourier, es la función maximal de Hardy-Littlewood, que definiremos para f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ como

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas (euclídeas) de $\mathbb{R}^n$ que contienen a x, y puede ser infinito. Utilizamos la notación $|B|$ para la medida de Lebesgue de la bola B (en general, de cualquier conjunto medible B).

Las propiedades fundamentales de acotación de M son:

- si $1 < p \leq \infty$, M está acotado en L^p, es decir,

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p;$$

- M es $(1,1)$-débil, es decir,

$$\sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > t\}| \leq C\|f\|_1.$$

El operador maximal fue introducido por Hardy y Littlewood en 1930 en el caso unidimensional y por Norbert Wiener en 1939 en el caso general. En ambos trabajos se prueban las propiedades de acotación mencionadas. Señalemos que Wiener usó un lema de recubrimiento para la desigualdad $(1,1)$-débil, método que es habitual hoy día.

Una consecuencia de la desigualdad $(1,1)$-débil es el teorema de diferenciación de Lebesgue: *si f es localmente integrable, los promedios de f sobre una sucesión de bolas que tienden al punto x convergen a $f(x)$ en casi todo punto.*

2.2. Pesos A_p de Muckenhoupt

¿Para qué otras medidas positivas μ, aparte de la de Lebesgue, está M acotado en $L^p(\mu)$? Esa es la pregunta a la que Benjamin Muckenhoupt respondió en un artículo de 1972 ([19]). Como resulta que esas medidas tienen necesariamente que ser absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\mu(x) = w(x)\,dx$, basta dar la condición sobre las densidades w, funciones no negativas y localmente integrables, que llamamos *pesos*. En lo que sigue escribiremos $L^p(w)$ para representar al espacio L^p construido con tal medida, $\|\cdot\|_{p,w}$ para la norma en $L^p(w)$ y $w(A)$ para la medida del conjunto A con respecto a μ (es decir, para la integral de w sobre A). Además, p' será el exponente conjugado de p ($1/p+1/p' = 1$).

Teorema 1. (a) *Sea $1 < p < \infty$. El operador M está acotado en $L^p(w)$ si y solo si w satisface*

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1} < +\infty. \tag{1}$$

(b) *El operador M satisface la desigualdad $(1,1)$-débil*

$$\sup_{t>0} t\, w(\{x : Mf(x) > t\}) \leq C\|f\|_{1,w}$$

si y solo si w satisface

$$Mw(x) \leq Cw(x) \;\; c.t.p. \tag{2}$$

Los pesos que satisfacen la condición (1) forman la clase A_p y el valor del supremo se conoce como *constante A_p de w*, que representaremos como $[w]_{A_p}$. Los pesos que satisfacen la condición (2) forman la clase A_1, y $[w]_{A_1}$ se define como la menor constante C para la que se satisface la desigualdad.

El éxito de los pesos de Muckenhoupt no vino solo porque caracterizasen los pesos para la función maximal de Hardy-Littlewood, sino porque en los años inmediatamente posteriores se demostró que muchos otros operadores clásicos del análisis de Fourier satisfacen el mismo tipo de desigualdades con peso: integrales singulares de núcleo regular y su generalización (operadores de Calderón-Zygmund), funciones cuadrado de Littlewood-Paley, operadores de Bochner-Riesz en el índice crítico... No es pues de extrañar que las propias clases A_p gocen de una rica estructura, cuyas propiedades fueron apareciendo progresivamente. Ahí destacaron las contribuciones de José Luis Rubio de Francia.

2.3. Pesos A_1, factorización y el algoritmo de Rubio de Francia

Algunas propiedades de los pesos A_p son sencillas de obtener. Por ejemplo, señalemos las siguientes: (a) $A_p \subset A_q$ si $p < q$; (b) $w \in A_p$ si y solo si $w^{1-p'} \in A_{p'}$; (c) $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$ si $w_0, w_1 \in A_1$.

La última propiedad permite construir pesos A_p a partir de pesos A_1. Su recíproco, que todo peso A_p se puede factorizar de esa manera a través de pesos A_1, había sido conjeturado por Muckenhoupt y fue demostrado por Peter Jones ([17]). La prueba de Jones es muy complicada y ya no se usa, habiéndose sustituido por la originada a partir de los resultados de José Luis en [20] y [21], con algunas modificaciones.

Esos resultados ya dejan patente la importancia de los pesos A_1 en la estructura de las clases A_p, de modo que la construcción de pesos A_1 parece esencial. De ahí el interés del resultado que Coifman descubrió y que se publicó en [6]: *si $Mf(x)$ es finito en casi todo punto y $\delta \in (0,1)$, entonces $(Mf)^\delta \in A_1$*. Además, y esto es importante en las aplicaciones, la constante A_1 del peso $(Mf)^\delta$ está acotada por una constante que depende solo de δ, no de f. Con una ligera modificación del enunciado se obtiene una caracterización de los pesos A_1, pero es la construcción de los pesos la parte relevante del resultado.

José Luis Rubio propuso una construcción de pesos A_1 distinta de la de Coifman-Rochberg, que con el tiempo ha venido a llamarse *algoritmo de Rubio de Francia*.[3] Aunque vamos a dar el enunciado solo para M y en la versión que necesitaremos más adelante, la construcción es muy general,[4] lo que es una ventaja con respecto a la de Coifman, en la que es esencial que el operador sea M.

Teorema 2. *Sea $p > 1$ y fijemos $w \in A_p$. Sea D la norma de M como operador acotado en $L^p(w)$. Para un función no negativa f de $L^p(w)$ definimos*

$$Rf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k f(x)}{(2D)^k},$$

donde M^0 es la identidad y $M^k f = M(M^{k-1} f)$. Entonces,

[3] Este término fue usado por primera vez por Steve Bloom en [1].

[4] La generalidad de la construcción permite utilizarla con operadores y espacios diversos que sustituyen a M y $L^p(w)$ en el enunciado que aquí damos. De hecho, ya para aplicarlo al teorema de factorización hay que construir un operador distinto, construido a partir de M. Es una técnica muy flexible con la que se siguen obteniendo nuevos resultados.

(i) $f(x) \leq Rf(x)$ *en casi todo punto;*

(ii) $\|Rf\|_{p,w} \leq 2\|f\|_{p,w}$*;*

(iii) $M(Rf)(x) \leq 2D\,Rf(x)$ *para casi todo* x*.*

La prueba es muy sencilla: la serie converge en $L^p(w)$ y las propiedades se comprueban sin gran dificultad. Obsérvese que, según (iii), estamos construyendo un peso A_1 cuya constante está acotada por $2D$.

En los trabajos [20] y [21] se presenta el algoritmo, pero su aplicación es a través de la equivalencia entre desigualdades vectoriales y con peso, de modo que la factorización no es constructiva.

Hace treinta años la difusión de los resultados matemáticos era inevitablemente más lenta que ahora y a menudo se basaba en la transmisión oral. La presencia de José Luis Torrea en la Washington University de Saint Louis fue una de las vías de difusión de ese trabajo de José Luis Rubio, que llegó pronto a oídos de los expertos. La potencia de los nuevos métodos y, en particular, del algoritmo fue rápidamente reconocida y se dieron pruebas constructivas, evitando desigualdades vectoriales. La primera demostración constructiva del teorema de factorización está en [5].

2.4. Extrapolación

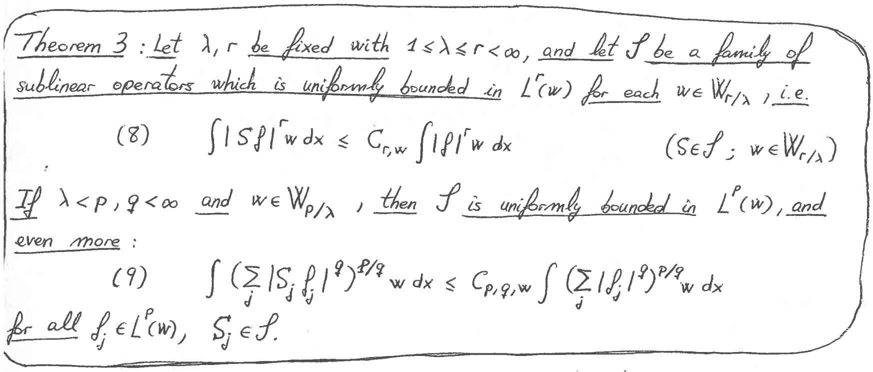
El teorema de extrapolación para pesos, que José Luis concibió y demostró, es el resultado más íntimamente ligado a su nombre. Ya era conocido que desigualdades con peso para un operador daban la acotación del operador en otros espacios L^p. Sin embargo, el teorema de extrapolación es mucho más completo: *si, fijado* $p_0 \in [1,\infty)$*, un operador está acotado en* $L^{p_0}(w)$ *para todo* $w \in A_{p_0}$*, entonces está acotado en* $L^p(w)$ *para todo* $w \in A_p$ *y todo* $p \in (1,\infty)$. Es decir, de las desigualdades para un solo valor de p se obtienen desigualdades para todos los valores de p. Apareció publicado como anuncio en [20] y con más detalle en [21].[5]

Parece que la propia existencia del resultado sorprendió a los expertos. José Luis nos dejó en [22] una explicación de cómo llegó al teorema:

> «Recientemente, B. Jawerth me preguntó, transmitiendo la curiosidad en este sentido de otros investigadores en la teoría de desigualdades con peso, cómo había llegado a pensar en la posibilidad de un tal teorema de extrapolación. Mi respuesta fue que, pensando en términos abstractos (factorización de operadores, etc.) y sabiendo que hay un operador lineal (e.g., la transformada de Hilbert) que está acotado en $L^p(w)$ si y sólo si $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$, el teorema era obvio y, de hecho, yo lo descubrí durante un viaje en autobús sin necesidad de hacer ningún cálculo, simplemente con la reflexión anterior. Dicha reflexión se basa en que las

[5] Los dos artículos están enviados a publicar en febrero de 1982. Sabiendo que el artículo completo iba a tardar en publicarse (como así fue: tardó más de dos años), envió un *research announcement* al *Bulletin de la AMS*, que entonces tenía una sección especial para ese tipo de anuncios y los publicaba con rapidez. De hecho, antes de que se publicase el artículo [21] ya se habían publicado [5] y [13], escritos posteriormente.

propiedades de acotación de un operador lineal se hallan contenidas en las desigualdades en espacios L^2 con pesos que tal operador satisface.»



Theorem 3: Let λ, r be fixed with $1 \le \lambda \le r < \infty$, and let $\mathcal{S}$ be a family of sublinear operators which is uniformly bounded in $L^r(w)$ for each $w \in W_{r/\lambda}$, i.e.

$$(8) \qquad \int |Sf|^r w\,dx \le C_{r,w} \int |f|^r w\,dx \qquad (S \in \mathcal{S};\ w \in W_{r/\lambda})$$

If $\lambda < p, q < \infty$ and $w \in W_{p/\lambda}$, then $\mathcal{S}$ is uniformly bounded in $L^p(w)$, and even more:

$$(9) \qquad \int \Big(\sum_j |S_j f_j|^q\Big)^{p/q} w\,dx \le C_{p,q,w} \int \Big(\sum_j |f_j|^q\Big)^{p/q} w\,dx$$

for all $f_j \in L^p(w)$, $S_j \in \mathcal{S}$.

Figura 6: Enunciado del teorema de extrapolación en el manuscrito original de [21]. Documento cortesía de José Luis Torrea.

La prueba original de teorema de extrapolación utilizaba la relación entre desigualdades vectoriales y con pesos, igual que la de factorización. También ha sido sustituida por demostraciones constructivas, sin desigualdades vectoriales, de las que la primera fue publicada por José García-Cuerva ([13]). Posteriormente han ido apareciendo variantes de la demostración, aunque se puede decir que esencialmente todas ellas comparten dos características: utilizan algún tipo de factorización (solo se necesita la parte fácil de la factorización, no la caracterización completa) y alguna construcción de pesos A_1. Si no estamos interesados más que en los pesos A_p que aquí hemos mencionado, los asociados al operador maximal de Hardy-Littlewood clásico, se pueden usar los pesos A_1 de Coifman (como en la prueba de [11]). Pero en cuanto se intenta pasar a situaciones más generales lo adecuado es construir los pesos A_1 a partir del algoritmo de Rubio de Francia. También es habitual separar la demostración en dos partes, una para $p > p_0$ y otra para $p < p_0$, aunque es posible tratar los dos casos simultáneamente como se puede ver en [9].

No solo las demostraciones han cambiado con el tiempo, también el propio enunciado ha tenido variaciones y generalizaciones. De hecho, el enunciado original de los artículos de José Luis es más general que el que aquí hemos dado y él mismo lo extendió después a otros contextos (véase [22], por ejemplo). La primera parte del libro [9] ofrece una visión histórica de la teoría de pesos con abundantes referencias y presenta una colección de variantes del teorema de extrapolación con sus pruebas, además de una extensa muestra de sus aplicaciones.

Una de las novedades interesantes en la visión moderna de la extrapolación es la observación de Carlos Pérez de que el teorema no necesita operadores y se puede enunciar para familias de pares de funciones,[6] lo que hace automáticas algunas de sus consecuencias o variantes. A continuación damos el enunciado en estos términos.

[6]La primera vez que aparece mencionada la posibilidad de escribir el teorema de extrapolación

Teorema 3. *Sea $1 \le p_0 < \infty$. Supongamos que para una familia de pares (f,g) de funciones no negativas se cumple*

$$\|g\|_{p_0,w} \le C\|f\|_{p_0,w} \tag{3}$$

para todo $w \in A_{p_0}$, con constante C que depende solo de $[w]_{A_{p_0}}$. Entonces, para todo $1 < p < \infty$ y todo peso w en A_p se tiene

$$\|g\|_{p,w} \le C'\|f\|_{p,w},$$

siempre que el término de la derecha sea finito. La constante C' depende solo de $[w]_{A_p}$ y de p.

Vamos a dar la demostración del teorema siguiendo el camino propuesto en [12], que distingue los casos $p < p_0$ y $p > p_0$.

Caso $p < p_0$. Sea $f \in L^p(w)$ para $w \in A_p$. Usando el algoritmo de Rubio de Francia se construye Rf, que está en A_1. Como en la parte fácil de la factorización habitual, se prueba que $w(Rf)^{p-p_0} \in A_{p_0}$ a partir de la definición de las clases correspondientes. Se tiene

$$\begin{aligned}
\|g\|_{p,w} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^p\, w\,(Rf)^{\frac{p}{p_0}(p-p_0)}(Rf)^{\frac{p}{p_0}(p_0-p)}\right)^{1/p}\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0} w(Rf)^{p-p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \|Rf\|_{p,w}^{1-\frac{p}{p_0}}\\
&\le C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{p_0} w(Rf)^{p-p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{p,w}^{1-\frac{p}{p_0}}\\
&\le C_2\|f\|_{p,w},
\end{aligned}$$

usando sucesivamente la desigualdad de Hölder, la hipótesis (3) del teorema para el peso $w(Rf)^{p-p_0}$ y las propiedades del algoritmo de Rubio de Francia.

Caso $p > p_0$. Por dualidad,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^p w\right)^{\frac{p_0}{p}} = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0} hw : h \ge 0 \ \text{ y } \int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p}{p-p_0}} w = 1\Big\}.$$

Para cada h definimos H por medio de $H^{p'} w^{1-p'} = h^{\frac{p}{p-p_0}} w$. Entonces, $H \in L^{p'}(w^{1-p'})$ con norma 1. Como M está acotado en $L^{p'}(w^{1-p'})$, podemos usar el algoritmo de Rubio de Francia y construir RH, que está en A_1. A partir de las definiciones de las clases A_p se comprueba que $w^{\frac{p_0-1}{p-1}}(RH)^{\frac{p-p_0}{p-1}} \in A_{p_0}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0} hw &= \int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0} w^{\frac{p_0-1}{p-1}} H^{\frac{p-p_0}{p-1}} \le \int_{\mathbb{R}^n} g^{p_0} w^{\frac{p_0-1}{p-1}} (RH)^{\frac{p-p_0}{p-1}}\\
&\le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} f^{p_0} w^{\frac{p_0-1}{p-1}} (RH)^{\frac{p-p_0}{p-1}}\\
&\le C_2 \|f\|_{p,w}^{p_0} \|RH\|_{p',w^{1-p'}}^{\frac{p-p_0}{p-1}} \le C_3\|f\|_{p,w}^{p_0},
\end{aligned}$$

para pares de funciones es en [8, Remark 1.11]. Más tarde, se convirtió en la forma habitual de presentar la extrapolación en los trabajos de Carlos Pérez y sus colaboradores.

usando las propiedades (i) y (ii) del algoritmo de Rubio de Francia en la primera y última desigualdad, respectivamente, la hipótesis (3) del teorema con el peso A_{p_0} correspondiente en la segunda y la desigualdad de Hölder en la tercera.

2.5. Normas de operadores y constantes de pesos

El teorema de extrapolación ha cobrado protagonismo en años recientes con una nueva aplicación: la determinación de la dependencia de la norma en $L^p(w)$ de ciertos operadores en términos de la constante A_p de w.

El primer resultado en esta dirección aparece en la tesis de Stephen Buckley en 1990 (publicada en [2]): *la función maximal de Hardy-Littlewood satisface para* $1 < p < \infty$ *la desigualdad*

$$\|Mf\|_{p,w} \leq C_p[w]_{A_p}^{1/(p-1)}\|f\|_{p,w},$$

donde C_p *depende de* p *(y de la dimensión), pero no de* w. Además, el exponente $1/(p-1)$ es óptimo ya que la desigualdad no es válida con un exponente menor. Buckley también obtuvo una estimación para la norma de las integrales singulares (maximales), pero en ese caso el exponente que consiguió no era óptimo.

No parece que en los años noventa hubiese mayor interés en abordar el problema para otros operadores: hay muy pocos resultados y son parciales. La situación empezó a cambiar hacia el año 2000 cuando Stephanie Petermichl y Alexander Volberg dieron el resultado óptimo para la transformada de Beurling en $L^2(w)$ con pesos A_2 (el exponente de $[w]_{A_2}$ resulta ser 1), motivados por una aplicación al operador de Beltrami. Posteriormente, Petermichl obtuvo un resultado análogo para la transformadas de Hilbert y de Riesz. Las técnicas utilizadas (funciones de Bellman) eran específicas para cada operador y no se encontraba una manera de llegar a probar el resultado para todos los operadores de Calderón-Zygmund. El resultado esperado era

$$\|Tf\|_{p,w} \leq C_p[w]_{A_p}^{\max(1,1/(p-1))}\|f\|_{p,w}, \tag{4}$$

y se convirtió en objetivo prioritario de varios grupos de investigadores bajo el nombre de *conjetura* A_2. ¿Por qué solo A_2? La respuesta está en el teorema de extrapolación.

En el enunciado del teorema 3 pedimos que la constante de la desigualdad (3) dependa solo de la constante de w. Si cuantificamos esa hipótesis expresando la desigualdad por medio de una función de $[w]_{A_{p_0}}$, resulta que se puede cuantificar la conclusión dando la dependencia de $[w]_{A_p}$. Ese resultado aparece por primera vez en [10]. La prueba dada por los autores de ese artículo sigue prácticamente la prueba de García-Cuerva en [13], sin más que cuidar las constantes involucradas. La prueba de [12], presentada en el apartado anterior sin hacer explícita la dependencia de las constantes, también da el resultado de extrapolación con cotas óptimas teniendo en cuenta en cada paso esa dependencia.

Una consecuencia del teorema de extrapolación en la versión que acabamos de ver es que (4) vale para todo p, si es cierto para $p = 2$. Esta es la razón de que solo sea necesario demostrar la conjetura para pesos A_2 y de ahí su nombre.[7]

La prueba definitiva de la conjetura la consiguió Tuomas Hytönen en 2010. En la introducción de [16] se puede encontrar más información sobre el recorrido histórico del problema con referencias bibliográficas. La prueba de Hytönen fue simplificada posteriormente por varios autores y, en este momento, la versión más sencilla se debe a Andrei Lerner [18].

Agradecimientos

Agradezco a mis compañeros en la dirección de La Gaceta la sugerencia de escribir un artículo sobre José Luis Rubio con motivo del vigésimo quinto aniversario de su fallecimiento. Gracias a Óscar Blasco, Pepe García-Cuerva, Paco Luquin, Chema Martell, Carlos Pérez, Marisa Rezola, Pacho Ruiz y José Luis Torrea por la lectura de versiones previas de este artículo y sus comentarios. José Luis Torrea me proporcionó la copia del manuscrito de [21], del que está tomada la figura 6. Paco Luquin, además de la foto de la figura 2, me aportó sus historias de los años que compartió con José Luis Rubio en la licenciatura de matemáticas en Zaragoza.

Referencias

[1] S. Bloom, Solving weighted norm inequalities using the Rubio de Francia algorithm, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 306–312.

[2] S. M. Buckley, Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **340** (1993), 253–272.

[3] A. Carbery, J. L. Rubio de Francia y L. Vega, Almost everywhere summability of Fourier integrals, *J. London Math. Soc. (2)* **38** (1988), 513–524.

[4] M. Christ y J. L. Rubio de Francia, Weak type (1,1) bounds for rough operators, II, *Invent. Math.* **93** (1988), 225–237.

[5] R. R. Coifman, P. Jones y J. L. Rubio de Francia, Constructive decomposition of BMO functions and factorization of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 241–250.

[6] R. R. Coifman y R. Rochberg, Another characterization of BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.* **79** (1980), 249–254.

[7] A. Córdoba, José Luis Rubio de Francia (1949-1988). Semblanza de su vida y obra, *Rev. Mat. Iberoamericana* **4** (1988), 1–10.

[7] Solo se obtiene el resultado óptimo a partir de $p = 2$. Si partimos de un p_0 distinto, el teorema de extrapolación no da el exponente óptimo en todos los valores de p. Sin embargo, conviene señalar que hay operadores para los que no es 2 el exponente crítico a partir del cual la extrapolación da el resultado para todos los valores de p (para las funciones cuadrado, por ejemplo, es 3). También hay operadores para los que no hay un exponente crítico que permita obtener por extrapolación el resultado óptimo para los demás exponentes.

[8] D. Cruz-Uribe y C. Pérez, *Two weight extrapolation via the maximal operator*, *J. Funct. Anal.* **174** (2000), 1–17.

[9] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[10] O. Dragičević, L. Grafakos, M. C. Pereyra y S. Petermichl, Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces, *Publ. Mat.* **49** (2005), 73–91.

[11] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[12] J. Duoandikoetxea, Extrapolation of weights revisited: new proofs and sharp bounds, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), 1886–1901.

[13] J. García-Cuerva, An extrapolation theorem in the theory of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 422–426.

[14] J. García-Cuerva, José Luis Rubio de Francia (1949-1988), *Collect. Math.* **38** (1987), 3–15.

[15] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[16] T. Hytönen, The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), 1473–1506.

[17] P. Jones, Factorization of A_p weights, *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), 511–530.

[18] A. K. Lerner, A simple proof of the A_2 conjecture, *Int. Math. Res. Not.*, publicado electrónicamente el 2-6-2012; doi:10.1093/imrn/rns145.

[19] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.

[20] J. L. Rubio de Francia, Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 393–395.

[21] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 533–547.

[22] J. L. Rubio de Francia, *Acotación de operadores en retículos de Banach y desigualdades con peso*, Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Serie de Ciencias Exactas, vol. XVIII, Madrid, 1985.

[23] J. L. Torrea, J. García-Cuerva, J. Duoandikoetxea y A. Carbery, The work of José Luis Rubio de Francia. I, II, III, IV, *Publ. Mat.* **35** (1991), 9–25, 27–63, 65–80, 81–93.

Javier Duoandikoetxea, Dpto. de Matemáticas, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, Apdo. 48080, Bilbao

Correo electrónico: `javier.duoandikoetxea@ehu.es`