Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Pierre Deligne

por

Antonio Rojas León*

1. Nota biográfica

Pierre Deligne nació en Bruselas en 1944 y realizó sus estudios en la Universidad Libre de Bruselas. Obtuvo su doctorado por dicha universidad en el 1968, y por la Universidad de *Paris-Sud* en 1972, con una tesis realizada bajo la supervisión de Alexander Grothendieck. En 1968 comenzó a trabajar en el *Institut des Hautes Études Scientifiques* como miembro visitante y, a partir de 1970, como miembro permanente, siendo el matemático más joven en conseguir dicha posición. En 1984 se trasladó al Instituto de Estudios Avanzados (*IAS*) de Princeton, Nueva Jersey, del cual ha sido miembro permanente desde entonces y es actualmente profesor emérito.

Pierre Deligne.

Saltó a la fama gracias a su demostración, en 1974, de la última de las conjeturas de Weil que quedaba por probar (el análogo de la hipótesis de Riemann), lo cual le valió la concesión de la medalla Fields en 1978, así como del premio Crafoord (conjuntamente con Grothendieck) en 1988. Ha sido galardonado con numerosos otros premios y distinciones a lo largo de su carrera, como la medalla

*Financiado por los proyectos MTM2010-19298 (Ministerio de Ciencia e Innovación) y P08-FQM-03894 (Junta de Andalucía).

Henri Poincaré en 1974, el premio Balzan en 2004 y el premio Wolf (conjuntamente con P. Griffiths y D. Mumford) en 2008. La última condecoración recibida ha sido el premio Abel 2013 a toda su trayectoria, otorgado «por sus contribuciones fundamentales a la geometría algebraica y su impacto transformador en teoría de números, teoría de representaciones y áreas relacionadas».[1] Es miembro honorario de la Sociedad Matemática de Londres y la de Moscú, así como de la Academia Americana de Artes y Ciencias y la Real Academia Sueca de Ciencias, y miembro asociado de la Academia de Ciencias de París.

2. Las conjeturas de Weil

2.1. Un poco de historia

Las conjeturas de Weil son sin duda uno de los resultados matemáticos más impresionantes del siglo XX, tanto por su importancia matemática como, sobre todo, por el tremendo desarrollo que experimentó la Geometría Algebraica guiado por el objetivo de encontrar una demostración. Estas conjeturas, enunciadas por primera vez por Weil en 1949 [33], relacionan las propiedades aritméticas de una variedad definida sobre un cuerpo finito con las propiedades topológicas de dicha variedad (o más bien de un levantamiento) vista sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Denotemos por $\mathbb{F}_q$ el (único, salvo isomorfismo) cuerpo finito con q elementos, donde $q = p^n$ es una potencia entera de un número primo, y sea X una variedad lisa proyectiva de dimensión d sobre $\mathbb{F}_q$. Es decir, X es el conjunto de ceros, en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$, de un conjunto de polinomios homogéneos $F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{F}_q[X_0, \ldots, X_N]$, de manera que no existen puntos singulares en X con coordenadas en la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q$. Por supuesto, el número de puntos de X con coordenadas en cualquier extensión finita de $\mathbb{F}_q$ es finito. Por «propiedades aritméticas» de X se entiende el número de puntos de X, no solo en el espacio proyectivo sobre $\mathbb{F}_q$, sino sobre cualquiera de sus extensiones finitas.

Recordemos que, si fijamos una clausura algebraica $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}_q$, para cada entero $r \geq 1$ existe una única extensión $\mathbb{F}_{q^r}$ de $\mathbb{F}_q$ en $\overline{\mathbb{F}}$ de grado r, que está formada exactamente por los elementos $x \in \overline{\mathbb{F}}$ tales que $x^{q^r} = x$. Denotemos por N_r el número de puntos de X con coordenadas en $\mathbb{F}_{q^r}$, es decir, el número de $(x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{F}_{q^r})$ tales que $F_i(x_0, \ldots, x_N) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Con esta sucesión de enteros se construye la serie de potencias

$$Z(X,T) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{N_r}{r} T^r\right)$$

llamada la *función zeta* de X. Dar esta serie de potencias equivale a dar la sucesión $N_1, N_2, \ldots$ Aunque en principio no lo parezca, existe una estrecha relación entre esta

[1] *For seminal contributions to algebraic geometry and for their transformative impact on number theory, representation theory, and related fields.*

función y la (más conocida) función ζ de Riemann: realizando el cambio de variable $T = q^{-s}$, la función zeta puede expresarse en la forma

$$Z(X,T) = \zeta_X(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

donde $\mathfrak{p}$ recorre el conjunto de *puntos cerrados* de X, es decir, el conjunto de órbitas de la acción del automorfismo de Frobenius $(x_0 : \ldots : x_N) \mapsto (x_0^q : \ldots : x_N^q)$ sobre el conjunto $X(\overline{\mathbb{F}})$ de puntos de X con coordenadas en $\overline{\mathbb{F}}$ (que, en el caso afín, corresponde al conjunto de ideales maximales de su anillo de coordenadas), y $N\mathfrak{p}$ es el cardinal del menor cuerpo sobre el que están definidos los puntos de la órbita $\mathfrak{p}$. Esta fórmula es similar al desarrollo en producto de la función zeta de Dedekind ζ_K asociada a un cuerpo de números K:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

donde aquí $\mathfrak{p}$ recorre el conjunto de ideales maximales del anillo de enteros de K. Cuando $K = \mathbb{Q}$, se obtiene la función zeta de Riemann clásica.

Inspirado por sus resultados para curvas [31] y para variedades abelianas [32], Weil conjeturó que la función zeta asociada a una variedad lisa proyectiva X debería verificar las siguientes propiedades, que pasaron a ser conocidas como *las conjeturas de Weil*:

1. $Z(X,T)$ es una función racional.
2. Existe una descomposición

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T) \cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T) \cdots P_{2d}(T)}$$

   donde los $P_i(T) \in \mathbb{Z}[T]$ son polinomios con término independiente 1, de manera que todas las raíces recíprocas complejas de $P_i(T)$ tienen valor absoluto $q^{i/2}$ (*hipótesis de Riemann*).
3. La involución $\alpha \mapsto q^n/\alpha$ intercambia las raíces recíprocas de P_i y de P_{2d-i} para todo i (equivalentemente, $Z(X,T)$ satisface una cierta ecuación funcional).
4. Si X proviene de una variedad $\mathfrak{X}$ definida sobre el anillo de enteros R de un cuerpo de números K mediante reducción módulo un ideal maximal $\mathfrak{p}$ de R, entonces el grado de P_i es el i-ésimo número de Betti de $\mathfrak{X}$ vista como variedad compleja.

El propio Weil ya previó que la resolución de las conjeturas debía pasar por la construcción de una teoría de cohomología adecuada para variedades sobre cuerpos finitos, con coeficientes en un cuerpo de característica cero [34]. Suponiendo que existiera una tal teoría cohomológica, con propiedades similares a las de la cohomología singular para las variedades topológicas, las conjeturas (excepto la hipótesis de Riemann) se deducirían de resultados bien conocidos de topología algebraica. La primera conjetura es una consecuencia formal de la fórmula del punto fijo de Lefschetz, aplicada al endomorfismo F de Frobenius geométrico (inverso del usual) de X y sus potencias: los puntos fijos de la potencia r-ésima de F son justamente los puntos racionales de X sobre $\mathbb{F}_{q^r}$, por lo que se obtiene una descomposición

$$Z(X,T) = \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - T \cdot F|\mathrm{H}^i(X))^{(-1)^{i+1}} \tag{1}$$

que implica, en particular, que $Z(X,T)$ es racional. La tercera conjetura es consecuencia de la fómula de dualidad de Poincaré, mientras que la última se deduciría de un cierto resultado de comparación entre la «nueva» cohomología de X y la cohomología singular de $\mathfrak{X}/\mathbb{C}$ vista como variedad topológica.

Los esfuerzos para lograr probar las conjeturas se centraron, por tanto, en intentar construir una teoría de cohomología adecuada. Y este fue el motor que alimentó el tremendo desarrollo experimentado por la Geometría Algebraica en la segunda mitad del siglo XX. Inesperadamente, el primer avance importante se logró fuera de este programa: Dwork consiguió probar en 1960 [19] la racionalidad de $Z(X,T)$ sin usar métodos cohomológicos (solo aparentemente, porque sus herramientas fueron el germen de lo que más tarde se convirtió en la cohomología de Monsky-Washnitzer). Finalmente, y tras varios intentos previos infructuosos, a principios de los años 1960 Artin y Grothendieck [2] dieron con la clave y construyeron una teoría de cohomología (de hecho, una para cada primo $\ell \neq p$, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}_\ell$ de los números ℓ-ádicos) con las propiedades buscadas, lo que permitió completar la demostración de las conjeturas 1, 3 y 4. La construcción de esta teoría se basa en ampliar el concepto de topología, de manera que los abiertos de la topología clásica se sustituyen por morfismos étale (es decir, finitos y no ramificados). Esto permite sortear la rigidez intrínseca de la Geometría Algebraica y definir una categoría de haces suficientemente flexible como para ser comparable a la de las variedades topológicas clásicas.

2.2. Weil I: La prueba de la hipótesis de Riemann

Quedaba pues por demostrar la segunda conjetura, conocida como la *hipótesis de Riemann* (HR). La justificación de tal nombre puede verse haciendo el cambio de variable $T = q^{-s}$; la conjetura implica entonces que todos los ceros y polos complejos de la función $\zeta_X(s)$ tienen parte real $\frac{k}{2}$ para algún $k = 0, \ldots, 2d$. Esta conjetura, a diferencia de las demás, no se deducía directamente de las propiedades formales de la teoría ℓ-ádica construida por Artin y Grothendieck: era necesario un estudio mucho más profundo de los aspectos arquimedianos de esta teoría.

Grothendieck había enunciado una serie de conjeturas sobre ciclos algebraicos en variedades, las conocidas como *Conjeturas estándar*, con el objetivo de probar que la categoría abeliana de motivos puros es semisimple. Una de las consecuencias de estas conjeturas era justamente la hipótesis de Riemann para variedades sobre cuerpos finitos. Anteriormente a la publicación de la prueba de Deligne, era creencia generalizada en la comunidad matemática que la demostración de la HR pasaba necesariamente por la de las conjeturas estándar [18]. Afortunadamente (dado que, a día de hoy, las conjeturas estándar siguen abiertas [1]), Deligne encontró la manera de evitarlas.

Como puede comprobarse a partir de la descomposición (1), la hipótesis de Riemann es equivalente al siguiente resultado cohomológico: para cada $i = 0, 1, \ldots, 2d$, todos los autovalores de la acción del endomorfismo de Frobenius geométrico sobre el espacio vectorial $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tienen valor absoluto $q^{i/2}$. Aquí nos encontramos ya con una dificultad: los $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}_\ell$ de números ℓ-ádicos, por tanto, ¿qué entendemos por «valor absoluto» de los autovalores de un endomorfismo suyo? Para darle significado, es necesario considerar inmersiones de $\mathbb{Q}_\ell$ en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La HR implica, a posteriori, que los polinomios característicos $\det(1 - T \cdot F|\mathrm{H}^i(X))$ de la acción del endomorfismo de Frobenius en los $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tienen coeficientes enteros y, por tanto, sus raíces recíprocas son enteros algebraicos. Diremos que un número algebraico α es un *número de Weil de peso* $i \in \mathbb{Z}$ si todas las raíces complejas de su polinomio mínimo tienen valor absoluto $q^{i/2}$. La HR se traduce entonces como el siguiente resultado, que es el teorema fundamental del artículo *La conjecture de Weil, I* [9]:

Teorema 1. *Sea X una variedad proyectiva lisa sobre $\mathbb{F}_q$ de dimensión d. Entonces, para cada $i = 0, \ldots, 2d$, los autovalores de la acción del endomorfismo de Frobenius geométrico sobre el espacio vectorial $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ son enteros de Weil de peso i.*

Usando el teorema débil de Lefschetz y la dualidad de Poincaré, el resultado se deduce del caso particular $i = d$. Para resolver este último caso, Deligne hace uso de la teoría clásica de Lefschetz, trasladada al marco de la cohomología ℓ-ádica tal y como se construye en [13]. Modificando X convenientemente, se puede transformar en una variedad $\tilde{X}$ para la que existe un *pincel de Lefschetz* de secciones hiperplanas, que define un morfismo $\tilde{X} \to \mathbb{P}^1$. La cohomología relativa de este morfismo es un sistema local sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{P}^1$ dotado de una forma simpléctica no degenerada, y un resultado de Kazhdan y Margulis muestra que la monodromía de este sistema local es el grupo simpléctico entero. Esto permite acotar los valores absolutos de los autovalores de la acción de Frobenius en $\mathrm{H}^d(X, \mathbb{Q}_\ell)$ entre $d - \frac{1}{2}$ y $d + \frac{1}{2}$, y el resultado final se obtiene aplicando esta cota a los productos sucesivos de copias de X.

Como indica Deligne en su artículo, la consecuencia más inmediata de la hipótesis de Riemann es la obtención de una estimación (en cierto sentido óptima) para el número de puntos racionales de una variedad proyectiva lisa sobre $\mathbb{F}_q$. En particular, si X es una intersección completa no singular de dimensión d y multigrado $e_1, \ldots, e_r$, se tiene la cota

$$|\#X(\mathbb{F}_q) - \#\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)| \leq C(d; e_1, \ldots, e_r) \cdot q^{d/2},$$

donde $C(d; e_1, \ldots, e_r)$ es el d-ésimo número de Betti topológico primitivo β'_d (es decir, el d-ésimo número de Betti topológico β_d si d es impar, o $\beta_d - 1$ si d es par) de una intersección completa lisa de dimensión d y multigrado $e_1, \ldots, e_r$ sobre $\mathbb{C}$. Por ejemplo, si X es una hipersuperficie lisa de grado e en $\mathbb{P}^{d+1}$, se tiene

$$C(d; e) = \frac{(e-1)^{d+2} + (-1)^d (e-1)}{e}.$$

2.3. Weil II: La teoría de los pesos

A pesar de la indiscutible repercusión que tuvo la publicación de la primera prueba de la hipótesis de Riemann, es su segunda parte [11] la que ha resultado ser mucho más importante y fructífera en cuanto a sus aplicaciones. En *La conjecture de Weil II*, Deligne prueba una amplia generalización del resultado principal de Weil I (en particular, se demuestra la HR para variedades propias lisas, no necesariamente proyectivas).

Para poder enunciar esta generalización, Deligne usa el lenguaje de los *pesos* y construye las categorías de haces ℓ-ádicos puros y mixtos. La categoría de haces ℓ-ádicos constructibles fue definida por Grothendieck como la categoría de coeficientes natural para el desarrollo de la cohomología ℓ-ádica: cada variedad X sobre $\mathbb{F}_q$ tiene asociada su categoría de haces ℓ-ádicos correspondiente, de manera que se satisface el formalismo conocido como *las seis operaciones de Grothendieck* (los funtores $\otimes$, Hom y f_*, $f_!$, f^*, $f^!$ para cada morfismo $f : X \to Y$, con sus correspondientes funtores derivados).

No describiremos aquí con precisión los objetos de esta categoría, simplemente diremos que contiene una subcategoría formada por los llamados *haces ℓ-ádicos lisos*, que juegan el papel de los sistemas locales de espacios vectoriales sobre una variedad compleja. En particular, la categoría de haces ℓ-ádicos lisos sobre X es equivalente a la categoría de representaciones continuas ℓ-ádicas (es decir, definidas sobre una extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$) del grupo fundamental algebraico $\pi_1(X, x)$ para cualquier punto base prefijado $x \in X$. Además, para cada haz constructible $\mathcal{F}$ sobre X existe una estratificación de X mediante subconjuntos localmente cerrados de manera que la restricción de $\mathcal{F}$ a cada estrato es un haz liso.

Dado un haz constructible $\mathcal{F}$ en una variedad X definida sobre $\mathbb{F}_q$, a cada punto $x \in X$ con coordenadas en una extensión finita $\mathbb{F}_{q^r}$ de $\mathbb{F}_q$ le corresponde una *fibra* $\mathcal{F}_x$, que es un espacio vectorial ℓ-ádico de dimensión finita dotado de una acción continua del grupo de Galois de $\mathbb{F}_{q^r}$. Esta acción está completamente determinada por la del automorfismo de Frobenius geométrico F_x (inverso del usual). Un haz ℓ-ádico $\mathcal{F}$ se dice *puro de peso* $w \in \mathbb{Z}$ si, para cada $r \geq 1$ y cada punto $x \in X(\mathbb{F}_{q^r})$, todos los autovalores de la acción de F_x sobre la fibra $\mathcal{F}_x$ son números de Weil de peso wr, y se dice *mixto de pesos* $\leq w \in \mathbb{Z}$ si tiene una filtración cuyos cocientes son puros de pesos respectivos $\leq w$. Con este lenguaje, el resultado principal de [11] se enuncia así:

Teorema 2. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas sobre $\mathbb{F}_q$. Si $\mathcal{F}$ es un haz ℓ-ádico constuctible en X mixto de pesos $\leq w$, entonces, para cada $i \geq 0$, el haz ℓ-ádico $\mathrm{R}^i f_! \mathcal{F}$ en Y es mixto de pesos $\leq w + i$.*

La HR se deduce aplicando el teorema anterior al morfismo estructural $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ y al haz constante $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$ (que es puro de peso 0), ya que, en tal caso, por ser X propio, $\mathrm{R}^i f_! \mathcal{F} = \mathrm{R}^i f_* \mathcal{F}$ «es» simplemente el grupo de cohomología $\mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dotado de la acción correspondiente del automorfismo de Frobenius. La dualidad de Poincaré permite transformar la desigualdad $\leq i$ en una igualdad.

La prueba de Deligne fue más adelante simplificada por Laumon [26] (basándose en la transformación de Fourier ℓ-ádica) y Katz [24]. Con la introducción de los haces perversos ℓ-ádicos en [3], Deligne refinó su resultado dando información más precisa sobre la pureza de las imágenes directas de un haz en X (lo cual, en el caso de haces clásicos, solo se cumple si f es propio y liso). Recientemente, Kedlaya [25] dio la primera prueba basada en otro tipo de construcción de una teoría de cohomología, las *cohomologías p-ádicas.*

Además del teorema principal, el artículo esconde también otros resultados muy importantes obtenidos en el transcurso de la demostración, entre los que destacan el teorema duro de Lefschetz (otra de las consecuencias de las conjeturas estándar de Grothendieck) y el teorema de equidistribución, que ofrece un marco muy general en el que probar cuestiones relacionadas con la distribución de puntos en familias paramétricas de variedades o de sumas exponenciales.

2.4. La conjetura de Ramanujan-Petersson

Ramanujan, motivado por el estudio del número de formas de expresar un número entero como suma de 24 cuadrados, definió la sucesión $\tau(n)$, conocida como *función τ de Ramanujan*, de la siguiente forma:

$$\sum_{n\geq 1} \tau(n)q^n = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}.$$

Mordell probó, en [29], que esta sucesión verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \tau(mn) = \tau(m)\tau(n) & \text{si } \operatorname{mcd}(m,n)=1, \\ \tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1}) & \text{si } p \text{ es primo,} \end{cases}$$

con lo cual τ viene determinada por su valor en los números primos. Ramanujan probó que se tiene la cota $|\tau(n)| < n^6$, y conjeturó que $|\tau(n)| \leq d(n)\cdot n^{11/2}$ para todo $n \geq 1$, donde $d(n)$ denota el número de divisores positivos de n. Equivalentemente, $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ para todo primo p.

La importancia de esta sucesión se hace patente cuando se comprueba su conexión con las formas modulares, un tipo de funciones holomorfas fundamentales por sus aplicaciones en la Teoría de Números moderna. Una *forma modular de peso $k \in \mathbb{N}$* (asociada al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) es una función holomorfa f definida en el semiplano complejo $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ cumpliendo las siguientes condiciones de simetría:

a) $f(z+1) = f(z)$,

b) $f(-1/z) = z^k f(z)$.

Denotando $q = e^{2\pi i z}$, la primera condición implica que f admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$. La tercera condición que debe cumplir una forma modular (*holomorfa en las cúspides*) se puede enunciar como

c) $a_n = 0$ para $n < 0$.

Si, además, se cumple que $a_0 = 0$, la función f se denomina una *forma cuspidal.* Las formas modulares (respectivamente, cuspidales) de peso k forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. El menor entero positivo k para el que el espacio de formas cuspidales de peso k es distinto de cero es $k = 12$, y en ese caso el espacio es de dimensión 1 y tiene por generador precisamente a la función

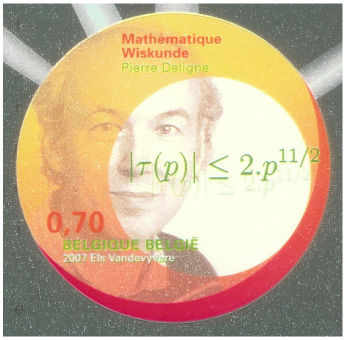
$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

llamada *función discriminante.*

Sobre el espacio de formas cuspidales de peso k actúa una sucesión T_n de operadores lineales, llamados *operadores de Hecke.* La conjetura de Ramanujan-Petersson generalizada, probada por Deligne en [9], se aplica a las formas cuspidales que son autovectores simultáneos de todos los T_n (la existencia de tales formas está garantizada por el hecho de que los operadores de Hecke conmutan entre sí):

TEOREMA 3. *Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ una forma cuspidal de peso k normalizada (es decir, $a_1 = 1$) que sea autovector de todos los operadores de Hecke. Entonces, para todo primo p se tiene la acotación $|a_p| \leq 2p^{(k-1)/2}$.*

En particular, el resultado se aplica a la función discriminante (puesto que el espacio de formas cuspidales de peso 12 tiene dimensión 1), lo que demuestra la conjetura de Ramanujan. El resultado de Deligne es mucho más general que el enunciado aquí, ya que considera formas cuspidales asociadas a subgrupos aritméticos $\Gamma_0(N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ para N arbitrario (cuya definición es similar a la anterior).



Sello belga emitido en 2007 en honor a Deligne, con la conjetura de Ramanujan.

La relación entre este resultado y las conjeturas de Weil es difícil de apreciar a primera vista. Deligne había establecido previamente esta relación en [4] inspirándose en el trabajo anterior de Kuga y Shimura. Esencialmente, se muestra que el polinomio $1 - a_p T + p^{k-1} T^2$ divide al polinomio característico de la acción del automorfismo de Frobenius en el $(k-1)$-ésimo grupo de cohomología de una variedad proyectiva lisa X de dimensión $k-1$ sobre $\mathbb{F}_p$. La hipótesis de Riemann implica entonces que a_p es la suma de dos números de Weil de peso $k-1$, de donde se tiene la cota $|a_p| \leq 2p^{(k-1)/2}$. La variedad X se construye como un producto simétrico de la curva elíptica universal sobre el dominio fundamental del subgrupo aritmético $\Gamma_0(N)$ considerado.

2.5. ACOTACIÓN DE SUMAS EXPONENCIALES

Otra aplicación importante de los resultados de [9] y [11] consiste en obtener acotaciones para sumas exponenciales. Fijado el cuerpo $\mathbb{F}_q$, sea $e_p(t) = \exp(2\pi i t/p)$, y definamos $\psi(x) = e_p(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\, x)$. La aplicación $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ es un carácter del grupo aditivo de $\mathbb{F}_q$, es decir, se cumple que $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$. Dada una variedad X

sobre $\mathbb{F}_q$ y una función regular $f : X \to \mathbb{A}^1$, la *suma exponencial* asociada a f se define como

$$S(X, f) = \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q)} \psi(f(x)).$$

Haciendo variar el carácter ψ, estas sumas contienen información sobre la distribución de los valores de la función f. En [9], Deligne prueba el siguiente resultado como corolario a la hipótesis de Riemann:

Teorema 4. *Sea $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio de grado d no divisible por p tal que la hipersuperficie definida en $\mathbb{P}^{n-1}$ por la forma homogénea de grado d de f sea lisa. Entonces se tiene la acotación*

$$|S(\mathbb{A}^n, f)| \leq (d-1)^n q^{n/2}.$$

Es fácil ver que el estudio de la suma exponencial $S(\mathbb{A}^n, f)$ es equivalente al del número de puntos racionales en la hipersuperficie de tipo Artin-Schreier de $\mathbb{A}^{n+1}$ definida por la ecuación $y^q - y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Aunque esta hipersuperficie no es proyectiva, Deligne consigue aplicar la HR a una compactificación adecuada para obtener la acotación buscada.

Con los resultados de [11] se simplifica enormemente el estudio de estas sumas, debido a la existencia de un haz liso $\mathcal{L}$ de rango 1 en la recta afín $\mathbb{A}^1$ sobre $\mathbb{F}_q$ (construido por Deligne en [10]) de manera que el automorfismo de Frobenius geométrico F actúa sobre su fibra en un punto $x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q)$ mediante la multiplicación por el escalar $\psi(x)$. Por tanto, el estudio de la suma exponencial $S(X, f)$ se reduce al estudio de la cohomología del haz $\mathcal{L}_f = f^*\mathcal{L}$ en X obtenido a partir de $\mathcal{L}$ tomando la imagen inversa por la aplicación f. Para probar las acotaciones, basta simplemente con probar la anulación de los grupos de cohomología de orden superior a $\dim(X)$ de este haz y aplicar el teorema principal de [11].

Si tomamos como X la hipersuperficie afín de $\mathbb{A}^n$ definida por $x_1 \cdots x_n = a$ para algún $a \neq 0$ y como f la aplicación suma, se obtienen las llamadas *sumas de Kloosterman* generalizadas

$$K_{n,a} = \sum_{x_1 \cdots x_n = a} \psi(x_1 + \cdots + x_n).$$

Estas sumas aparecen, por ejemplo, al estudiar la distribución de las sumas de Gauss asociadas a distintos caracteres multiplicativos de $\mathbb{F}_q$. En [10], Deligne prueba que en este caso se tiene la cota $|K_{n,a}| \leq n \cdot q^{(n-1)/2}$.

Los resultados de [11] revolucionaron por completo el estudio de las sumas exponenciales, pudiéndose obtener a partir de entonces acotaciones, en muchos casos óptimas, que habían estado fuera del alcance de los métodos disponibles anteriormente. Muchos avances se han logrado a partir de entonces en el estudio de estas sumas y sus generalizaciones, debidos fundamentalmente al trabajo de Katz [27].

3. Teoría de Hodge

Era sabido que una consecuencia de las conjeturas de Weil (que sería desarrollada por Deligne más adelante en [11]) es la existencia de una filtración natural (la filtración por el peso) en la cohomología de una variedad arbitraria definida sobre un cuerpo finito, definida a partir de los valores absolutos de los autovalores de la acción de Frobenius sobre ella, y que es trivial para variedades proyectivas lisas. El teorema de comparación entre cohomología ℓ-ádica y cohomología singular y la teoría de los *motivos* de Grothendieck sugerían la existencia de una cierta filtración natural en la cohomología de cualquier variedad algebraica compleja (no necesariamente proyectiva o lisa) similar a la filtración por el peso. En el artículo *Théorie de Hodge I* [6], inspirándose en estas ideas, Deligne ofrece una comparación heurística entre la teoría de pesos en cohomología ℓ-ádica y la teoría de Hodge en cohomología de De Rham.

Recordemos que la teoría de Hodge clásica da una descomposición de la cohomología (con coeficientes en $\mathbb{C}$) de una variedad proyectiva lisa compleja (o, más generalmente, de una variedad compleja compacta dotada de una métrica Kähleriana) como suma directa de ciertos subespacios. Estos subespacios, originalmente definidos de manera analítica usando formas armónicas, pueden también interpretarse algebraicamente gracias al complejo de formas diferenciales en la variedad, de la siguiente manera: sea $\Omega_X^\bullet$ el complejo de formas diferenciales en una variedad proyectiva lisa X de dimensión d, y denotemos por $\mathrm{H}^{p,q}$ el q-ésimo $\mathbb{C}$-espacio vectorial de cohomología del haz $\Omega_X^p = \wedge^p \Omega_X^1$. Entonces, para todo $r = 0, \ldots, 2d$ se tiene la descomposición

$$\mathrm{H}^r(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} \mathrm{H}^{p,q}.$$

Además, se cumple que $\mathrm{H}^{q,p} = \overline{\mathrm{H}^{p,q}}$ para todo p, q. El formalismo de Deligne es una abstracción de este resultado.

Una *estructura de Hodge pura* de peso m consiste en un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado H y una descomposición de $\mathrm{H}_\mathbb{C} = \mathrm{H} \otimes \mathbb{C}$ como suma directa

$$\mathrm{H}_\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{H}^{p.q}$$

de manera que $\mathrm{H}^{q,p} = \overline{\mathrm{H}^{p,q}}$. Los *números de Hodge* $h^{p,q}$ son las dimensiones de los subespacios $\mathrm{H}^{p,q}$. Dar una tal descomposición es equivalente a dar una filtración decreciente F^p de $\mathrm{H}_\mathbb{C}$ (la *filtración de Hodge*) tal que $\mathrm{H}_\mathbb{C} = F^p \oplus \overline{F^{m-p+1}}$ para todo p. Tomando $\mathrm{H}^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$ se recupera la descomposición original.

Para extender el teorema de descomposición de Hodge a variedades arbitrarias es preciso generalizar esta estructura, definiendo así las estructuras de Hodge mixtas. La idea que subyace en esta construcción es que la cohomología de una variedad compleja arbitraria está compuesta, en cierto sentido, por «piezas» provenientes de la cohomología de variedades lisas proyectivas.

Una *estructura de Hodge mixta* consiste en

a) un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado H,

b) una filtración creciente W de $\mathrm{H}_\mathbb{Q} = \mathrm{H} \otimes \mathbb{Q}$ (*filtración por el peso*),

c) una filtración decreciente F de $\mathrm{H}_\mathbb{C}$ (*filtración de Hodge*), de manera que, para todo m, la filtración F induzca sobre $\mathrm{Gr}_m^W \mathrm{H} = W_m/W_{m-1}$ una estructura de Hodge pura de peso m.

La construcción de esta estructura para la cohomología de variedades complejas se lleva a cabo en los siguientes artículos de la serie, *Théorie de Hodge II, III* [7, 8]. En el primero de ellos, Deligne define el formalismo de las estructuras de Hodge mixtas. Se prueba que estas estructuras forman una categoría abeliana, y que los morfismos entre ellas son estrictamente compatibles con las filtraciones. El resultado principal es la construcción de la estructura de Hodge mixta natural en la cohomología de una variedad compleja lisa X. Esta construcción se lleva a cabo mediante la inmersión (gracias al teorema de resolución de singularidades de Hironaka) de X en una variedad proyectiva lisa $\overline{X}$ de manera que $Y = \overline{X} \backslash X$ sea un divisor con cruzamientos normales, $\coprod_{i \in I} D_i$. Existe entonces una sucesión espectral formada por las cohomologías de $\overline{X}$ y de las intersecciones $\cap_{i \in J} D_j$ para $J \subseteq I$, que converge a la cohomología de X. Al ser $\overline{X}$ y $\cap_{i \in J} D_j$ lisas, sus cohomologías están dotadas de estructuras de Hodge puras, y la filtración por el peso de la estructura de Hogde mixta de X viene dada justamente por la filtración asociada a esta sucesión espectral. En cuanto a la filtración de Hodge, se define a partir de una cierta filtración (la llamada por Deligne *filtration bête*) en el complejo de De Rham logarítmico $\Omega_X^\bullet(\log Y)$ de formas diferenciales en X con polos sobre Y.

En el último artículo, el más importante de la serie, Deligne completa el trabajo definiendo la estructura de Hodge mixta sobre una variedad arbitraria X. La idea, en el caso de X proyectiva, es reemplazar X por un *esquema simplicial* $X_\bullet$, de manera que $X_\bullet$ preserve la información sobre la cohomología de X. En el caso general, se reemplaza X por un esquema simplicial $X_\bullet$, el cual se sumerge en un esquema simplicial $\overline{X}_\bullet$ cuyas componentes son lisas y propias de manera que el complemento de $X_\bullet$ sea un divisor con cruzamientos normales. Aplicando los resultados del artículo anterior a estos esquemas simpliciales y usando resultados de descenso cohomológico se construye la estuctura de Hodge mixta buscada sobre X, probando además que esta es independiente de los elementos auxiliares usados durante su construcción.

4. El problema de Riemann-Hilbert

El *problema de Riemann-Hilbert* es como se conoce genéricamente a las diferentes versiones del vigésimo primer problema propuesto por Hilbert en su famosa lista de 1900. En términos generales consiste en determinar si, para toda variedad compleja U (el problema original se refiere al plano complejo menos una cantidad finita de puntos) y toda representación ρ del grupo fundamental $\pi_1(U, x)$ (donde $x \in U$ es un punto base prefijado), existe de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en U cuya representación de monodromía sea justamente ρ. El caso en el que U es el plano complejo menos dos puntos había sido esencialmente resuelto por Riemann para representaciones de dimensión 2, a través de su teoría de funciones hipergeométricas.

Si $U = \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_r\}$, dado un sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dz}\mathbf{f} = A(z) \cdot \mathbf{f}$$

donde $A(z)$ es una matriz de funciones holomorfas en U, existe una base de soluciones analíticas en un entorno de cada punto de U. Dado un lazo γ en U con punto base x, por prolongación analítica a lo largo de γ queda definido un automorfismo del espacio vectorial V de soluciones en un entorno de x. Este automorfismo solo depende de la clase de homotopía de γ, por lo que se obtiene una representación de $\pi_1(U, x)$ en el grupo de automorfismos de V. Esta es la llamada *representación de monodromía* del sistema.

En una superficie de Riemann de género positivo o, más generalmente, en una variedad analítica compleja de dimensión superior, no existe un sistema global de coordenadas, por lo que hay que definir los sistemas localmente. En este caso es más conveniente usar el lenguaje de los haces y los sistemas locales. Un *sistema diferencial* en una variedad algebraica o analítica compleja U consiste en un haz localmente libre M junto con una conexión integrable $\nabla : M \to M \otimes \Omega^1_U$, donde Ω^1_U es el haz de formas diferenciales en U.

En una variedad analítica U, el teorema de existencia de Frobenius implica que el funtor de soluciones $\nabla \mapsto \ker(\nabla : M \to M \otimes \Omega^1_U)$ induce una equivalencia entre la categoría de sistemas diferenciales en U y la de sistemas locales de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Esta última categoría es, por su parte, equivalente a la categoría de representaciones del grupo fundamental $\pi_1(U, x)$, mediante el funtor que asigna a un sistema local su representación de monodromía. Por tanto, existe una correspondencia biunívoca entre sistemas diferenciales en U y representaciones de $\pi_1(U, x)$.

En el caso de una variedad algebraica, esta correspondencia no existe en general. Por ejemplo, en el plano complejo $\mathbb{C}$ (que es simplemente conexo, y por tanto todos los sistemas diferenciales definidos en él tienen monodromía trivial) existen múltiples sistemas diferenciales no triviales, como el definido por la ecuación $\frac{d}{dz}f = f$. Para poder establecer una correspondencia es necesario introducir condiciones de regularidad.

Volvamos momentáneamente al caso de $U = \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_r\}$. La condición de regularidad impone una cota superior en el crecimiento de las soluciones en los entornos angulares con vértice en los puntos que no están en U (incluido el punto del infinito). Esta condición, en principio analítica, tiene una caracterización algebraica (ya conocida por Fuchs en 1866 [20]). Por ejemplo, en el caso de una ecuación de grado n,

$$\frac{d^n}{dz^n}f + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f + \cdots + a_n(z)f = 0,$$

la condición de regularidad en $z = 0$ es que $a_k(z)$ tenga un polo de orden menor o igual que k, para cada $k = 1, \ldots, n$. En [5], Deligne da una caracterización de esta propiedad en función de la conexión asociada ∇, que es generalizable al caso de una variedad algebraica lisa arbitraria: Si U es un abierto de una variedad algebraica completa y lisa X tal que $Y = X \backslash U$ sea un divisor con cruzamientos normales, un sistema diferencial (M, ∇) en U es *regular* si existe un haz localmente libre de rango finito $\overline{M}$ en X tal que la conexión ∇ se extienda a una conexión $\overline{\nabla} : \overline{M} \to \overline{M} \otimes \Omega^1_X(\log Y)$, donde $\Omega^1_X(\log Y)$ es el haz de formas diferenciales tales que tanto ella como su diferencial exterior tienen, a lo sumo, un polo simple a lo largo de Y. Deligne muestra que esta definición no depende de la variedad X, solo de U. Por su parte, el teorema de resolución de singularidades de Hironaka garantiza la existencia de una tal X para una variedad lisa U cualquiera.

El resultado fundamental de Deligne en [5] es:

Teorema 5. *Sea U una variedad algebraica lisa compleja, y $x \in U$ un punto base prefijado. El funtor que a cada sistema diferencial (M, ∇) en U le asocia su representación de monodromía es una equivalencia entre la categoría de sistemas diferenciales* regulares *en U y la categoría de representaciones del grupo fundamental $\pi_1(U, x)$.*

En vista de la situación descrita anteriormente para las variedades analíticas, el resultado es equivalente a que el funtor de «analitización» que a cada sistema diferencial algebraico U la asocia el mismo sistema diferencial en U^{an} (es decir, U vista como variedad analítica compleja) es una equivalencia entre la categoría de sistemas diferenciales algebraicos regulares en U y la categoría de sistemas diferenciales analíticos en U^{an}.

La dificultad reside en probar que este funtor es esencialmente sobreyectivo. Es decir, que todo sistema diferencial analítico es isomorfo a la «analitización» de un sistema diferencial algebraico regular. Si U es una variedad completa, el resultado se deduce de los teoremas GAGA de Serre [30], que dan una equivalencia entre la categoría de haces algebraicos y la de haces analíticos en U. En el caso general, la solución de Deligne consiste en probar, para todo sistema diferencial analítico (M, ∇) en U^{an}, la existencia de una extensión $\overline{M}$ a X^{an}, donde X es una compactificación de U tal que $Y = X \backslash U$ sea un divisor con cruzamientos normales, de manera que ∇ se extienda a una conexión $\overline{\nabla} : \overline{M} \to \overline{M} \otimes \Omega^1_{X^{an}}(\log Y^{an})$. Por los teoremas GAGA, este $\overline{M}$ debe provenir de un haz localmente libre $\overline{M}_0$ en X dotado de una conexión $\overline{\nabla}_0 : \overline{M}_0 \to \overline{M}_0 \otimes \Omega^1_X(\log Y)$, y basta tomar entonces la restricción de $\overline{M}_0$ y de $\overline{\nabla}_0$ a U para obtener el sistema diferencial algebraico regular en U buscado.

Este resultado de Deligne fue clave para la resolución posterior por Kashiwara y Mebkhout del problema de Riemann-Hilbert para los $\mathcal{D}$-módulos holónomos.

5. Espacios de móduli y pilas

Otra de las aportaciones importantes de Deligne, en este caso en colaboración con David Mumford, es la definición del concepto de pila algebraica (hoy conocidas como *pilas de Deligne-Mumford*). En el artículo [17] se construyen como herramienta para probar que el espacio de móduli $\mathcal{M}_g$ de las curvas de género g es irreducible.

La filosofía de los espacios de móduli es que ciertos tipos de estructuras geométricas (variedades algebraicas, fibrados vectoriales, etc.) pueden clasificarse módulo isomorfismo mediante los puntos de un conjunto que a su vez también está dotado de una estructura geométrica. El ejemplo clásico es el de los esquemas proyectivos sobre un cuerpo k con un polinomio de Hilbert prefijado, que están parametrizados por los puntos de un esquema llamado *esquema de Hilbert.*

El caso estudiado en [17] es el de las curvas (proyectivas, no singulares) de género fijo g sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. El resultado ideal sería la existencia de un *espacio de móduli fuerte* que clasificara no solo las clases de isomorfosmos de curvas, sino también todas las familias algebraicas de dichas curvas. Es decir, se busca un «objeto geométrico» $\mathcal{M}_g$, junto con una «curva universal» $\alpha : C \to \mathcal{M}_g$ (donde la fibra sobre cada punto de $\mathcal{M}_g$ es una curva de género g), tal que, para toda fibración $\pi : D \to S$ de esquemas sobre k cuyas fibras sean curvas de género g, exista un único morfismo $\gamma : S \to \mathcal{M}_g$ tal que π se obtenga a partir de α mediante pull-back a través de γ.

En lenguaje funtorial, estamos considerando el funtor contravariante F (de la categoría de k-esquemas en la categoría de conjuntos) que a cada esquema S sobre k le asocia el conjunto de fibraciones $\pi : D \to S$ cuyas fibras son curvas de género g, y a cada morfismo $\alpha : S \to T$ le asocia la aplicación de $F(T)$ en $F(S)$ dada por el pull-back a través de α. Lo que se busca entonces es un objeto geométrico $\mathcal{M}_g$ que *represente* a este funtor, es decir, tal que el funtor F sea equivalente al funtor $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{M}_g)$.

Desgraciadamente, este «objeto geométrico» no puede ser un esquema sobre k. Esto se debe a que las curvas pueden tener automorfismos, lo que implica la existencia de fibraciones $\pi : D \to S$ no triviales tales que todas sus fibras son isomorfas entre sí. Si esta fibración se obtuviera a través de un pull-back de una hipotética familia universal $\alpha : C \to \mathcal{M}_g$, debería ser trivial.

Hay dos formas de solucionar este problema. La primera de ellas consiste en relajar las propiedades exigidas al objeto geométrico buscado, con lo cual se obtiene un *espacio de móduli débil*, es decir, un esquema M_g y una transformación natural $F \to \mathrm{Hom}(-, M_g)$ universal en la categoría de dichas transformaciones, y tal que los puntos de M_g estén en biyección con las clases de isomorfismo de curvas de género g. Este objeto clasifica las curvas, pero no las familias. La segunda posibilidad es extender el concepto de esquema para construir un objeto geométrico $\mathcal{M}_g$ y una familia universal $C \to \mathcal{M}_g$ que preserve la información sobre los automorfismos de sus fibras.

Estos objetos son las *pilas algebraicas* construidas por Deligne y Mumford. Para definirlas, es conveniente considerar la categoría de k-esquemas desde el punto de vista funtorial. Por el lema de Yoneda, una categoría $\mathcal{C}$ puede sumergirse en su categoría de *prehaces* (es decir, funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos) mediante el funtor $X \mapsto \mathrm{Hom}(-, X)$.[2] Así, un esquema X sobre k puede verse como un prehaz en la categoría de esquemas (que, de hecho, está determinado por sus valores en la subcategoría de esquemas afines), llamado *funtor de puntos* de X. Si dotamos a la categoría de k-esquemas de la topología étale, este prehaz es un haz (es decir, verifica ciertas condiciones de localización).

Una *pila* es una generalización de este concepto: es un funtor contravariante de la categoría de k-esquemas en la categoría (de hecho, en la 2-categoría) de *grupoides* (es decir, categorías en las que todo morfismo es invertible), cumpliendo ciertas condiciones de descenso (similares a las que distinguen los haces de entre todos los prehaces). Un esquema puede verse de forma natural como una pila. Las *pilas algebraicas* de Deligne y Mumford cumplen una condición adicional que hacen que

[2] Esta construcción es conceptualmente similar a la inmersión de los distintos espacios de funciones diferenciables, continuas, integrables, etc. en los espacios de distribuciones de Schwartz.

mantengan una cierta estructura geométrica: debe existir un recubrimiento étale de la pila mediante esquemas. Esta propiedad permite trasladar muchas de las propiedades que, en principio, solo están definidas para los esquemas a los objetos de esta nueva categoría.

Dentro de la categoría de pilas algebraicas sí es posible construir un espacio de móduli fuerte para las curvas de género g, como muestran Deligne y Mumford. Hoy día, las pilas algebraicas se conocen como *pilas de Deligne-Mumford*, para distinguirlas de otros tipos más generales (como las pilas de Artin, usadas por ejemplo para construir espacios de móduli de fibrados vectoriales).

6. Otros resultados

Terminamos este recorrido por la obra de Deligne repasando brevemente otras de sus aportaciones notables:

- Junto con G. Lusztig, estudió la teoría de representaciones (en característica 0) de grupos finitos de tipo Lie [14]. Se construyen representaciones usando la cohomología ℓ-ádica de unas ciertas variedades (variedades de Deligne-Lusztig) dotadas de una acción del grupo considerado. Usando estos resultados, Lusztig consiguió clasificar completamente las representaciones de los grupos simples finitos de tipo Lie [28].
- Junto con A. Beilinson y J. Bernstein, formalizó la teoría de los *haces perversos* [3], inspirada por la correspondencia de Riemann-Hilbert para D-módulos holónomos de Kashiwara y Mebkhout y por la cohomología de intersección de Goresky y MacPherson. Estos objetos forman una categoría abeliana que, para ciertas aplicaciones, tiene mejores propiedades que la categoría habitual de haces de espacios vectoriales sobre un conjunto geométrico (variedad algebraica, analítica, etc.). Tienen también una interpretación en el contexto de la cohomología ℓ-ádica.
- Reescribió la teoría de las *categorías tannakianas* [12], ciertas categorías abelianas dotadas de un producto tensorial y de un *funtor fibra* en la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo k, y cuya característica fundamental es que son equivalentes a la categoría de representaciones sobre k de un grupo reductivo.
- Junto con G.D. Mostow [16] estudia los posibles retículos (*lattices*) contenidos en el grupo $\mathrm{PU}(1,n)$, entre ellos los provenientes de la monodromía de ciertos sistemas de tipo hipergeométrico [15].
- Su trabajo ha sido fundamental en el desarrollo de la teoría de los *motivos*, introducida por Grothendieck como un intento de crear una teoría de cohomología universal para las variedades algebraicas. Este tema está subyacente en gran parte de la obra de Deligne. Entre sus aportaciones destaca la definición de los 1-*motivos*, en [8], como una generalización de las variedades semi-abelianas.

Como hemos comprobado, el trabajo de Deligne abarca innumerables áreas de las matemáticas, y en todas ellas ha realizado contribuciones importantes, y en muchos casos fundamentales, usando puntos de vista originales que han contribuido posteriormente a la resolución de muchos problemas y al desarrollo de nuevas teorías. Para los lectores que quieran profundizar en el tema, los artículos [21, 22, 23] contienen información adicional sobre gran parte de los resultados de Deligne aquí mencionados.

RECONOCIMIENTOS

El autor agradece a Luis Narváez sus sugerencias y comentarios durante la elaboración de este artículo.

REFERENCIAS

[1] Y. ANDRÉ, Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes), *Panoramas et Synthèses* **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK Y J.L. VERDIER, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), *Lecture Notes in Mathematics* **269** (Tome 1, 1972), **270** (Tome 2, 1973), **305** (Tome 3, 1973), Springer-Verlag, Berlin-New York.

[3] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN Y P. DELIGNE, Faisceaux pervers, *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[4] P. DELIGNE, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, *Séminaire N. Bourbaki, 1968-1969*, exp. nº 355, 139–172.

[5] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Mathematics* **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[6] P. DELIGNE, Théorie de Hodge I, *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 1, 425–430, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[7] P. DELIGNE, Théorie de Hodge II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **40** (1971), 5–57.

[8] P. DELIGNE, Théorie de Hodge III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **44** (1974), 5–77.

[9] P. DELIGNE, La conjecture de Weil I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 273–307.

[10] P. DELIGNE, Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$), *Lecture Notes in Mathematics* **569**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[11] P. DELIGNE, La conjecture de Weil II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **52** (1980), 137–252.

[12] P. DELIGNE, Catégories tannakiennes, *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87**, 111–195, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[13] P. Deligne y N. Katz, Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) II, *Lecture Notes in Mathematics* **340**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[14] P. Deligne y G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.* **103** (1976), no. 1, 103–161.

[15] P. Deligne y G.D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **63** (1986), 5–89.

[16] P. Deligne y G.D. Mostow, Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$, *Annals of Mathematics Studies* **132**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[17] P. Deligne y D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **36** (1969), 75–109.

[18] J. Dieudonné, Cours de Géométrie Algébrique I-II, *Presses Universitaires de France*, Paris, 1974.

[19] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 631–648.

[20] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, *Dover Publications*, New York, 1944.

[21] N. Katz, An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII)*, 275–305, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I., 1976.

[22] N. Katz, An overview of Deligne's work on Hilbert's twenty-first problem, *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII)*, 537–557, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[23] N. Katz, The work of Pierre Deligne, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, 47–52, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

[24] N. Katz, L-functions and monodromy: four lectures on Weil II, *Adv. Math.* **160** (2001), no. 1, 81–132.

[25] K. Kedlaya, Fourier transforms and p-adic 'Weil II', *Compos. Math.* **142** (2006), no. 6, 1426–1450.

[26] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **65** (1987), 131–210.

[27] G. Laumon, Exponential sums and ℓ-adic cohomology: a survey, *Israel J. Math.* **120** (2000), part A, 225–257.

[28] G. Lusztig, Characters of reductive groups over a finite field, *Annals of Mathematics Studies* **107**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.

[29] L. Mordell, On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions, *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **19** (1917), 117–124.

[30] J.P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **6** (1955-56), 1–42.

[31] A. WEIL, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg* **7** (1945).

[32] A. WEIL, Variétés abéliennes et courbes algébriques, *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg* **8** (1946).

[33] A. WEIL, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.

[34] A. WEIL, Abstract versus classical algebraic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Amsterdam, 1954), Vol. III, 550–558, *North-Holland Publishing Co.*, Amsterdam, 1956.

ANTONIO ROJAS LEÓN, DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Correo electrónico: arojas@us.es
Página web: http://personal.us.es/arojas