Educación

Sección a cargo de

María José González López

Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos

por

Marta Molina

Resumen. Tanto en documentos curriculares como en la literatura científica, la traducción entre sistemas de representación se reconoce como una importante componente de la competencia matemática a desarrollar durante la educación obligatoria. Habiendo constatado la escasa presencia de investigaciones que indagan en la traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal, venimos desarrollando diversos estudios que buscan contribuir a esta línea de investigación. En este artículo sintetizamos e integramos los resultados obtenidos por medio de tres estudios complementarios que contribuyen a describir la comprensión del simbolismo algebraico que desarrollan estudiantes de diferentes niveles educativos a partir de su formación algebraica.

1. Introducción

En el álgebra escolar conviven diferentes sistemas de representación externa que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos. Estos sistemas son, principalmente, el simbolismo algebraico, el lenguaje verbal y los sistemas de representación tabular, gráfico y numérico.

En este artículo centramos la atención en dos de estos sistemas, el lenguaje verbal y el simbolismo algebraico, que resultan esenciales cuando se hace uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y, en general, para la modelización de situaciones. Nos interesamos por la traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal como proceso que informa de la competencia algebraica de los estudiantes.

Utilizar y moverse con fluidez entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos es una de las principales expectativas de aprendizaje a desarrollar durante la educación obligatoria, tal y como se reconoce en documentos curriculares nacionales ([3]) y en referentes curriculares internacionales ([31]). «Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: a) crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; y c) usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos» ([31], p. 71).

Si bien en los primeros niveles las representaciones personales de los escolares tienen un papel relevante, en la educación secundaria las representaciones a utilizar son mayoritariamente las convencionales en matemáticas, entre ellas el simbolismo algebraico. Las expectativas de aprendizaje anteriormente recogidas, particularizadas para el caso del simbolismo algebraico, junto a las evidencias de las persistentes dificultades que manifiestan los estudiantes en el uso del simbolismo algebraico de las que da cuenta la literatura científica ([10], [26]), han motivado nuestro interés por el análisis del proceso de traducción del sistema de representación simbólico al verbal.

En este artículo sintetizamos los avances en este problema de investigación que hemos alcanzado hasta el momento por medio de varios estudios complementarios que indagan en la capacidad de diferentes grupos de estudiantes de secundaria y universidad de realizar este tipo de traducciones. Previamente precisamos el significado de los principales términos que definen el problema de investigación y describimos la información que aportan estudios previos sobre dicha capacidad.

2. Representaciones

Entendemos por *sistema de representación* un conjunto estructurado de signos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto ([11], [25]). Las reglas a las que se hace referencia en esta definición precisan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos ([6]).

Se habla de sistemas y no únicamente de representaciones, debido a que la concepción moderna de las matemáticas organiza los conceptos matemáticos en estructuras y, en consecuencia, este carácter se trasmite a sus representaciones ([35]).

Para un mismo concepto existe una diversidad de modos de representación, que junto con las reglas que los acompañan, proponen caracterizaciones distintas del correspondiente concepto. Cada uno de ellos tiene mayor o menor relevancia según el tema que estemos considerando, y difiere en las propiedades del concepto que destaca u opaca ([22], [24], [34]). Por ejemplo, el sistema de representación gráfico tiene una presencia destacada en el estudio de las funciones y no tiene tanta relevancia al trabajar las propiedades aritméticas. Incluso dentro de un mismo sistema de representación, como por ejemplo el simbólico, diferentes representaciones de un mismo concepto pueden resultar más o menos útiles según la información que queramos explicitar. Por ejemplo, $f(x) = x^2 - 10x + 16$ y $f(x) = (x - 2)(x - 8)$ son dos representaciones simbólicas de una misma función cuadrática, siendo los cortes con los ejes una información que se encuentra de forma implícita u opaca en la primera representación y de forma explícita en la segunda.

La naturaleza abstracta de los objetos matemáticos hace esencial el uso de las representaciones para poder pensar en dichos objetos, comunicar nuestro pensamiento sobre los mismos, y abordar problemas matemáticamente. En el contexto de la educación matemática las representaciones han sido destacadas por su importancia en la comprensión de los conceptos matemáticos ([21], [25], [35]). Es mediante el trabajo con las representaciones como las personas asignan significado y comprenden las estructuras matemáticas ([32]). Las representaciones son, al fin y al cabo, un intermediario entre el objeto/concepto y la persona, y permiten acceder e interactuar con el conocimiento matemático ([27], [35]). Un sujeto tendrá una comprensión más completa de un concepto matemático cuanto mayor sea su conocimiento de las representaciones que lo hacen presente y de las propiedades del mismo que cada representación explicita.

3. Características del lenguaje verbal y del simbolismo algebraico

El término *lenguaje verbal* o *sistema de representación verbal* refiere al lenguaje cotidiano, ya sea en forma oral o escrita, incluyendo terminología específica tal como la propia del lenguaje matemático académico (ej., poliedro, ecuación). Este sistema de representación tiene como característica inherente la ambigüedad, entendiendo esta como la propiedad de que una frase puede ser interpretada de más de una manera ([29]). Elementos complementarios a una frase, como factores situacionales, las creencias y cultura del emisor y del receptor, la entonación o los gestos, entre otros, junto a la posibilidad de pedir y dar aclaraciones, son los que permiten una adecuada interpretación del mensaje. Si bien no todas las frases presentan el mismo grado de ambigüedad, esta tiende a ser menor en la comunicación escrita, como consecuencia de no disponer de elementos como la entonación y los gestos.

El *simbolismo algebraico* o *sistema de representación simbólico*, por otro lado, es parte del lenguaje matemático; se define como un sistema de representación cuyos elementos son numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra (tales como los signos operacionales o el signo igual). A diferencia del lenguaje verbal, el simbolismo algebraico es un sistema de representación de gran precisión. La ambigüedad mínima es una característica inherente al lenguaje matemático ([29]). Cierta imprecisión en una expresión simbólica podrá tener lugar, por ejemplo, con motivo de la polisemia de los símbolos (ej., una letra puede representar una incógnita, una variable o un parámetro; un signo menos se utiliza tanto para representar la operación resta como el opuesto de un número).

Una de las fortalezas del simbolismo algebraico radica en la representación de las ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen. Este lenguaje compacto nos permite separarnos e incluso olvidar los referentes para producir resultados de forma más eficiente ([1]). Podemos transformar las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas sin necesidad de atender al significado de los símbolos que las componen. Estas acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos) incrementan la eficiencia y rapidez en la ejecución de procedimientos. Pero, como señala Arcavi ([2]), deben alternarse de forma flexible y oportunista con la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados dirigida a cuestionar y elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados, para hacer así un uso competente de este sistema de representación.

Entre las diferencias existentes entre ambos sistemas de representación, el lenguaje verbal y el simbolismo algebraico, cabe destacar la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas ([39]), así como la posible multidireccionalidad de su escritura (ej., de arriba a abajo o de abajo a arriba o del centro a los extremos), a diferencia del lenguaje verbal. Freudenthal ([18]) llama la atención sobre el diferente papel de la sintaxis en ambos sistemas de representación, en tanto que en el lenguaje verbal las imprecisiones o errores sintácticos (ej., posición incorrecta de un acento o conjugación incorrecta de un verbo) en general no obstaculizan la trasmisión del significado, mientras que en el caso del simbolismo algebraico condicionan dicha trasmisión. Adicionalmente cabe mencionar la posible presencia de información irrelevante en enunciados verbales ([4]). Estas características, entre otras, son factores que influyen en la competencia que los estudiantes desarrollan en el uso de cada uno de los sistemas de representación.

4. Los procesos de traducción

La traducción entre sistemas de representación consiste en reproducir el mismo «contenido» en otro sistema ([18]); en transformar los conceptos y atributos representados en un sistema a los correspondientes conceptos y atributos en otro sistema, obteniendo una representación diferente a la de partida pero congruente en significado. Este proceso es complejo desde un punto de vista cognitivo; para su ejecución no es suficiente comprender y saber utilizar los sistemas de representación implicados, requiere distinguir la información esencial que define el concepto representado para trasladarla a otro sistema de representación, obviando aspectos superfluos impuestos por el sistema de representación en el que viene representado el concepto.

Por ejemplo, la traducción del sistema de representación gráfico al simbólico de la recta representada en la Figura 1 requiere como punto de partida reconocer la imagen como la representación de una recta y conocer las formas de representar simbólicamente una recta. El segundo paso implica abstraer de la representación gráfica la información necesaria para obtener una ecuación del tipo $y = mx + b$ o $ax + by + c = 0$, no siendo necesario en este caso atender a parte de la información contenida en la representación gráfica tal como la escala o los valores máximos y mínimos representados en los ejes cartesianos y sí, en cambio, a puntos concretos de la recta como los cortes con los ejes.

La traducción entre sistemas de representación se considera útil para la adquisición de conceptos y afecta al rendimiento en la resolución de problemas ([40]), habiéndose constatado que son mejores resolutores aquellas personas que se mueven

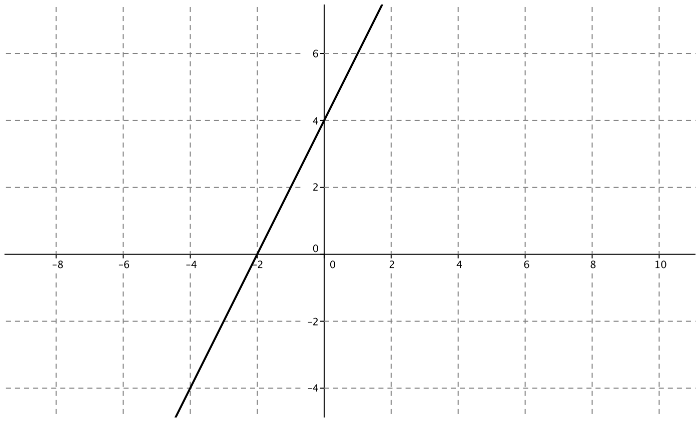

Figura 1: Representación gráfica de una recta.

fácilmente de un sistema de representación a otro ([19]). En particular, el empleo de diferentes sistemas de representación en la resolución de un problema potencia el acceso a una mayor diversidad de estrategias de resolución (ej., [5]).

Autores que han analizado los procesos de traducción, en contextos no exclusivamente algebraicos, tales como Duval [13] y Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham [4], identifican elementos que condicionan su dificultad. Entre ellos cabe mencionar la presencia de información no explícita y de información irrelevante o confusa en las representaciones a traducir, el carácter polisémico de algunas de las componentes de dicha representación, la existencia o no de una correspondencia biyectiva entre todas las componentes significativas de la representación, la posibilidad o no de conservación del orden de las componentes al realizar la traducción, así como factores personales tales como la experiencia previa del alumno con dicho tipo de traducciones.

5. De lo simbólico a lo verbal

La traducción del sistema de simbolismo algebraico al lenguaje verbal tiene una escasa presencia en la práctica escolar, priorizándose otro tipo de traducciones que están implicadas en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas (ej., traducciones en sentido inverso, es decir, del sistema de representación verbal al simbólico), el estudio de funciones (ej., traducciones del sistema simbólico al gráfico) o el estudio de propiedades o relaciones numéricas por medio de la generalización (ej., traducciones del sistema de representación numérico al simbólico). Esta escasa presencia es probablemente la causa del bajo número de trabajos que consideran este tipo de traducciones como objeto de investigación.

La pertinencia de indagar en la traducción del sistema de representación simbólico al verbal puede argumentarse a partir de una doble utilidad: para promover el aprendizaje del álgebra escolar y para analizar la comprensión del simbolismo algebraico que desarrollan los estudiantes como resultado de su formación algebraica, o en términos más generales, su competencia algebraica (con fines docentes o de investigación).

Autores como Resnick, Cauzinille-Marmeche y Mathie ([33]) y Dede ([12]) han señalado el interés de pedir a los estudiantes que elaboren situaciones que pueden ser modelizadas por ecuaciones dadas, como herramienta para evitar que realicen operaciones sin sentido al manipular el simbolismo algebraico y que sobre-generalicen propiedades aritméticas a otras operaciones (ej., simplificar un sumando igual en el numerador y denominador de una fracción numérica o algebraica). Habiendo observado que estudiantes de 11-12 años no recurrían espontáneamente a contextos de referencia ante la tarea de juzgar la equivalencia de expresiones algebraicas, y que la capacidad de dotar de referencia a expresiones numéricas está correlacionada positivamente con la capacidad de juzgar su equivalencia, Resnick et al. ([33]) conjeturan que dotar de significado a expresiones algebraicas es un predecesor de un aprendizaje formal del álgebra exitoso, y argumentan que esta práctica debería fundamentar la enseñanza del álgebra. Esta propuesta se apoya en la necesidad de conectar las acciones procedimentales con la búsqueda de significado a la que nos hemos referido previamente.

Así mismo, se hace pertinente abordar de forma explícita este sentido de la traducción en la enseñanza por su implicación en los procesos de modelización. Estos procesos no solo implican construir un modelo de la situación de partida sino también interpretar las expresiones simbólicas y las soluciones que se deriven del trabajo sintáctico en el modelo.

La traducción de expresiones simbólicas al lenguaje verbal implica darles significado. Dicho significado puede proceder de dos fuentes referenciales: los números y las operaciones o las situaciones que involucran cantidades y relaciones entre estas ([33]). En el primer caso, la traducción da lugar a lo que Nathan y Koedinger ([30]) denominan *expresiones algebraicas con palabras*. La particularidad de estos enunciados radica en que las incógnitas refieren a números desconocidos sobre los cuales se establecen relaciones cuantitativas (ej., «un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos»). Estos enunciados son los propios de problemas relativos a la teoría de números. En el segundo caso, la traducción da lugar al enunciado de un problema contextualizado fuera de la matemática o dentro de esta pero ajeno a la teoría de números. Este tipo de traducción, a diferencia de las anteriores, requiere dar significado a las operaciones aritméticas que aparecen (ej., interpretando elevar al cuadrado como calcular un área o sumar como combinar o unir cantidades) y escoger un contexto en el que definir cantidades desconocidas (ej., precio de ciertos productos, longitudes de un objeto) que puedan estar relacionadas del modo en que se indica en la expresión simbólica. En este caso se asigna significado a los objetos y operaciones presentados de forma abstracta por medio de una expresión simbólica, dándoles manifestaciones más concretas ([16]).

En consecuencia, la traducción de expresiones simbólicas al lenguaje verbal, especialmente cuando consiste en proponer situaciones modelizables mediante dichas expresiones, es de utilidad como tarea evaluadora de la comprensión del simbolismo algebraico y, en particular, de los componentes de las expresiones simbólicas: los signos operacionales (y por tanto las operaciones), el signo igual, las letras[1], etc.

Las investigaciones realizadas hasta el momento consideran expresiones propias del álgebra escolar e implican a estudiantes de educación secundaria o de estudios universitarios relacionados con la docencia de las matemáticas. Indagan en la capacidad de los estudiantes de abordar la traducción de expresiones simbólicas al lenguaje verbal por medio de la tarea de inventar problemas resolubles mediante una ecuación o sistema de ecuaciones dado ([20], [23]) o la lectura de expresiones simbólicas ([17]). Concretamente, por medio de la invención de problemas resolubles mediante ecuaciones lineales de una variable y sistemas de ecuaciones lineales de dos variables, actividad propuesta a 20 estudiantes para maestro de educación primaria, Isik y Kar ([23]) identifican un total de siete dificultades:

- traducción incorrecta de notación algebraica, concretamente paréntesis y operaciones;
- modificación de la estructura de la expresión dada al ignorar los paréntesis incluidos;
- asignación de valores no realistas a las incógnitas, posiblemente motivada por el desconocimiento de las soluciones posibles de las ecuaciones y sistemas dados;
- uso combinado de lenguaje verbal y simbolismo algebraico en el enunciado del problema;
- fallo al establecer una relación parte-todo a partir de ecuaciones de una variable;
- fallo al establecer una relación entre las variables incluidas en un sistema al tratar de forma independiente ambos miembros de una ecuación; y
- formulación de problemas diferentes para cada ecuación de un sistema.

Dentro de los estudios que atienden a la lectura de expresiones simbólicas, se encuentra el de Filloy y Rojano ([17]). Estos autores piden a alumnos de 13 y 14 años, con diferentes niveles de rendimiento en actividades algebraicas, que lean expresiones simbólicas correspondientes tanto a fórmulas como a expresiones simbólicas abiertas y equivalencias algebraicas. Los estudiantes aportan lecturas literales (ej., «a más b») o con referencias a elementos de figuras geométricas (ej., «base más altura entre dos»), no precisando en algunos casos la figura de referencia. Algunos estudiantes interpretan las expresiones polinómicas sin signo igual como fórmulas geométricas (ej., base por altura) o tienden a «cerrarlas» ya sea asignando valores numéricos a las letras o convirtiéndolas en una ecuación. También muestran tendencia a rechazar que diferentes letras puedan tener un mismo valor o que tomen valores que conduzcan a valores negativos al evaluar la expresión. Los citados autores observan que los términos *aumentar* o *disminuir* no son asignados a los signos más y menos de forma natural.

[1]Utilizamos el término *letra* para referirnos de forma general a los símbolos literales sin precisar si su uso es como variable o incógnita.

En un estudio previo con estudiantes de la misma edad pero de bajo rendimiento en actividades algebraicas, Gallardo y Rojano ([20]) detectan dependencia de la resolución de la ecuación dada al pedirle a los estudiantes que inventen un problema a partir de una ecuación. Aquellos estudiantes que no fueron capaces de resolver la ecuación no pudieron proponer un problema resoluble/modelizable mediante la misma.

6. Tres estudios

Tras la revisión de los escasos estudios que han abordado con anterioridad el problema de investigación que nos ocupa, describimos las principales características metodológicas y resultados de tres estudios realizados recientemente en la Universidad de Granada, en los que la autora de este artículo ha participado como parte del equipo investigador[2]. Todos ellos tienen en común, como uno de sus objetivos de investigación, la indagación en la capacidad de un determinado grupo de estudiantes de realizar traducciones del sistema de representación simbólico al verbal. Otras de las características que comparten estas investigaciones son su naturaleza exploratoria y descriptiva, ante la escasez de estudios previos, y considerar el álgebra escolar propia de educación secundaria como marco del estudio, lo cual condiciona el tipo de expresiones simbólicas que se utilizan.

Como a continuación se pone de manifiesto, los estudios difieren metodológicamente en las muestras consideradas, la traducción requerida y el tipo de expresiones simbólicas empleadas en la recogida de datos (ver Tabla 1). En dos de los estudios la tarea de traducir del simbolismo algebraico al lenguaje verbal se presenta por medio de la invención de problemas, una actividad a la que se le reconoce una alta demanda cognitiva ([9], [28]). Esta tarea se utiliza en ambos casos para evaluar la comprensión del simbolismo algebraico de los estudiantes. Sin embargo, cabe señalar que, a diferencia de la traducción descontextualizada propuesta en el primer estudio, la invención de problemas implica conocer los elementos que constituyen un problema y puede implicar la reflexión sobre el realismo o coherencia de la solución en el contexto propuesto.

Con el objetivo de facilitar la integración de los resultados de los tres estudios utilizamos las mismas variables de tarea para caracterizar las expresiones simbólicas utilizadas en cada recogida de datos, independientemente de que estas fueran utilizadas o no por los autores del trabajo en el diseño de la recogida de datos. Las variables de tarea que empleamos son las siguientes: operaciones implicadas, número de letras, número de miembros con letra, coeficientes de las letras (1 o diferente de 1) y tipo de expresión. Esta última variable de tarea refiere a si las expresiones incluyen o no un signo igual, a las que nos referiremos como expresiones cerradas y abiertas, respectivamente.

En la descripción de cada estudio que se incluye a continuación hemos respetado la forma en que los autores presentan y clasifican los resultados, si bien en el pos-

[2]En los documentos que se citan en cada caso aparecen ejemplos de las producciones de los estudiantes y se puede acceder a un mayor detalle sobre los resultados.

Estudio 1	Estudio 2	Estudio 3
	Muestra	
Estudiantes de 2.º y 4.º (opción A) de ESO	Estudiantes de 4.º (opción A) de ESO	Estudiantes universitarios del Grado de Maestro de Educación Primaria (2.º curso)
	Tipo de traducción solicitada	
Libre	Contextualizada fuera de las matemáticas (invención de problemas)	Contextualizada fuera de las matemáticas (invención de problemas) En algunos de los casos se sugiere el contexto
	Tipo de expresiones simbólicas consideradas	
Abiertas y cerradas	Cerradas (ecuaciones y sistemas de ecuaciones)	Cerradas (ecuaciones y sistemas de ecuaciones)
	Resultados	
Tipos de errores en las traducciones Relación de los errores con el tipo de expresión y nivel escolar del alumno	Errores detectados Componentes de las expresiones que condicionan la traducción Significado asignado a las operaciones	Errores detectados Componentes de las expresiones que condicionan la traducción Significado asignado a las operaciones

Tabla 1: Características diferenciadoras de los tres estudios.

terior apartado adoptamos un lenguaje común para poder integrar los resultados de estos estudios y extraer conclusiones globales sobre la comprensión del simbolismo algebraico que ponen de manifiesto los estudiantes.

Primer estudio

Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro ([38]) indagan en los errores en los que incurren dos grupos de estudiantes al traducir enunciados algebraicos del sistema de representación simbólico al verbal. La muestra está compuesta por 26 estudiantes de 4.º de ESO, matriculados en la materia Matemáticas, opción A, y 16 de 2.º de ESO. Todos los estudiantes pertenecen mismo centro público español.

Las expresiones simbólicas propuestas a los estudiantes para su traducción se presentan en la Tabla 2. Como puede observarse en dicha tabla, las expresiones incluyen una raíz cuadrada y relaciones aditivas y multiplicativas (incluidas potencias) entre letras y números; además, la mitad son abiertas y la mitad cerradas; la mitad incluye una sola variable y la otra mitad dos. Los coeficientes que presentan las letras son números naturales y, en un caso, también fraccionarios.

Expresión	Operaciones	Letras		Miembros con letra		Coeficientes		Tipo de expresión	
		1	2	1	2	1	$\neq 1$	Abierta	Cerrada
$x+(x+1)-4$	Aditivas	■		■		■		■	
$4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)=2x$	Multiplicativas	■			■		■		■
$(\sqrt{x})^y$	Multiplicativas y raíz cuadrada		■	■		■		■	
$x\cdot(x+1)=7x$	Aditivas y multiplicativas	■			■		■		■
$x^2-y^2=11$	Aditivas y multiplicativas		■	■		■			■
$(x\cdot y)^3$	Multiplicativas		■	■		■		■	

Tabla 2: Características de las expresiones propuestas a los estudiantes en el estudio 1.

La tarea fue propuesta a los estudiantes por su profesora de matemáticas (miembro del equipo investigador), para su resolución individual y por escrito en una sesión regular de clase, presentándose las diferentes expresiones en el orden en que aparecen en la Tabla 2.

Los resultados obtenidos en este estudio ponen de manifiesto que, como era previsible, los alumnos de 4.º son más exitosos al realizar las traducciones; concretamente incurren en 17 errores frente a 48 del grupo de 2.º. Todos salvo uno de los enunciados producidos por los estudiantes de ambos grupos presentan errores. Las autoras clasifican los errores en las tres categorías siguientes, definidas en un estudio previo ([36], [37]):

- Los errores *según la completitud del enunciado* hacen referencia a si falta o sobra algún símbolo para que la traducción pueda ser considerada correcta (ej., expresar verbalmente la traducción del enunciado $x\cdot(x+1)=7x$ como «un número por su consecutivo es igual a siete»).
- Los errores *derivados de la aritmética* corresponden a la incorrecta interpretación de signos operacionales confundiendo unas operaciones con otras (ej., traducir el miembro izquierdo de la ecuación $x^2-y^2=11$ como «la resta del doble de dos números»).
- Los errores *derivados de las características propias del simbolismo algebraico* son específicos al uso del sistema de representación simbólico, consisten en:

- generalizar o particularizar un elemento o parte de la expresión (ej., expresar como «el producto de un número par por la mitad de otro es igual a su doble» la expresión $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$, o traducir $(\sqrt{x})^y$ como «el cuadrado de la raíz cuadrada de un número»);
- no distinguir adecuadamente las letras contenidas en el enunciado, dando el mismo significado a letras diferentes o diferente significado a la misma letra cuando esta aparece más de una vez (ej., traducir $x \cdot (x + 1) = 7x$ como «un número multiplicado por otro número más uno, es igual a siete por un número»);
- no interpretar o expresar apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo (ej., traducir como «x por un producto elevado a tres» la expresión $(x \cdot y)^3$).

Como se observa en la Tabla 3, los escasos errores que cometen los estudiantes de 4.º curso se distribuyen de forma casi equitativa entre dos de las tres categorías aquí definidas. Los errores derivados de la aritmética suceden por confusión de las operaciones potencia y producto, y los derivados de las características del simbolismo algebraico consisten en la generalización de parte de la expresión dada o son debidos a dificultades para expresar o interpretar la estructura de la expresión. En cambio, en el caso del grupo de 2.º, más de la mitad de los errores corresponden a los clasificados como derivados de las características propias del simbolismo algebraico y un tercio a errores en la completitud del enunciado. Con similar frecuencia se produce la omisión de elementos del enunciado y la inclusión de más elementos. Los errores derivados de las características del simbolismo algebraico son más diversos que en el caso de los estudiantes de 2.º. Los errores derivados de la aritmética corresponden en su mayoría a la interpretación de la potencia como producto, como ocurre en el grupo de 4.º.

Errores	2.º ESO	4.º ESO
Según la completitud del enunciado	**33.3 %**	**7.2 %**
Derivados de la aritmética	**8.4 %**	**50 %**
Derivados de las características propias del simbolismo algebraico	**58.3 %**	**42.8 %**
– Generalizar parte del enunciado	18.7 %	28.5 %
– Particularizar parte del enunciado	4.2 %	-
– No distinguir adecuadamente las letras contenidas en el enunciado	12.5 %	-
– No interpretar o expresar apropiadamente la estructura del enunciado algebraico	22.9 %	14.3 %

Tabla 3: Errores de los estudiantes de 2.º ESO y de 4.º ESO según las tres categorías.

En el grupo de estudiantes de 2.º se detecta menor número de errores en enunciados abiertos que en los cerrados y en los de dos letras que en los de una (18 vs 30). En este sentido, cabe observar que en las expresiones con dos letras, estas están contenidas en el miembro izquierdo, mientras que las letras aparecen en ambos miembros en dos de las tres ecuaciones con una sola letra. En el grupo de 4.º no se detecta influencia de estas dos variables de tarea (tipo de expresión y número de letras) en la corrección de las traducciones de los alumnos. En lo que respecta a las operaciones implicadas en las expresiones, en el caso de los alumnos de 4.º son los enunciados que incluyen potencias (4/17) y los enunciados aditivo-multiplicativos (5/17) los que concentran mayor número de errores, mientras que en el caso en los alumnos de segundo esto ocurre en los multiplicativos (15/48) y en los aditivo-multiplicativos (9/48) que coinciden con los que contienen letras en ambos miembros.

Segundo estudio

Fernández-Millán y Molina ([14], [15]) indagan en las traducciones del sistema de representación simbólico al verbal que realizan un grupo de 20 estudiantes de 4.º de ESO matriculados en la materia de Matemáticas opción A en un centro público español.

Las autoras proponen a los estudiantes la invención de problemas resolubles mediante las expresiones simbólicas recogidas en la Tabla 4. Las expresiones consideradas son cinco ecuaciones y dos sistemas de ecuaciones; todas ellas con solución única, limitando de este modo el uso de la letra al de incógnita. Los coeficientes de las incógnitas, los términos independientes y las soluciones de las ecuaciones son números enteros. Como puede observarse en la Tabla 4 las expresiones incluyen relaciones aditivas y multiplicativas (entre ellas potencias) entre letras y números, y una de las ecuaciones contiene letras en ambos miembros.

Expresión	Operaciones	Letras		Miembros con letra		Coeficientes		Tipo de expresión
		1	2	1	2	1	$\neq 1$	
$8 = x + 6$	Multiplicativas	■		■		■		Cerrada
$2x - 1 = 9$	Aditivas	■		■			■	Cerrada
$x + 10 = 6x$	Multiplicativas	■			■		■	Cerrada
$16 = x^2$	Multiplicativas y raíz cuadrada	■		■		■		Cerrada
$\left.\begin{aligned} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{aligned}\right\}$	Aditivas y multiplicativas		■	■			■	Cerrada
$\left.\begin{aligned} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{aligned}\right\}$	Aditivas y multiplicativas		■	■		■		Cerrada
$20 = x(x + 1)$	Multiplicativas	■		■		■		Cerrada

Tabla 4: Características de las expresiones propuestas a los estudiantes en el estudio 2.

La tarea fue propuesta a los alumnos en una prueba a resolver individualmente y por escrito en una sesión de clase, estando presente la docente de matemáticas del grupo y una de las investigadoras. Las diferentes expresiones se presentaron en el orden en que aparecen en la Tabla 4.

El análisis de los 109 problemas analizables[3] propuestos por los estudiantes pone de manifiesto que, exceptuando la primera ecuación, el porcentaje de problemas que son una traducción adecuada de la ecuación o sistema dado fluctúa entre un 30 y un 40 por ciento. Los errores que se detectan son ausencia de igualdad (24/109) o de incógnitas (18/109), modificación de las operaciones que relacionan las incógnitas entre sí o con los términos independientes (42/109), modificación de los coeficientes o términos independientes (12/109), y cambio en el número de incógnitas involucradas (16/109). La mayoría de los enunciados que no incluyen igualdad, tampoco incluyen incógnita, siendo problemas de tipo aritmético en cuyo enunciado no se describen operaciones que involucren cantidades desconocidas. La ecuación 3, única con incógnita en ambos miembros, destaca por ser la que presenta una mayor frecuencia de traducciones incorrectas. En esta ecuación y en los dos sistemas de ecuaciones propuestos, los estudiantes tienden a incluir un mayor número de incógnitas que las dadas, bien por identificar las incógnitas como distintas al encontrarse en miembros diferentes o, en el caso de los sistemas, por no precisar que se refieren a las mismas incógnitas cuando en el enunciado narran relaciones relativas a ecuaciones diferentes. El miembro en que se localiza la incógnita, sin embargo, no supone dificultad para abordar los procesos de traducción por estos estudiantes.

Así mismo, se detectan dificultades para expresar relaciones multiplicativas relativas a ser múltiplo de un número natural superior a 2, tales como el séxtuple o seis veces la cantidad de referencia, siendo más exitosas las traducciones de aquellos enunciados en los que el coeficiente de las incógnitas es 1.

En la mayoría (75 %) de los enunciados analizables, los estudiantes dan significados a las incógnitas asociados a contextos no matemáticos. En el resto de casos proponen problemas propios de teoría de números. Cabe señalar la mayor facilidad para dar significado a las operaciones aditivas que ponen de manifiesto los estudiantes frente a las operaciones multiplicativas, especialmente cuando la multiplicación se produce entre dos incógnitas. Los estudiantes no consideran contextos geométricos ni de medida para darle significado a las operaciones, asignando a la multiplicación únicamente significados asociados a la comparación multiplicativa y a relaciones de proporcionalidad simple ([8]), es decir, a la repetición de una misma cantidad de elementos. Se echan en falta problemas de áreas y, en general, problemas en los que la multiplicación tenga el significado de producto cartesiano. Las operaciones aditivas son interpretadas como situaciones de combinación (unión) de cantidades o de cambio de una cantidad inicial, que se ve reducida o incrementada, siendo mínima la presencia de situaciones de comparación aditiva.

[3]No se consideran analizables los enunciados que se limitan a pedir la resolución de la ecuación o sistema dado o que no son resolubles mediante una expresión aritmética o algebraica al no describirse relaciones entre las cantidades referidas.

TERCER ESTUDIO

Cañadas, Molina y del Río ([7]) indagan en la traducción del sistema de representación simbólico al verbal en un estudio con 55 estudiantes universitarios con experiencia previa en invención de problemas; concretamente, son futuros maestros de educación primaria que cursan el segundo año de su titulación. En el curso previo, estos estudiantes habían trabajado la invención de problemas aritméticos y los diferentes significados que las operaciones aritméticas pueden presentar en contextos no matemáticos.

La tarea propuesta consiste en la invención de problemas resolubles o modelizables mediante las expresiones algebraicas recogidas en la Tabla 5, algunas de las cuales coinciden o son muy similares a las del estudio previo. Las expresiones —seis ecuaciones y dos sistemas de ecuaciones— incluyen relaciones aditivas y multiplicativas (en uno de los casos potencia) entre letras y números, con las letras localizadas en el miembro izquierdo de la ecuación y, en uno de los casos, con letras en ambos miembros. En las últimas tres expresiones de la Tabla 5 se les sugirió a los estudiantes un contexto precisando el tipo de cantidad a la que debían referir las incógnitas: cantidades de harina y azúcar en un pastel, tiempo requerido para ir de casa al instituto y la medida de un lado de un rectángulo, respectivamente.

Expresión	Operaciones	Letras		Miembros con letra	Coeficientes		Tipo de expresión
		1	2		1	$\neq 1$	
$x+6=8$	Aditivas	■		1	■		Cerrada
$x^2=16$	Multiplicativas (potencia)	■		1	■		Cerrada
$x+y=7$	Aditivas		■	1	■		Cerrada
$2x-1=5$	Aditivas y multiplicativas	■		1		■	Cerrada
$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$	Aditivas y multiplicativas		■	1	■		Cerrada
$\left.\begin{array}{r} x+3y=3 \\ x-2y=1 \end{array}\right\}$	Aditivas y multiplicativas		■	1		■	Cerrada
$3x=20$	Multiplicativas	■		1		■	Cerrada
$x(x+1)=18$	Aditivas y multiplicativas	■		1	■		Cerrada

Tabla 5: Características de las expresiones propuestas a los estudiantes en el estudio 3.

La tarea fue propuesta a los estudiantes en una sesión regular de clase por su profesora de una asignatura del área de Didáctica de la Matemática (miembro del equipo de investigación), presentándose las diferentes expresiones en el orden en que aparecen en la Tabla 5. Fue resuelta de forma individual y por escrito.

El porcentaje de éxito en la tarea propuesta estuvo comprendido entre el 50 y el 70 por ciento según la expresión, con la excepción de la primera ecuación en la cual ninguno de los estudiantes tuvo dificultad para proponer un problema modelizable con la expresión dada. Los errores que se detectan en las traducciones propuestas por los estudiantes son: a) incluir un mayor número de incógnitas o no incluir ninguna; b) añadir relaciones entre las incógnitas o dar valor a una de ellas, cuando hay más de una; y c) reemplazar expresiones cuadráticas por lineales (ej., reemplazar x^2 por $2x$ o $4x$ en la ecuación $x^2 = 16$).

Los problemas propuestos que no requerían el uso de incógnitas para su resolución (eran de tipo aritmético) contenían en algunos casos la solución de la expresión dada como uno de los datos, siendo la cantidad desconocida el valor contenido en el miembro derecho de la ecuación dada. En estos casos los estudiantes habían resuelto la ecuación antes de abordar la traducción pedida. Concretamente esto ocurrió en la segunda (8/52), cuarta (5/48), y séptima ecuación (8/48). En el sistema de ecuaciones, una de las principales dificultades que muestran los alumnos es plantear un problema que implique a las dos ecuaciones, obviando en algunas de sus propuestas una de las ecuaciones dadas.

Aun cuando las expresiones consideradas en la recogida de datos incluyen en igual medida operaciones aditivas y multiplicativas (ver Tabla 5), las primeras tienen una mayor presencia en los problemas inventados por los estudiantes. La mayoría (84 %) de los enunciados dan algún significado a las operaciones. En el resto de casos proponen problemas propios de teoría de números o problemas en los que aluden a un contexto no matemático para referir a las cantidades, pero no dan significado a las operaciones, incluyendo términos aritméticos en el enunciado (ej., propuesto en el primer sistema: «Si sumo el número de balones de fútbol y tenis que tengo, hay 7. Si los multiplico obtengo 10. ¿Cuántos balones de fútbol y tenis tengo?»).

Los estudiantes muestran preferencia por interpretar la suma como la unión de cantidades (combinación) o como la modificación de una cantidad inicial (cambio). En cuanto a las operaciones multiplicativas, predominan los problemas de proporcionalidad simple, salvo en las expresiones que incluyen operaciones entre las incógnitas, en cuyo caso los problemas suelen hacer referencia al cálculo de áreas. Los problemas de comparación tienen baja presencia, siendo más frecuente la comparación multiplicativa que la aditiva. La sugerencia de un contexto específico incluida en las tres últimas expresiones propuestas a los alumnos no se manifestó como una variable de tarea que condicionara la dificultad de inventar un problema aunque, como se pretendía, condicionó el significado asignado a las operaciones.

7. Discusión y conclusiones

Los tres estudios ponen de manifiesto que los estudiantes encontraron importantes y variadas dificultades para abordar la traducción de lo simbólico a lo verbal, detectándose porcentajes de éxito bastante bajos, principalmente cuando las expresiones propuestas no son ecuaciones lineales. La diversidad y número de errores, según pone de manifiesto el primer estudio, tienden a reducirse conforme los estudiantes progresan en su formación algebraica o alcanzan un mayor desarrollo cognitivo.

Los tres estudios aportan información descriptiva de los errores que cometieron los estudiantes. Sintetizamos a continuación los errores identificados en estos estudios:

- la incorrecta interpretación de signos operacionales, concretamente las potencias y los productos (ej., interpretación de expresiones cuadráticas como lineales);
- la inclusión de variables o de relaciones adicionales entre las variables, principalmente cuando las expresiones incluyen varias incógnitas;
- la omisión de variables y de la relación de igualdad, al plantear un problema de tipo aritmético que no requiere el uso de simbolismo algebraico para su resolución;
- la generalización (y excepcionalmente la particularización) de parte de las expresiones cuando se proponen traducciones propias referidas a contextos numéricos (teoría de números);
- la omisión de elementos o la modificación de los coeficientes o términos independientes, en mayor medida cuando las expresiones presentan relaciones multiplicativas entre las letras o coeficientes superiores a uno, o cuando incluyen varias incógnitas;
- la diferente interpretación de incógnitas iguales contenidas en miembros diferentes de la ecuación;
- la consideración de solo una de las ecuaciones de un sistema;
- la inclusión de la solución de la ecuación en el enunciado transformando la cantidad del miembro derecho de la ecuación en incógnita del problema.

A diferencia del estudio de Filloy y Rojano ([17]), estos estudiantes no muestran tendencia a cerrar las expresiones que no contienen igualdad ni hacen valoraciones sobre los valores que pueden tomar las letras contenidas en las expresiones. Solo los estudiantes del tercer estudio, maestros en formación, recurren a la solución de la ecuación antes de abordar la traducción, tendencia que Gallardo y Rojano ([20]) detectan en alumnos de secundaria con baja competencia algebraica.

Los errores detectados en los tres estudios ponen de manifiesto que las características de las expresiones que ocasionaron mayores dificultades a los estudiantes para abordar la traducción solicitada fueron: las operaciones multiplicativas, en especial las potencias, los coeficientes superiores a dos y el producto de incógnitas; la existencia de una misma letra en ambos miembros; y la consideración de dos ecuaciones en un sistema. La presencia de igualdad también se detecta en el primer estudio como un factor que dificulta la traducción requerida en el caso de los alumnos con menor formación algebraica (2.º ESO). En cambio la posición de la incógnita, en los casos en que solo estaba contenida en uno de los miembros, no se detectó como factor condicionante de su capacidad de traducción.

Filloy y Rojano ([16]) destacan las ecuaciones con incógnitas en ambos miembros como un componente del álgebra escolar que supone un corte en la evolución del pensamiento desde la aritmética al álgebra. Se requiere un pensamiento más desarrollado en tanto que las ecuaciones no pueden ser interpretadas operacionalmente como la expresión de una secuencia de operaciones que dan lugar a un resultado y se hace necesario operar con la incógnita para su resolución. Tomando como referente este trabajo, entendemos que las dificultades detectadas en los estudios 1 y 2 para dar significado a una misma incógnita cuando esta aparece en ambos miembros, están asociadas a la diferente concepción de la igualdad, como la expresión de una equivalencia en vez de como el resultado de una cadena de operaciones, que se hace necesaria para comprender estas ecuaciones. La necesidad de operar con la incógnita también se presenta cuando la letra aparece repetida únicamente en un miembro de la ecuación (como en algunas de las expresiones del estudio 1), sin embargo los estudiantes dieron significado con éxito a la letra en estas expresiones.

Esta conclusión pone de manifiesto una limitación en la comprensión de las expresiones algebraicas asociada a un pensamiento operacional frecuente en contextos aritméticos y que resulta coherente con la tendencia de interpretar las letras como incógnita evidenciada por los estudiantes. Esta tendencia se constata al observar que algunos estudiantes dan valores a una de las variables o añaden una relación entre las letras al abordar la traducción de ecuaciones con dos incógnitas. Como consecuencia, se detecta limitación en la comprensión de las expresiones simbólicas: como procedimientos y no como objetos matemáticos. Entendemos que esta es también la justificación de la presencia de problemas aritméticos en las traducciones realizadas por estudiantes en los estudios 2 y 3, en especial cuando las expresiones dadas presentan alguna de las características que hemos destacado como factores de dificultad.

La inclusión de incógnitas adicionales en los enunciados propuestos por los estudiantes cuando la expresión dada era un sistema, la omisión de una de las ecuaciones del sistema, y las dificultades asociadas a la presencia de coeficientes superiores a uno, pueden estar asociadas no solo a falta de comprensión de este tipo de expresiones sino también a limitación en la competencia lingüística del alumno. Se hace necesario indagar de forma específica en la comprensión de situaciones modelizables mediante estos tipos de expresiones para poder discernir si la dificultad está asociada a la comprensión de las relaciones cuantitativas que se establecen entre las cantidades, a la forma en que estas se representan en el simbolismo algebraico, o a la expresión verbal de las mismas.

Los estudios 2 y 3 aportan información sobre el significado que asignan los estudiantes a las operaciones aditivas y multiplicativas contenidas en las expresiones. En la mayoría de los enunciados propuestos los estudiantes aluden a contextos no matemáticos, como se les solicitaba, aunque entre un 15 % y un 25 % de los alumnos proponen problemas de teoría de números o problemas en los que aluden solo parcialmente a un contexto no matemático, no dando significado a las operaciones.

Los problemas propuestos por los estudiantes del grado de Magisterio presentan una mayor variedad de significados para las operaciones multiplicativas, lo cual era esperable dado que en el curso anterior habían trabajado la invención de problemas aritméticos y los diferentes significados de las operaciones. En los estudiantes de 4.º de ESO se echa en falta la consideración de contextos de área, contextos que les hubieran facilitado dar significado a las ecuaciones que incluyen producto de variables. En ambos estudios se detecta un predominio de situaciones aditivas de combinación o cambio, con escasa presencia de la comparación aditiva. La comparación multiplicativa resulta más frecuente en los problemas propuestos por estudiantes de educación secundaria.

Esta ausencia y baja frecuencia de significados concretos de algunas de las operaciones merecen ser destacadas por las limitaciones en el conocimiento de los estudiantes que ponen de manifiesto, haciendo necesario que se dirija una mayor atención a las mismas durante su enseñanza. Al igual que se hace en la formación de maestros, sería conveniente utilizar la tarea de invención de problemas como actividad de aula que ayude a conectar los conceptos matemáticos y sus representaciones, con las situaciones o fenómenos que modelizan. Así mismo, ayudar a los alumnos a identificar las tipologías de situaciones asociadas a las diferentes operaciones es relevante para poder dotar de significado al simbolismo algebraico. A partir de la comparación de los resultados del estudio 2 y 3, realizado con estudiantes de 4.º de ESO y estudiantes de segundo curso del Grado de Maestro en Educación Primaria, consideramos que este conocimiento puede explicar el mayor porcentaje de éxito de los alumnos universitarios, dado que ambos grupos tenían una formación algebraica semejante, más reciente en el caso de los alumnos de 4.º.

Los resultados que aportan estos estudios son descriptivos de la comprensión que desarrollan los estudiantes como resultado de la formación algebraica que reciben durante su educación secundaria obligatoria. Concretamente, se ha obtenido información sobre su comprensión de las expresiones simbólicas de forma global y de sus componentes (signos operacionales y letras), así como de conceptos que subyacen a estas representaciones (como las operaciones multiplicativas). En ocasiones queda la duda de si las limitaciones detectadas en el conocimiento de los estudiantes están asociadas a la representación utilizada o están evidenciando una limitación en su comprensión de los conceptos que subyacen, dejando cuestiones abiertas a explorar en futuras investigaciones. Se evidencia así la complejidad de la interacción entre las representaciones y los conceptos representados, en tanto que la comprensión de una representación está asociada pero no es equivalente a la de dichos conceptos.

Los resultados presentados también permiten extraer algunas recomendaciones para la enseñanza del álgebra al identificar tipos de expresiones simbólicas o características de las mismas a las que, aun al fin de su formación obligatoria en álgebra, los estudiantes no dotan de significado con éxito.

Referencias

[1] A. Arcavi, Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics* **14**(3) (1994), 24–35.

[2] A. Arcavi, El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos, *Números y álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores* (I. Vale, T. Pi-

mentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro, eds.), 29–47, SPCE, Caminha, Portugal, 2006.

[3] Boletín Oficial del Estado, Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, *B.O.E.* **5** (2006), 677–773.

[4] M. J. Bossé, K. Adu-Gyamfi y M. R. Cheetham, Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings, *International Electronic Journal of Mathematics Education* **6**(3) (2011), 113–133.

[5] M. C. Cañadas, E. Castro y E. Castro, Description of a procedure to identify strategies: the case of the tiles problem, *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, eds.), vol. 2, 257–264, Cinvestav-UMSNH, Morelia, México, 2008.

[6] M. C. Cañadas y P. Gómez, *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD*, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 2012; documento no publicado.

[7] M. C. Cañadas, M. Molina y A. del Río, *Analysis of secondary students' understanding of algebraic symbolism through problem posing*, en elaboración.

[8] E. Castro, *Didáctica de la matemática en la educación primaria*, Síntesis, Madrid, España, 2008.

[9] E. Castro, La invención de problemas y sus ámbitos de investigación, *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz, eds.), 1–16, Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 2011; disponible en `http://funes.uniandes.edu.co/2015/`.

[10] E. Castro, Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar, *Investigación en Educación Matemática. Actas del XVI Simposio de la SEIEM (Baeza, Jaén, 2012)* (A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, L. Ordóñez, eds.), 75–94, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

[11] E. Castro y E. Castro, Representaciones y modelización, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (L. Rico, ed.), 95–124, Horsori, Barcelona, España, 1997.

[12] Y. Dede, Interpretation of the first-degree equations: A study on freshmen students in education faculty, *Cumhuriyet University Social Sciences Journal* **29**(2) (2005), 197–205.

[13] R. Duval, *Sémiois et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berna, 1995.

[14] E. Fernández-Millán, *Invención de problemas por estudiantes de secundaria: evaluación de su conocimiento sobre simbolismo algebraico*, trabajo fin de máster, Universidad de Granada, Granada, 2013; disponible en `http://funes.uniandes.edu.co/2148/`.

[15] E. Fernández-Millán y M. Molina, ¿Qué significa una expresión simbólica para un estudiante al término de la educación secundaria obligatoria? Una respuesta desde la invención de problemas, *prepublicación*.

[16] E. Filloy y T. Rojano, Solving equations: The transition from arithmetic to algebra, *For the learning of Mathematics* **9**(2) (1989), 19–25.

[17] E. Filloy y T. Rojano, Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa, *Proceedings of the thirteenth Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (R. Underhill, ed.), vol. 2, 29–35, PME, Blacksburg, 1991.

[18] H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[19] A. Friedlander y M. Tabach, Promoting multiple representations in algebra, *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (A. A. Cuoco, ed.), 173–185, National council of teachers of mathematics, Reston, Virginia, 2001.

[20] A. Gallardo y T. Rojano, Difficulties areas in the acquisition of the arithmetic-algebraic language, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9**(2) (1988), 155–188.

[21] G. Goldin, Representation in mathematical learning and problem solving, *Handbook of international research in mathematics education* (L. English, ed.), 197–218, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 2002.

[22] P. Gómez, *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*, Universidad de Granada, Granada, 2007; disponible en `http://funes.uniandes.edu.co/444/`.

[23] C. Isik y T. Kar, The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations, *Australian Journal of Teacher Education* **37**(9) (2012), 93–113.

[24] C. Janvier, Translation processes in mathematics education, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (C. Janvier, ed.), 33–40, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1987.

[25] J. Kaput, Technology and mathematics education, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (D. A. Grouws, ed.), 515–556, MacMillan, Nueva York, 1992.

[26] C. Kieran, Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (F. K. Lester, ed.), 707–762, Information Age Publishing, Charlotte, NC, 2007.

[27] J. Mason, When is a symbol symbolic?, *The Learning of Mathematics* **1** (1980), 8–12.

[28] J. Mestre, Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing, *Applied Developmental Psychology* **23** (2002), 9–50.

[29] J. M. Mitchell, Interactions between natural language and mathematical structures: the case of “wordwalking”, *Mathematical Thinking and Learning* **3**(1) (2001), 29–52.

[30] M. J. Nathan y K. R. Koedinger, Teachers’ and researchers’ beliefs about the development of algebraic reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education* **31** (2000), 168–190.

[31] NCTM, *Principios y estándares para la educación matemática*, traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

[32] L. Radford, On signs and representations. A cultural account, *Scientia Paedagogica Experimentalis* **35** (1998), 277–302.

[33] L. B. Resnick, E. Cauzinille-Marmeche y J. Mathieu, Understanding algebra, *Cognitive processes in Mathematics* (J. A. Sloboda y D. Rogers, eds.), Clarendon Press, Oxford, 1987.

[34] L. Rico, Los organizadores del currículo de matemáticas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (L. Rico, ed.), 39–60, Horsori, Barcelona, 1997.

[35] L. Rico, Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, *PNA* **4**(1) (2009), 1–14.

[36] S. Rodríguez-Domingo, *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*, trabajo fin de máster, Universidad de Granada, Granada, 2011; disponible en `http://funes.uniandes.edu.co/1751/`.

[37] S. Rodríguez-Domingo, M. Molina, M. C. Cañadas y E. Castro, Traducción de enunciados algebraicos en un torneo con un dominó algebraico; comunicación presentada en el *Seminario de Investigación del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (XVI Simposio de la SEIEM)*, Baeza, 2012; disponible en `http://funes.uniandes.edu.co/2088/`.

[38] S. Rodríguez-Domingo, M. Molina, M. C. Cañadas y E. Castro, Secondary school students’ errors in the translation of algebraic statements, *prepublicación*.

[39] M. Socas, Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (L. Rico, coord.), 125–154, Horsori, Barcelona, 1997.

[40] J. L. Villegas, *Representaciones en resolución de problemas: un marco de análisis de protocolos*, trabajo de investigación tutelada, Universidad de Granada, Granada, 2002.

Marta Molina, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: `martamg@ugr.es`