Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 18 (2015), Núm. 2, Pág. 300

La sucesión de Rowland

En 2008, E. S. Rowland probó (A natural prime-generating recurrence, *J. Integer Seq.* **11**, no. 2, Article 08.2.8) que la sucesión dada por

$$a_k = a_{k-1} + \mathrm{mcd}(k, a_{k-1}), \qquad a_1 = 7,$$

cumple que $a_k - a_{k-1}$ es 1 o un número primo para cualquier $k > 1$. Damos una demostración breve de este resultado.

Para ello, introducimos las sucesiones auxiliares

$$c_n = c_{n-1} + \mathrm{mfp}(c_{n-1}) - 1, \qquad c_1 = 5 \qquad \text{y} \qquad r_n = \frac{c_n + 1}{2},$$

donde $\mathrm{mfp}(\cdot)$ indica el menor factor primo. Definimos además una tercera sucesión con $x_1 = 7$, $x_2 = 8$ y $x_k = c_n + k + 1$ para $k \in [r_n, r_{n+1})$, $n \geq 1$. Es muy fácil ver que

$$x_k - x_{k-1} = \begin{cases} \mathrm{mfp}(c_{n-1}) & \text{si } k = r_n \text{ para } n > 1, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

Para terminar la prueba, basta comprobar $x_k = a_k$, lo cual equivale a obtener que el segundo miembro de (1) es $\mathrm{mcd}(k, x_{k-1})$. Si $k \in (r_n, r_{n+1}]$,

$$\mathrm{mcd}(k, x_{k-1}) = \mathrm{mcd}(k, c_n + k) = \mathrm{mcd}(2k, c_n) = \mathrm{mcd}(2(k - r_n) + 1, c_n),$$

donde se ha usado que c_n es impar. Como $2(k - r_n) + 1$ recorre los impares en orden ascendente, el miembro de la derecha vale 1 hasta que

$$2(k - r_n) + 1 = \mathrm{mfp}(c_n) = c_{n+1} - c_n + 1 = 2(r_{n+1} - r_n) + 1,$$

es decir, $k = r_{n+1}$.

Si P es el producto de los primos menores que N, tomando n tal que $c_n < P < c_{n+1} + 1 = c_n + \mathrm{mfp}(c_n)$, se sigue que necesariamente $\mathrm{mfp}(c_n) \nmid P$, y por tanto con $a_k - a_{k-1}$ se generan primos arbitrariamente grandes, esto es, infinitos primos distintos.

Esta miniatura está basada en: F. Chamizo, D. Raboso y S. Ruiz-Cabello, On Rowland's sequence, *Electron. J. Combin.* **18** (2011), no. 2, Paper 10.

Fernando Chamizo y Carlos Pastor, Universidad Autónoma de madrid e ICMAT
Correo electrónico: `fernando.chamizo@uam.es`, `carlos.pastor@icmat.es`
Página web: `http://www.uam.es/fernando.chamizo`