La Gaceta de la RSME, Vol. 18 (2015), Núm. 3, Págs. 543–554

Sobre el problema 16 de Hilbert

por

Jaume Llibre

Resumen. Presentamos un breve resumen de algunos resultados recientes sobre la segunda parte del problema 16 de Hilbert, poniendo un especial énfasis en los ciclos límite algebraicos.

1. Introducción

En este breve resumen únicamente consideramos ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

donde P y Q son polinomios de grado a lo más d. Recordemos que un *ciclo límite* de la ecuación diferencial (1) es una órbita periódica de esta ecuación aislada en el conjunto de todas las órbitas periódicas de la ecuación.

La noción de ciclo límite apareció entre los años 1891 y 1897 en los trabajos de Poincaré, quien demostró que una ecuación diferencial polinomial (1) sin conexiones entre sus sillas tenía un número finito de ciclos límite [31].

Hilbert [15], en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, propuso una lista de 23 problemas relevantes que a su entender tenían que ser resueltos durante el siglo XX. El problema 16 de esta lista, tal como lo anunció Hilbert, es:

> 16. *Problema de la topología de las curvas algebraicas y superficies.*
>
> *El número máximo de ramas cerradas y separadas que puede tener una curva algebraica de grado n fue determinado por Harnack. Aparece la siguiente cuestión: ¿cuál es la posición relativa de estas ramas en el plano? Para las curvas de grado* 6 *yo mismo he visto —después de un complicado proceso— que pueden aparecer* 11 *ramas de acuerdo con Harnack, pero en modo alguno todas las ramas pueden ser externas respecto a otra rama, sino que debe existir una rama en cuyo interior haya otra rama y en cuyo exterior haya nueve ramas, o a la inversa. Una investigación de las posiciones relativas de las ramas separadas cuando su número sea máximo me parece de gran interés, y no menos la investigación del número, forma, y posición de las hojas de una superficie algebraica en el espacio. Hasta ahora no se conoce el número máximo de hojas que una superficie de grado* 4 *en un espacio de dimensión tres pueda tener.*

> *Conectado con este problema puramente algebraico, deseo formular la siguiente cuestión que, me parece, debe ser atacada por el mismo método de variación continua de los coeficientes y cuya respuesta es valiosa para conocer la topología de las familias de curvas definidas por las ecuaciones diferenciales. Esta cuestión es la del número máximo y posición de los ciclos frontera de Poincaré (ciclos límite) para una ecuación diferencial de primer orden y grado de la forma*
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$
>
> *donde X y Y son funciones racionales de grado n en x e y. Escritas homogéneamente,*
>
> $$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$
>
> *donde X, Y y Z son funciones racionales homogéneas de grado n en x, y, z, y estas últimas tienen que ser determinadas como funciones del parámetro t.*

Esta claro que el problema 16 de Hilbert está formulado en dos partes. La primera trata sobre la disposición mutua del número máximo de ramas separadas de una curva algebraica y su extensión a variedades algebraicas reales no singulares. En la segunda parte se pregunta por el número máximo y la posición relativa de los ciclos límite de la ecuación diferencial (1). La primera parte del problema 16 de Hilbert es estudiada por los investigadores en geometría algebraica real, mientras que la segunda es analizada por los matemáticos que trabajan en sistemas dinámicos o en ecuaciones diferenciales. Hilbert también señaló que deben existir conexiones entre estas dos partes. Algunas de estas conexiones se describen en la memoria sobre el problema 16 de Hilbert escrita por Jibin Li [22].

En lo que sigue, cuando hablemos sobre el problema 16 de Hilbert siempre nos referiremos a su segunda parte.

En 1988 Noel Lloyd [28] observó sobre el problema 16 de Hilbert que *es un problema con hipótesis algebraicas, mientras que su conclusión es topológica*.

Arnold en 1977 y 1983 (ver [1] y [2], respectivamente) estableció una variante del problema que ahora se conoce como *el problema* 16 *débil, infinitesimal o tangencial de Hilbert* y que aquí no consideraremos, pero hay excelentes memorias sobre este problema modificado (véase por ejemplo la memoria de Ilyashenko sobre el problema 16 de Hilbert [18], o la ya mencionada memoria de Jibin Li [22], o el libro de Christopher y Chengzhi Li [7], o la memoria debida a Kaloshin [20], o la de Yakovenko [38], o el trabajo más reciente de Binyamini, Novikov y Yakovenko [4], etc.).

De acuerdo con Smale [34], excepto por la hipótesis de Riemann, la segunda parte del problema 16 parece ser el más difícil de los problemas propuestos por Hilbert. Smale estableció la siguiente versión más moderna de la segunda parte del problema 16 de Hilbert:

> *Consideremos la ecuación diferencial polinomial* (1) *en* $\mathbb{R}^2$. *¿Existe una cota* K *para el número de ciclos límite de la forma* $K \leq d^q$, *donde* d *es el máximo de los grados de* P *y* Q *y* q *es una constante universal?*

Las posibles distribuciones o configuraciones topológicas de los ciclos límite mencionados como posiciones por Hilbert también han interesado a muchos autores. Coleman, en su trabajo [9] sobre el problema 16 de Hilbert, ha dicho: *para* $d > 2$ *el número máximo de nidos de ciclos límite no es conocido, y tampoco se conocen las distintas configuraciones de estos nidos.* Aquí un «nido» significa un conjunto de ciclos límite encerrando el mismo conjunto de puntos singulares o de equilibrio de la ecuación diferencial. Veremos más adelante que ahora sí conocemos las configuraciones topológicas de los ciclos límite que son realizables por las ecuaciones diferenciales polinomiales.

Otro problema muy relacionado con el problema 16 de Hilbert es el del estudio de las posibles bifurcaciones de los ciclos límite. De nuevo este problema no será considerado en esta memoria (véase una buena información sobre el mismo en la memoria de Jibin Li, o en los libros de Christopher y Chengzhi Li, de Yankian Ye [39] o de Zhifen Zang et al. [40]).

Nuestra aproximación al problema 16 de Hilbert la haremos a través de los siguientes siete problemas:

Problema 1. *¿Es cierto que la ecuación diferencial polinomial* (1) *tiene un número finito de ciclos límite?*

Problema 2. *¿Es cierto que el número de ciclos límite de la ecuación diferencial polinomial* (1) *está acotado por una constante que solo depende del grado de los polinomios* P *y* Q*?*

Si el problema 2 tiene una respuesta positiva, entonces la cota se denota por $H(d)$, y se le llama *número de Hilbert* para las ecuaciones diferenciales polinomiales de grado d.

Problema 3. *Si el problema 2 tiene una respuesta positiva, proporcionar una cota superior para* $H(d)$.

Smale [34] dijo en 1998 que el problema 16 de Hilbert es demasiado difícil y que primero debemos resolverlo para una clase de ecuaciones diferenciales polinomiales más sencillas, y propuso estudiar el problema restringido a las *ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard*, esto es a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = -x, \tag{2}$$

donde $F(x)$ es un polinomio en la variable x de grado d.

Problema 4. *Resolver los problemas 2 y 3 restringidos a las ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard* (2).

Para las ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard no mencionamos el problema 1 puesto que, como veremos, este problema ha sido resuelto positivamente para todas las ecuaciones diferenciales polinomiales (1).

Problema 5. *¿Qué configuraciones topológicas de ciclos límite son realizables en las ecuaciones diferenciales polinomiales* (1)*?*

Un *ciclo límite algebraico* es un óvalo de una curva algebraica que es un ciclo límite para una ecuación diferencial polinomial.

Problema 6. *¿Es cierto que el número de ciclos límite algebraicos de una ecuación diferencial polinomial* (1) *está acotado por una constante dependiendo solo del grado de los polinomios P y Q?*

Si el problema 6 tiene una respuesta positiva entonces su cota se denota $H^a(d)$, y la llamaremos *número de Hilbert algebraico* para las ecuaciones diferenciales polinomiales de grado d.

Problema 7. *Si el problema 6 tiene una respuesta positiva, proporcionar una cota superior de $H^a(d)$.*

Los primeros cuatro problemas han sido tratados por varios autores (véanse por ejemplo las memorias de Ilyashenko y de Jibin Li). Aquí pasaremos rápidamente por estos cuatro primeros problemas y nos dedicaremos más a los tres últimos, que hasta el momento no han sido considerados en otras memorias sobre el problema 16 de Hilbert.

2. Problema 1

Dulac [11] afirmó en 1923 que cualquier ecuación diferencial polinomial (1) siempre tiene un número finito de ciclos límite. Ilyashenko [16] en 1985 encontró un error en el trabajo de Dulac. Más tarde se publicaron dos largos trabajos, hechos independientemente, que probaban la afirmación de Dulac; uno se debe a Écalle [13] en 1992 y el otro a Ilyashenko [17] en 1991. Como mencionó Smale en [34], estos dos trabajos aún no han sido digeridos por la comunidad matemática que trabaja en los ciclos límite.

En 1986 Bamon [3] probó que cualquier ecuación diferencial polinomial de grado 2 tiene un número finito de ciclos límite. Su demostración utiliza resultados previos de Ilyashenko.

Del trabajo de Dulac [11] se sigue que si una ecuación diferencial polinomial tiene todas sus conexiones entre sillas formando lazos homoclínicos o heteroclínicos simples, entonces la ecuación diferencial tiene un número finito de ciclos límite (véase para más detalles el bonito trabajo de Sotomayor [35]). Aquí un *lazo homoclínico* o *heteroclínico* está formado por $k = 1$ o $k > 1$ sillas (eventualmente algunas de estas sillas pueden estar repetidas) y k distintas separatrices conectando estas sillas y formando un lazo (eventualmente algunos puntos de este lazo pueden estar identificados en una silla repetida) de manera que al menos en uno de los dos lados del lazo esté definida la aplicación de retorno de Poincaré. Sean $\mu_i < 0 < \lambda_i$ los valores propios de estas sillas. Si

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \neq 1,$$

entonces el lazo se llama *simple*.

3. Problema 2

Puesto que las ecuaciones diferenciales polinomiales de grado 1, o sistemas diferenciales lineales, no tienen ciclos límite, se sigue que el número de Hilbert $H(1) = 0$.

Lamentablemente no conocemos si existe una cota uniforme para el número máximo de ciclos límite que pueden tener las ecuaciones diferenciales polinomiales de grado d cuando $d \geq 2$.

4. Problema 3

Puesto que el problema 2 permanece abierto para grado $d \geq 2$, no sabemos si el número de Hilbert $H(d)$ existe cuando $d \geq 2$.

En 1957 Petrovskii y Landis [29] afirmaron que las ecuaciones diferenciales polinomiales de grado $d = 2$ tenían a lo más 3 ciclos límite, esto es, que el número de Hilbert $H(2) = 3$. Pronto (en 1959) los mismos autores encontraron un error en sus argumentos (véase [30]). Más tarde Lan Sun Chen y Ming Shu Wang [5], en 1979, y Songling Shi [33], en 1982, proporcionaron ecuaciones diferenciales polinomiales de grado 2 con 4 ciclos límite, y por consiguiente mostraron que $H(2) \geq 4$.

Se han dado algunas cotas inferiores para el número de Hilbert $H(d)$, principalmente por Christopher y Lloyd [8] y Jibin Li (véase la memoria de este último autor donde analiza estas cotas).

5. Problema 4

El estudio de los ciclos límite de las ecuaciones diferenciales de Liénard (no necesariamente polinomiales) tiene una larga historia y se conocen bastantes resultados sobre los mismos (véase por ejemplo el libro [40]).

Si $F(x) = x^3 - x$, entonces la ecuación diferencial de Liénard (2) es la famosa ecuación diferencial de van der Pol, que tiene a lo más un ciclo límite.

Van der Pol en 1926, Liénard en 1928 y Andronov en 1929 probaron que la solución periódica de un oscilador auto-sostenido en un tubo vacío (sin aire) era un ciclo límite en el sentido definido por Poincaré. Después de esta observación de la existencia de ciclos límite en la naturaleza, la existencia, no existencia, unicidad y otras propiedades de los ciclos límite fueron intensamente estudiadas no solo ya por los matemáticos, que ya estaban motivados por los trabajos de Poincaré y Hilbert, sino también por los físicos, y más tarde por los químicos, biólogos, economistas, y muchos otros. Los ciclos límite empezaban a ser importantes en las ciencias.

Para las ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard de grado d, la existencia de una cota uniforme para el número máximo de ciclos límite sigue siendo un problema abierto. Pero cuando el grado d de estos sistemas es impar, Ilyashenko y Panov en [19] obtuvieron una cota uniforme para el número máximo de ciclos límite en la subclase de ecuaciones tales que el polinomio $F(x)$ es mónico y sus coeficientes satisfacen ciertas estimaciones.

En 1977 Lins, de Melo y Pugh conjeturaron en [23] que las ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard de grado $d \geq 3$ tienen a lo más $[(d-1)/2]$ ciclos límite, donde $[(d-1)/2]$ denota el mayor entero menor o igual a $(d-1)/2$. Además proporcionaron ejemplos de ecuaciones de Liénard de cualquier grado $d \geq 3$ que tenían al menos $[(d-1)/2]$ ciclos límite. También probaron que su conjetura era cierta cuando $d = 3$. No es difícil mostrar que su conjetura también es cierta para los grados $d = 1, 2$.

En 2007 Dumortier, Panazzolo y Roussarie [12] dieron un contraejemplo a la conjetura de Lins, de Melo y Pugh cuando $d = 7$, y mencionaron que su contraejemplo se puede extender a grados $d \geq 7$ impares. Recientemente, de Maesschalck y Dumortier [10] han probado en 2011 que hay ecuaciones de Liénard de grado $d \geq 6$ que tienen $[(d-1)/2] + 2$ ciclos límite. En estos dos últimos trabajos los resultados se prueban usando la teoría de perturbación singular, y los autores trabajan con soluciones de oscilación y relajación para estudiar el número de ciclos límite.

Chengzhi Li y Llibre [21] mostraron en 2012 que la conjetura de Lins, de Melo y Pugh se verifica para las ecuaciones diferenciales polinomiales de Liénard de grado $d = 4$. Por lo tanto, en estos momentos solo queda abierta la conjetura cuando el grado $d = 5$.

6. Problema 5

Una *configuración topológica de ciclos límite* es un conjunto finito $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ de curvas disjuntas simples del plano tales que $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Dada una configuración topológica de ciclos límite, la curva C_i es *primaria* si no existe ninguna curva C_j de C contenida en la región acotada limitada por C_i.

Dos configuraciones topológicas de ciclos límite $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ y $C' = \{C'_1, \ldots, C'_m\}$ son (*topológicamente*) *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h\left(\cup_{i=1}^{n} C_i\right) = \left(\cup_{i=1}^{m} C'_i\right)$. Claro está, para dos configuraciones equivalentes de ciclos límite C y C' tenemos que $n = m$.

Decimos que una ecuación diferencial polinomial (1) *realiza* la configuración de ciclos límite C si el conjunto de todos los ciclos límite de (1) es equivalente a C.

En 2004 Llibre y Rodríguez [26] probaron el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sea $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ una configuración de ciclos límite y sea r su número de curvas primarias. Entonces se verifican las dos afirmaciones siguientes:*

(a) La configuración C se realiza para alguna ecuación diferencial polinomial.

(b) La configuración C se realiza con ciclos límite algebraicos para alguna ecuación diferencial polinomial de grado $\leq 2(n+r)-1$. Además, esta ecuación diferencial polinomial tiene una integral primera de tipo Darboux.

Claro está, la afirmación (a) del teorema 1 se sigue inmediatamente de la afirmación (b).

La afirmación (a) del teorema 1 fue resuelta por primera vez por Schecter y Singer [32] y Sverdlove [36], pero no proporcionaron una ecuación diferencial polinomial explícita satisfaciendo la configuración de ciclos límite dada, mientras que en la demostración de la afirmación (b) del teorema 1 se da explícitamente una ecuación diferencial polinomial.

Si $f = f(x, y)$ es un polinomio, denotamos sus derivadas parciales con respecto a las variables x e y como f_x e f_y, respectivamente. Christopher [6] demostró en 2001 el resultado siguiente.

Teorema 2. *Sea $f = 0$ una curva algebraica no singular de grado m, y sea D un polinomio de grado uno de manera que la recta $D = 0$ no tenga intersección con las componentes acotadas de $f = 0$. Si elegimos las constantes α y β de manera que $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$, entonces todas las componentes acotadas de $f = 0$ son ciclos límite hiperbólicos de la ecuación diferencial polinomial*

$$\dot{x} = \alpha f - D f_y, \qquad \dot{y} = \beta f + D f_x,$$

de grado m, y esta ecuación diferencial no tiene otros ciclos límite.

El teorema 2 mejora un resultado similar de Winkel [37], pero la ecuación diferencial polinomial de Winkel tiene grado $2m - 1$.

Dada una configuración topológica de n ciclos límite formada por circunferencias, consideremos la curva algebraica formada por la unión de todas las circunferencias. Su ecuación es $f = 0$, donde f es el producto de los polinomios que definen cada una de las circunferencias. Aplicando el teorema 2 a la curva $f = 0$, obtenemos una ecuación diferencial polinomial de grado $2n$ que realiza la configuración topológica dada de n ciclos límite. Una diferencia entre los teoremas 1 y 2 es que las ecuaciones diferenciales polinomiales que aparecen en el primero siempre tienen una integral primera, mientras que las ecuaciones del segundo no tienen, en general, integrales primeras.

En resumen, ambos teoremas muestran que cualquier configuración topológica de ciclos límite es realizable con ciclos límite algebraicos para alguna ecuación diferencial polinomial, y proporcionan el grado de estas ecuaciones. Pero hay muchas cuestiones que permanecen abiertas, por ejemplo: *¿cuáles son todas las posibles configuraciones topológicas de ciclos límite realizables por las ecuaciones diferenciales de un grado dado?* Claro está que esta cuestión es mucho más difícil que la cuestión de proporcionar una cota uniforme del número máximo de ciclos límite que las ecuaciones diferenciales polinomiales de un grado dado puedan tener.

7. Problemas 6 y 7

Asociado a la ecuación diferencial polinomial (1) tenemos el *campo de vectores polinomial*

$$\mathcal{X} = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3}$$

Denotemos, como es usual, por $\mathbb{R}[x, y]$ el anillo de todos los polinomios en las variables x e y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Para $f \in \mathbb{R}[x, y]$, se dice que la curva algebraica $f(x, y) = 0$ de $\mathbb{R}^2$ es una *curva algebraica invariante* del campo de vectores polinomial $\mathcal{X}$, o de la ecuación diferencial polinomial (1), si para algún polinomio $K \in \mathbb{R}[x,y]$ tenemos

$$\mathcal{X}f = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{4}$$

Al polinomio K se le llama el *cofactor* de la curva algebraica invariante $f = 0$.

Puesto que en los puntos de una curva algebraica $f = 0$ el gradiente de la curva, $(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$, es ortogonal al campo de vectores $\mathcal{X}$ (obsérvese la ecuación (4)), el campo de vectores $\mathcal{X}$ es tangente a la curva. Por lo tanto la curva $f = 0$ está formada por órbitas del campo de vectores $\mathcal{X}$. Esto justifica el nombre de curva algebraica invariante dado a una curva algebraica $f = 0$ que satisface (4) para algún polinomio K, puesto que es *invariante* por el flujo definido por el campo de vectores $\mathcal{X}$.

El resultado siguiente es bien conocido y nos dice que podemos restringir nuestra atención a las curvas algebraicas invariantes irreducibles (una demostración de este resultado se encuentra, por ejemplo, en [24]).

PROPOSICIÓN 3. *Supongamos que $f \in \mathbb{R}[x,y]$ y sea $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}$ su factorización en polinomios irreducibles sobre $\mathbb{R}[x,y]$. Entonces $f = 0$ es una curva algebraica invariante para el campo de vectores polinomial $\mathcal{X}$ con cofactor K_f si y solo si $f_i = 0$ es una curva algebraica invariante para cada $i = 1, \ldots, r$ con cofactor K_{f_i}. Además, $K_f = n_1 K_{f_1} + \cdots + n_r K_{f_r}$.*

Consideremos el espacio Σ' de todos los campos de vectores polinomiales (3) de grado d que tengan curvas algebraicas irreducibles invariantes. Una versión más simple de la segunda parte del problema 16 de Hilbert es: *¿Existe una cota uniforme para el número máximo de ciclos límite algebraicos que pueda tener un campo de vectores polinomial de Σ'?* Ahora no podemos proporcionar una respuesta a esta cuestión para curvas algebraicas invariantes cualesquiera, pero tenemos una respuesta para la siguiente clase de curvas algebraicas.

Decimos que el conjunto $f_j = 0$, con $j = 1, \ldots, k$, de curvas algebraicas irreducibles es *genérico* si satisface las siguientes cinco condiciones:

(i) No existen puntos en los que f_j y sus primeras derivadas se anulen (esto es, $f_j = 0$ es una curva algebraica sin puntos singulares).

(ii) Los términos homogéneos de mayor grado de f_j no tienen factores repetidos.

(iii) Si dos curvas se cortan en un punto del plano afín, lo hacen transversalmente (esto es, sus tangentes en este punto son distintas).

(iv) En un punto del plano afín no se cortan más de dos curvas $f_j = 0$.

(v) No hay dos curvas que tengan un factor común en sus términos homogéneos de mayor grado.

El siguiente resultado fue demostrado en 2010 por Llibre, Ramírez y Sadovskaia [25].

TEOREMA 4. *Para un campo de vectores polinomial $\mathcal{X}$ de grado $d \geq 2$ cuyas curvas algebraicas invariantes sean todas genéricas, el número de ciclos límite algebraicos* *es, a lo más,*

$$\begin{array}{ll} 1+\dfrac{(d-1)(d-2)}{2} & \text{si } d \text{ es par,} \\ \dfrac{(d-1)(d-2)}{2} & \text{si } d \text{ es impar.} \end{array}$$

Además estas cotas se alcanzan.

Para los campos de vectores polinomiales de grado 3 que tengan todas sus curvas algebraicas invariantes genéricas, el teorema 4 dice que uno es el número máximo de ciclos algebraicos límite, pero hay ejemplos de campos de vectores polinomiales de grado 3 que tienen dos ciclos algebraicos límite. Claro está que no todas las curvas algebraicas invariantes de esos campos de vectores son genéricas. Así, la ecuación diferencial polinomial de grado 3

$$\dot{x} = 2y(10+xy), \quad \dot{y} = 20x + y - 20x^3 - 2x^2y + 4y^3$$

tiene dos ciclos algebraicos límite contenidos en la curva algebraica invariante de ecuación $2x^4 - 4x^2 + 4y^2 + 1 = 0$ (ver la proposición 19 de [27]).

Todos los campos de vectores polinomiales conocidos hasta ahora que tienen curvas algebraicas no genéricas y más ciclos límite algebraicos de los previstos en el teorema 4 para el caso genérico son de grado impar, y a lo más tienen un ciclo límite más que la cota superior dada en el teorema 4. Por ello en [25] hicimos la siguiente conjetura.

Conjetura 1. *El número de Hilbert algebraico es*

$$H^a(d) = 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

La versión más fácil de esta conjetura es su restricción a los campos de vectores polinomiales de grado 2.

Conjetura 2. $H^a(2) = 1$.

Notemos que ambas conjeturas son ciertas cuando d es par y nos restringimos a los ciclos límite algebraicos de las curvas algebraicas invariantes genéricas.

Un resultado interesante sobre los ciclos límite de una ecuación diferencial de clase C^1 en el plano es el que recogemos en el siguiente (teorema 5), debido a Giacomini, Llibre y Viano [14] (véase una demostración más fácil en [26]). Este resultado se ha usado en las demostraciones de los teoremas 1 y 4. Primero necesitamos una definición.

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Una función $V : U \to \mathbb{R}$ es un *inverso de factor integrante* de un campo de vectores $\mathcal{X}$ de clase C^1 sobre U si V verifica la ecuación en derivadas parciales

$$P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)V.$$

Teorema 5. *Sea $\mathcal{X}$ un campo de vectores de clase C^1 definido en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sea $V : U \to \mathbb{R}$ un inverso de factor integrante de $\mathcal{X}$. Si γ es un ciclo límite de $\mathcal{X}$, entonces γ está contenido en $\{(x,y) \in U : V(x,y) = 0\}$.*

Agradecimientos

El autor está parcialmente financiado por los proyectos del MINECO MTM2013-40998-P, de AGAUR 2014SGR-568, y de la Unión Europea FP7-PEOPLE-2012-IRSES 318999 y 316338.

Referencias

[1] V.I. Arnold, Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, *Funct. Anal. Appl.* **11** (1977), 85–92.

[2] V.I. Arnold, *Geometric Methods in Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] R. Bamon, Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles, *Int. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **64** (1986), 111–142.

[4] G. Binyamini, D. Novikov y S. Yakovenko, On the number of zeros of Abelian integrals, *Invent. Math.* **181** (2010), 227–289.

[5] Lan Sun Chen y Ming Shu Wang, The relative position, and the number, of limit cycles of a quadratic differential system, *Acta Math. Sinica* **22** (1979), 751–758.

[6] C. Christopher, Polynomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles, *Geom. Dedicata* **88** (2001), 255–258.

[7] C. Christopher y C. Li, *Limit cycles of differential equations*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[8] C.J. Christopher y N.G. Lloyd, Polynomial systems: A lower bound for the Hilbert numbers, *Proc. Royal Soc. London Ser.* **A450** (1995), 219–224.

[9] C.S. Coleman, Hilbert's 16th problem: How many cycles?, *Differential Equation Models, Modules in Applied Mathematics*, Vol. **1**, 279–297, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] P. De Maesschalck y F. Dumortier, Classical Liénard equation of degree $n \geq 6$ can have $[(n-2)/2]+2$ limit cycles, *J. Differential Equations* **250** (2011), 2162–2176.

[11] H. Dulac, Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France* **51** (1923), 45–188.

[12] F. Dumortier, D. Panazzolo y R. Roussarie, More limit cycles than expected in Liénard equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 1895–1904.

[13] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, 1992.

[14] H. Giacomini, J. Llibre y M. Viano, On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, *Nonlinearity* **9** (1996), 501–516.

[15] D. Hilbert, Mathematische Probleme, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. KL.* (1900), 253–297. (Conferencia dictada en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos (París, 1900); hay traducción al inglés en *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902), 437–479, vuelta a publicar en *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **37** (2000), 407–436).

[16] Yu. Ilyashenko, Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations, *Russian Math. Surveys* **40** (1985), 1–49.

[17] Yu. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Math. Monographs **94**, Amer. Math. Soc., 1991.

[18] Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc.* **39** (2002), 301–354.

[19] Yu. Ilyashenko y A. Panov, Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to Liénard equations, *Moscow Math. J.* **1** (2001), 583–599.

[20] V. Kaloshin, Around the Hilbert–Arnold problem, *On finiteness in differential equations and Diophantine geometry*, CRM Monogr. Ser. **24**, 111–162, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.

[21] C. Li y J. Llibre, Uniqueness of limit cycle for Liénard equations of degree four, *J. Differential Equations* **252** (2012), 3142–3162.

[22] J. Li, Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **13** (2003), 47–106.

[23] C. Lins, W. de Melo y C.C. Pugh, On Liénard's equation, *Lecture Notes in Math.* **597** (1977), 335–357.

[24] J. Llibre, Integrability of polynomial differential systems, *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations* (A. Cañada, P. Drabek y A. Fonda, eds.), Elsevier (2004), 437–533.

[25] J. Llibre, R. Ramírez y N. Sadovskaia, On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles, *J. Differential Equations* **248** (2010), 1401–1409.

[26] J. Llibre y G. Rodríguez, Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields, *J. Differential Equations* **198** (2004), 374–380.

[27] J. Llibre y Y. Zhao, Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations, *J. Phys. A.: Math. Theor.* **40** (2007), 14207–14222.

[28] N.G. Lloyd, Limit cycles of polynomial systems, some recent developments, *New Directions in Dynamical Systems* (T. Bedford y J. Swift, eds.), London Math. Soc. Lecture Notes, Vol. **127** (1988), 192–234.

[29] I.G. Petrovskii y E.M. Landis, On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials, *Mat. Sb. N.S.* **43** (1957), 149–168 (en ruso) y *Amer. Math. Soc. Transl.* **14** (1960), 181–200.

[30] I.G. Petrovskii y E.M. Landis, Corrections to the articles "On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q are polynomials" (en ruso), *Mat. Sb. N.S.* **48** (1959), 255–263.

[31] H. Poincaré, Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, I y II, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.

[32] S. Schecter y F. Singer, A class of vectorfields on S^2 that are topologically equivalent to polynomial vectorfields, *J. Differential Equations* **57** (1985), 406–435.

[33] SONGLING SHI, On limit cycles of plane quadratic systems, *Sci. Sin.* **25** (1982), 41–50.

[34] S. SMALE, Mathematical problems for the next century, *Math. Intelligencer* **20** (1998), no. 2, 7–15 (hay traducción en *La Gaceta de la RSME* **3** (2000), núm. 3, 413–434).

[35] J. SOTOMAYOR, *Curvas definidas por equaçoes diferenciais no plano*, 13th Brazilian Mathematics Colloquium, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[36] R. SVERDLOVE, Inverse problems for dynamical systems, *J. Differential Equations* **42** (1981), 72–105.

[37] R. WINKEL, A transfer principle in the real plane from nonsingular algebraic curves to polynomial vector fields, *Geom. Dedicata* **79** (2000), 101–108.

[38] S. YAKOVENKO, Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16th problem, *On finiteness in differential equations and Diophantine geometry*, CRM Monogr. Ser. **24**, 41–109, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.

[39] YANQIAN YE, *Theory of Limit Cycles*, Translations of Math. Monographs, Vol. **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[40] ZHIFEN ZHANG, TONGREN DING, WENZAO JUANG Y ZHENXI DONG, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Translations of Math. Monographs, Vol. **101**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

JAUME LLIBRE, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES. UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, BELLATERRA, 08193 BARCELONA

Correo electrónico: `jllibre@mat.uab.cat`