Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 18 (2015), Núm. 3, Pág. 568

Una serie que converge a un número irracional

Vamos a probar aquí que para todo entero b mayor que 1, la serie

$$S_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{b^n}$$

converge a un número irracional donde $\pi(n) = \operatorname{card}\{p \leq n : p \text{ es primo}\}$. La serie es claramente convergente sin más que usar que $\pi(n) \leq n$.

Dividiendo la serie entre b tenemos que

$$S_b/b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{b^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n-1)}{b^n},$$

con lo cual

$$(1 - 1/b)S_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{b^n},$$

donde $\varepsilon_n = 1$ si n es primo y $\varepsilon_n = 0$ si n no es primo.

Por otra parte, es bien conocido que un número es irracional si y sólo si su expresión decimal es finita o periódica. Y eso es cierto no sólo cuando el desarrollo del número está escrito en base 10, sino en una base b cualquiera. La irracionalidad de $(1 - 1/b)S_b$, y por tanto la de S_b, la deducimos observando que $(1 - 1/b)S_b$ se escribe en base b de la forma

$$(1 - 1/b)S_b = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ldots = 0.01101010001 \ldots$$

y que esta expresión no es finita ni periódica, dado que hay infinitos unos (infinitos primos) y huecos de ceros de longitud arbitrariamente grande. Una manera sencilla de justificar esto último consiste en observar que ninguno de los números consecutivos $m! + 2, m! + 3, m! + 4, \ldots, m! + m$ es primo sea quien sea m.

El mismo argumento que hemos utilizado para demostrar la irracionalidad de las series S_b sirve para demostrar la irracionalidad de cualquier serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{b^n}$, donde $A(n) = \operatorname{card}\{a \leq n : a \in A\}$ es la función contadora de una sucesión infinita A de enteros positivos con lagunas arbitrariamente grandes.

Javier Cilleruelo, Universidad Autónoma de Madrid e ICMAT
Correo electrónico: `franciscojavier.cilleruelo@uam.es`
Página web: `https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/`