Educación

Sección a cargo de

María José González López

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas

por

María Cinta Muñoz-Catalán, Luis Carlos Contreras, José Carrillo, Nielka Rojas, Miguel Ángel Montes y Nuria Climent

Desde nuestra perspectiva de considerar la Didáctica de la Matemática como una aplicación de las matemáticas y en la búsqueda de significado de un conocimiento profundo de la matemática elemental, nuestra investigación ha pretendido identificar qué necesita conocer un profesor de matemáticas para llevar a sus alumnos a razonar, argumentar, conjeturar, refutar, representar, modelizar y hacer un uso con significado del conocimiento matemático. En ese sentido, este artículo mostrará cómo damos respuesta a esa inquietud, mostrando los antecedentes y la génesis del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), a la vez que ejemplificamos la esencia analítica del modelo a través del análisis de la resolución de un problema por un alumno de primaria.

Este artículo es una adaptación del trabajo presentado en el Congreso de la RSME de 2015, en Granada, dentro de la Sesión Especial de Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas.

1. Introducción

Hyman Bass concluía, al final de su artículo originalmente publicado en el número 4 del volumen 42 del *Bulletin of the American Mathematical Society* (posteriormente publicado en el número 3 del volumen 10 de La Gaceta de la RSME, de 2007), sintetizando su argumentación sobre la beneficiosa interacción entre matemáticas, matemáticos y educación matemática ([6, p. 705]):

- La profesión matemática tiene una larga y honrosa tradición de implicación en educación matemática.

- Eminentes matemáticos en todo el mundo y a lo largo de la historia han ejemplificado esta tradición.
- Importantes matemáticos contemporáneos están continuando y ampliando esta tradición.
- Este trabajo se puede proseguir productivamente según el espíritu de las «matemáticas aplicadas», comprendiendo primero en profundidad el campo de aplicación.

Esta comprensión profunda a la que se refiere Bass implica abordar los problemas de la educación matemática desde la propia matemática, desde su estructura, su epistemología o su fenomenología, huyendo de visiones simplificadoras de la particularidad que supone poner el foco en este campo concreto de uso del conocimiento matemático, y analizando escrupulosamente los requerimientos del «trabajo matemático de enseñar» ([6, p. 704]).

Nuestro trabajo dentro del área de Didáctica de la Matemática se ha centrado en identificar qué necesita conocer un profesor de matemáticas para afrontar con éxito un proceso de enseñanza que acerque a sus alumnos a la naturaleza del conocimiento matemático, es decir, que les lleve a razonar, argumentar, conjeturar, refutar, representar, modelizar y, en definitiva, a hacer un uso con significado del conocimiento matemático y esto, además, en cada etapa educativa que corresponda. En ese sentido, este artículo mostrará cómo damos respuesta a esa inquietud.

Elaboramos nuestra respuesta con referencia a un conocimiento matemático, pero considerando de una forma muy especial el contexto específico en el que será utilizado, los procesos de su enseñanza y aprendizaje, lo que dota a este conocimiento matemático de un carácter especializado y, por tanto, específico de la labor del profesor de matemáticas.

Podríamos decir que, al igual que dentro de la Matemática hay diversas ramas o especializaciones, particularmente las llamadas matemáticas aplicadas, tanto el conocimiento matemático del profesor, como la tarea que supone su identificación y análisis, pertenecerían a otro tipo de aplicación de la matemática. En este sentido, no buscamos respuestas fuera de la matemática; es decir, no nos interesa, en este trabajo, discutir acerca de la utilidad práctica que indudablemente tienen en la labor del profesor de matemáticas los conocimientos sobre contenidos psicopedagógicos y sociológicos. Desde nuestra perspectiva, el análisis del conocimiento que necesita el profesor supone una profundización en y desde la matemática, por lo que requiere profundizar en los objetos matemáticos implicados, sus raíces epistemológicas, los fenómenos de los que emergen, sus relaciones con otros objetos matemáticos, la estructura que estas relaciones permiten construir, o la forma en que estos entes matemáticos se construyen.

Pero siendo la matemática nuestra fuente esencial, el enfoque que subyace a nuestro modelo se centra en la aplicación específica en sus procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, en cada momento en que interaccionan las matemáticas, los alumnos y el profesor. Ciertamente, otros factores influyen en esta interacción, como la cultura del centro, su entorno social, las normas del aula, etc. Nosotros nos centramos en aquellas componentes que están determinadas por la matemática. Por ello, nos interesan, entre otras cosas, el conocimiento del profesor sobre los temas que ha de enseñar, sobre las relaciones entre objetos matemáticos, o sobre la forma de hacer matemáticas, así como sobre estrategias y recursos para enseñar matemáticas, sobre las dificultades de aprendizaje de los alumnos o sus errores habituales, y sobre lo que puede esperarse que aprendan los alumnos en un nivel determinado.

Nuestra respuesta emerge de nuestra propia investigación con profesores de matemáticas de Educación Primaria y Secundaria ([9], [11], [12], [27]), en la que estamos inmersos desde hace más de veinte años, y en Educación Infantil, en los últimos años, y es deudora de trabajos muy relevantes realizados en las tres últimas décadas, en las que ha existido una preocupación creciente por profundizar en los elementos que han de formar parte del conocimiento de los profesores de matemáticas. Se ha partido del acuerdo indiscutible de que una parte sustancial de ese conocimiento es el relativo a la propia disciplina; no parece razonable que alguien sea capaz de enseñar aquello que no conoce en profundidad ([14]). Sin embargo, no ha quedado tan claramente definido qué significa conocer en profundidad el contenido que se pretende enseñar.

Por otro lado, la investigación ha mostrado que un alto conocimiento del contenido no siempre se corresponde con la adecuada capacidad para enseñarlo ([13], [7], [1]), aunque sí proporciona una mejor disposición para alcanzar esa competencia ([17]). Esto significa que, además de requerimientos de carácter psicopedagógico, cuya utilidad no discutiremos (como ya se ha señalado), estamos ante un conocimiento de naturaleza diferente del contenido a enseñar. Ball, Thames y Phelps ([5]) realizaron una aportación relevante en este sentido, considerando dentro del dominio del conocimiento matemático un subdominio que denominaron *Conocimiento Especializado del Contenido*, diferenciándolo del *Conocimiento Común* que cualquier persona matemáticamente instruida puede poseer. Este reconocimiento de un carácter especializado del conocimiento sobre el contenido matemático para ser enseñado era un hecho admitido en otras «matemáticas aplicadas», sin embargo, supuso una importante novedad en el caso de la Didáctica de la Matemática. Así, por ejemplo, a la hora de obtener el resultado de una resta, cualquier usuario de la matemática, como un ingeniero o un arquitecto, no requiere más que el conocimiento de algún procedimiento que le permita su obtención de forma rápida y eficaz, es el conocimiento común. El profesor de matemáticas ha de considerar otros elementos adicionales. Ha de saber identificar si el cálculo requerido es susceptible de ser obtenido mediante alguna estrategia de cálculo mental (que ha de conocer de forma explícita y fundamentada), en qué momento es preferible echar mano de algún algoritmo para ello, qué alternativas algorítmicas existen para tal fin y qué fundamentos matemáticos las sostienen, qué recursos (como el ábaco) pueden utilizarse de forma que evidencien esos fundamentos o propiedades matemáticas, entre otros aspectos. Todo esto es parte de ese carácter especializado del conocimiento matemático del profesor.

En aras a determinar el carácter especializado del conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, diversos grupos de investigación, como el proyecto *Subject Knowledge in Mathematics*, SKIMA, de la Universidad de Cambridge ([29], [30], [31]), o los responsables del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT, de la Universidad de Michigan ([2], [4], [5]), han analizado la práctica de los profesores para extraer de ella claves de dicho conocimiento. Esos antecedentes han sido relevantes en nuestra investigación, como veremos.

En nuestra trayectoria de investigación *sobre* y, sobre todo, *con* profesores, hemos constatado la necesidad, reconocida por los propios profesores, de profundizar en el conocimiento necesario para enseñar. De aquí que hayamos centrado nuestras investigaciones en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, trabajando con los modelos existentes, lo que nos ha permitido conocer sus limitaciones y potencialidades y, como consecuencia, nos ha llevado a proponer un modelo exclusivamente centrado en lo que es específico del profesor de matemáticas, dejando de lado aspectos del conocimiento que son compartidos con profesores de otras disciplinas.

En la siguiente sección se describen aquellos modelos de conocimiento del profesor que han sido fundamentales para la elaboración de nuestro modelo y se detallan los aspectos que lo han originado. Luego se presenta el modelo desarrollado en el seno del grupo SIDM[1], el MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) y se muestran ejemplos de elementos de los diferentes subdominios del MTSK. Finalmente, se presentan algunas reflexiones.

2. Antecedentes del MTSK

En los últimos cincuenta años ha habido cambios relevantes en lo que se considera que debe constituir el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas en la línea de una integración entre el conocimiento disciplinar y el didáctico, diferenciándose dos dominios: el Conocimiento de las Matemáticas y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático ([10]).

Un momento crucial en este proceso se produce cuando Shulman ([33]) plantea la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando. Con la idea de «paradigma desaparecido», Shulman insta a enfocar el conocimiento necesario para enseñar a través de la lente de la propia disciplina, generando el concepto de «Conocimiento Didáctico del Contenido» (*Pedagogical Content Knowledge*), entendido como un tipo de *conocimiento del contenido que incorpora los aspectos del contenido más relacionados con su enseñanza* ([33, p. 9]). Desde la investigación en educación matemática, el Conocimiento Didáctico del Contenido tiene una gran acogida, aunque presenta dificultades de identificación en la práctica.

Un paso importante para hacer operativa la identificación del Conocimiento Didáctico del Contenido y la del Conocimiento de las Matemáticas se produce con los trabajos del grupo de Deborah L. Ball, que propone un modelo para organizar y operativizar el conocimiento del profesor de Matemáticas ([5]), a través de investigaciones sobre la práctica, que denominan Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Con este término pretenden *representar el conocimiento matemático, las habilidades, los hábitos de la mente, la sensibilidad que se necesitan para*

[1]SIDM es el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, con sede en la Universidad de Huelva (España). En él participan investigadores de universidades de España, Portugal, México, Chile, Perú, Ecuador y Brasil, entre los cuales se encuentran los autores de este trabajo.

el trabajo concreto de enseñar [...] tareas especializadas en las que los profesores necesitan conocer y usar las matemáticas de varios modos ([6, p. 704]). Del trabajo de Shulman asumen dos de los dominios más importantes desde el punto de vista matemático: el Conocimiento de las Matemáticas y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático.

El dominio del Conocimiento de las Matemáticas está compuesto en el modelo MKT por tres subdominios: el Conocimiento Común del Contenido, *el que se supone a cualquier adulto culto* ([6, p. 704]), el Conocimiento Especializado del Contenido, caracterizado, como ya hemos dicho, como conocimiento matemático que sólo tiene sentido para el profesor de matemáticas, y el Conocimiento en el Horizonte Matemático, que permite al profesor interrelacionar los contenidos a lo largo de las diferentes etapas o el currículo, valorar la elegancia de los razonamientos y resoluciones matemáticas de los alumnos, y reconocer la validez de las argumentaciones de los mismos. Conviene destacar dos ideas: primero, que el Conocimiento Especializado del Contenido es un conocimiento *estrictamente matemático [...] que los profesores capacitados necesitan y usan, y, sin embargo, no es del dominio de otros muchos profesionales con formación matemática* ([6, p. 705]); y, segundo, que esta parte *puramente matemática del conocimiento para la enseñanza <u>no</u> es un <u>subconjunto reducido</u> de lo que los matemáticos conocen* ([6, p. 705]) (subrayado del original).

Por su parte, el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático está compuesto en el MKT por otros tres subdominios: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, que nos permite comprender el contenido desde la perspectiva de su aprendizaje (lo que conlleva, por ejemplo, comprender el pensamiento de un estudiante cuando produce una respuesta incorrecta o anticipar sus errores), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, donde el contenido matemático es contemplado desde la perspectiva de su enseñanza (que implica, por ejemplo, argumentar por qué un determinado material, recurso o representación es apropiado para explicar un determinado concepto) y el Conocimiento del Currículo de las Matemáticas Escolares ([5]).

Si el Conocimiento Didáctico del Contenido supuso un avance muy importante en el modelo de Shulman, el Conocimiento en el Horizonte Matemático y el Conocimiento Especializado del Contenido son probablemente las aportaciones más relevantes del modelo de Ball, al contemplar, por una parte, el conocimiento matemático del profesor desde la perspectiva de su diferenciación respecto a otros profesionales, y por otra, una comprensión transversal del contenido matemático, usando el currículo como guía.

3. La génesis del MTSK

Como hemos visto, el modelo MKT aporta varios elementos significativamente originales a la conceptualización del conocimiento del profesor, como son el refinamiento de las ideas de Shulman sobre el conocimiento didáctico del contenido, la idea de especialización del conocimiento del profesor como «exclusividad» del mismo, así como la visión transversal de la matemática escolar.

Sin embargo, reconociendo la innovación que suponen algunas de estas ideas, existen ciertos elementos de este modelo que desde nuestra perspectiva requieren una discusión en profundidad, en pos de su coherencia desde un punto de vista teórico, así como desde la perspectiva de la utilidad del modelo como marco teórico para el análisis del conocimiento del profesor. Encontramos cuatro aspectos clave a discutir:

- El Conocimiento en el Horizonte Matemático y sus múltiples naturalezas: en [3] se establecían tres subdominios dentro del conocimiento en el horizonte matemático, sobre la base de la diferente naturaleza de los elementos que contiene. El primero de estos elementos es el original de la definición, ligado a los temas, que incluye el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la disciplina y las conexiones entre diferentes entes matemáticos, como conceptos y propiedades. El segundo de estos elementos va ligado al conocimiento de tipo sintáctico ([32]), aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones, correspondencias o equivalencias, o elegir representaciones, generalizar o explorar. El tercero considera los valores centrales de la disciplina, como el gusto por la coherencia argumental, o por la precisión y el cuidado en la consistencia del lenguaje matemático. Desde nuestro punto de vista ([24]), los dos primeros elementos tienen capacidad de contener todo el conocimiento matemático desde la perspectiva de *qué* es la matemática (vista como un conjunto de temas incardinados en una estructura), y *cómo* se construye, mientras que el tercer elemento se sitúa en un terreno de naturaleza diferente a los dos anteriores, más ligado al dominio afectivo. Así, estos tres elementos, si bien forman parte de lo que un profesor de matemáticas puede saber, tienen naturalezas muy diferentes y, salvo el primero, tienen una relación escasa con lo reflejado en la definición del subdominio.
- Cómo determinar la especialización del conocimiento del contenido: Ball et al. ([5]) caracterizan el Conocimiento Común del Contenido como el conocimiento matemático que puede poseer una persona instruida. Por tanto, para decidir si un episodio de información aporta evidencias sobre conocimiento común del contenido del profesor o no, es preciso compararlo con un hipotético conocimiento de una hipotética persona sobre la base del compendio de conocimientos deseables que pueden extraerse de múltiples planes de estudio. Esto genera una potencial «distracción» a la hora de realizar estudios que pretendan profundizar en el conocimiento del profesor, ya que nos obliga a establecer un referente de lo que es común o no.
- Solapamiento de subdominios relativos al Conocimiento del Contenido y al Conocimiento Didáctico del Contenido: el profesor necesita conocer la procedencia de los errores y los canales por los que discurre el razonamiento de algunos alumnos cuando abordan una situación matemática; no es de interés de ninguna otra profesión, ni es objeto de estudio de ninguna otra área de conocimiento. Esto forma parte del Conocimiento Especializado del Contenido definido por Ball et al. ([5]), pero hemos de tomar conciencia de que saber

cuáles son las dificultades de los alumnos o dónde suelen cometer errores se asocia al Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, mientras que conocer la procedencia matemática del error se sitúa en el Conocimiento Especializado del Contenido. Esto ha supuesto una fuente de dificultades en la investigación, y muestra problemas de operatividad de las caracterizaciones y límites de los subdominios citados. Además, no parece ventajoso incluir el conocimiento de la procedencia del error en un subdominio y la consciencia de su existencia en otro, entre otras cosas porque queda un poco desdibujada la presencia de la matemática en el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes.

- Falta de matematización del modelo: una de las características principales que nos invitan a desarrollar un nuevo modelo es la falta de especificidad del modelo de Ball et al. ([5]) respecto al conocimiento del profesor de matemáticas. Atribuimos esto al hecho de que su trabajo es la continuación del de Shulman, cuya finalidad era más general, siendo destacable que, salvo quizá el Conocimiento en el Horizonte Matemático, los subdominios definidos en el MKT parecen estar definidos sin referencias explícitas al contenido matemático o a elementos propios de la labor del profesor de matemáticas como especialista en «matemática aplicada», en el sentido de Bass, en cuanto a su «aplicación» a la enseñanza. Así, el modelo se denomina MKT, porque se ha buscado su concreción al caso de matemáticas, si bien podría ser XKT, con X cualquier disciplina objeto de enseñanza y aprendizaje. Entendemos el potencial que tiene un modelo más general, a la vez que criticamos que, en la búsqueda de dicha generalidad, se pierden matices derivados de la propia matemática.

Estos cuatro puntos de discusión nos llevan a proponer el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, de sus siglas anglófonas), en el que recogemos algunas de las ideas fundamentales de los modelos anteriormente comentados, así como elementos de otras propuestas teóricas desarrolladas en los últimos 20 años (e.g., [8], [21], [31], [19]).

Al desarrollar el modelo MTSK, partimos de la base de varias asunciones, que condicionaron el modelo desarrollado. La primera de ellas es sobre la especialización. Entendemos que la especialización del conocimiento de un profesor deriva de su profesión (profesor de matemáticas), en el que la enseñanza de la matemática es un elemento definitorio. La segunda asunción es la especificidad del modelo a la enseñanza de matemáticas, es decir, el modelo está conceptualizado con base en el hecho de que se usará para la comprensión del conocimiento que un profesor de matemáticas use para enseñar matemáticas. Así, si se deseara usarlo para comprender el conocimiento de un profesor que impartiera clase de otra disciplina, sería necesario un análisis profundo de la materia para reconceptualizar MTSK.

En el modelo MTSK (figura 1) se conserva la dicotomía establecida por Shulman ([33]) y refinada por Ball et al. ([5]) entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido, siendo renombrado el primero como conocimiento matemático (MK). Asimismo, se incluye en el modelo el dominio de las creencias y concepciones, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento.

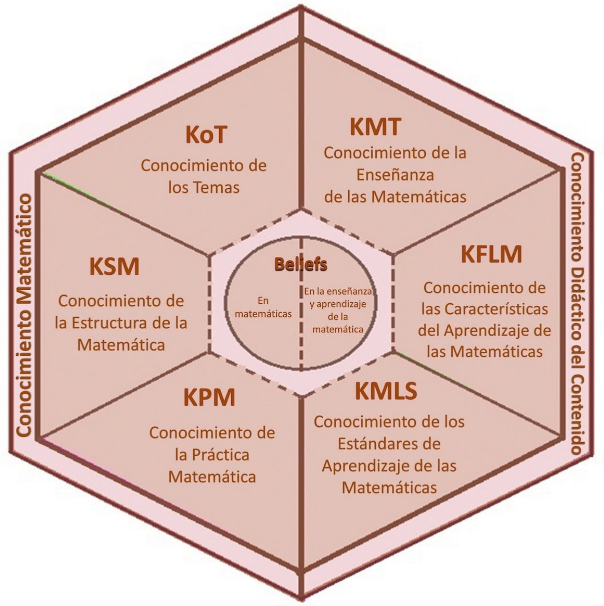

Figura 1: Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

Podemos ver cómo en MTSK se concretan seis subdominios, tres para el dominio del conocimiento matemático: Conocimiento de los Temas, de la Estructura de la Matemática y de la Práctica Matemática; y tres para el conocimiento didáctico del contenido: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Pasaremos ahora a realizar una descripción en profundidad del contenido de cada uno de los subdominios.

Conocimiento de los Temas (KoT): Para nosotros ([10]), este subdominio contempla más que el conocimiento de la matemática como disciplina, incluyendo la matemática escolar así como lo relativo a sus fundamentos matemáticos, los procedimientos, estándares y alternativos ([22]), o las distintas formas de representación de los diferentes temas. Este conocimiento no se limita al contenido que es objeto de enseñanza y aprendizaje, sino que es un conocimiento profundo ([21]) del contenido escolar, ya que entendemos que un profesor puede y debe conocer el contenido más allá de lo que sus alumnos aprenden. Siguiendo con esta mirada puesta en las matemáticas que tienen sentido para el profesor, debemos incluir, basándonos en los trabajos sobre fenomenología de Freudenthal ([16]) y Rico ([28]), aquellos aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos, aportando aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuírsele al contenido, así como una amplia variedad de contextos en los que situarlo.

Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM): Si el subdominio anterior contemplaba un conocimiento profundo de las matemáticas, éste abarca el conocimiento de las matemáticas desde la perspectiva de su integración y relación en estructuras amplias y con mayor capacidad de relación con otros conceptos que lo «local» de un concepto determinado. Este subdominio integra tanto aquellas relaciones con conceptos más avanzados, como más elementales, que permiten al profesor trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa, en la línea de lo planteado por Jeremy Kilpatrick en el ICME 11, permitiendo al profesor comprender las matemáticas escolares desde un punto de vista superior, no sólo en cantidad de contenido, sino en percepción de la organización del mismo. Asimismo, las grandes ideas ([20]) constituyen un elemento estructurador de la matemática, generando conexiones de tipo transversal ([15]). Un ejemplo de este tipo de conexión sería la consciencia de cómo el infinito está presente en diferentes elementos a lo largo de toda la secundaria (números periódicos, límites, continuidad, densidad de los reales, etc.), y cómo éste constituye una conexión epistemológica entre los diversos conceptos ([23]).

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): este subdominio abarca aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que sin duda un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, los criterios para establecer una generalización válida, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática ([10]). Asimismo, tiene en este subdominio un papel relevante el conocimiento de distintos heurísticos en resolución de problemas, que abarcan la estructura lógica en la que se desarrolla la resolución.

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): en este subdominio encontramos el conocimiento que tiene el profesor de las vías, recursos y formas de enseñar matemáticas. Así, encontramos el conocimiento que posee de diferentes estrategias y teorías, institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas. De igual modo, es especialmente relevante aquí el conocimiento de diferentes recursos para la enseñanza de las matemáticas, como pueden ser el ábaco, las regletas de Cuisenaire, o Geogebra, en relación con su potencial y limitaciones para la enseñanza de contenidos específicos. Así, no nos referimos a un conocimiento superficial del recurso, sino a un conocimiento profundamente imbricado con la naturaleza de los conceptos matemáticos en sí. Por ejemplo, encontramos en este subdominio el conocimiento que un profesor pudiera tener de cómo el cortado de papel permite trabajar la suma de las infinitas potencias de $\frac{1}{2}$, dado que el papel, como recurso, acepta la potencial infinitud de los posibles cortes, pese a que a partir de cierto momento exista una imposibilidad física de realizar dichos cortes, además de permitir mostrar dos perspectivas de comprensión del proceso infinito ([25]).

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): este subdominio refleja el conocimiento que el profesor posee y ha desarrollado acerca de cómo se aprenden y piensan los contenidos matemáticos, así como de las formas que tienen los alumnos de interactuar con cada contenido. En este subdominio incluimos de nuevo consideraciones íntimamente relacionadas con las matemáticas, y en particular con cada contenido concreto. Podemos encontrar aquí el conocimiento de diferentes teorías, personales o institucionales, de aprendizaje de las matemáticas (e.g., el modelo de aprendizaje de Van Hiele sobre contenidos geométricos), el conocimiento de las fortalezas, dificultades, obstáculos, o errores, asociados a cada contenido, así como el lenguaje o vocabulario habitualmente usado por los estudiantes en cada contenido. También podemos encontrar aquí el conocimiento del profesor de las habituales ideas intuitivas desarrolladas por los alumnos al tratar con ciertos conceptos, así como el conocimiento de aspectos propios ligados a las actitudes hacia la matemática.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KSML): en este subdominio intentamos desarrollar una visión más amplia respecto de la noción de Conocimiento Curricular desarrollada en anteriores modelos. Su contenido abarca, por supuesto, los diferentes grados de profundidad en que un profesor pudiera conocer el currículo oficial, respecto de las matemáticas, vigente en el país en que imparte su docencia, y su concreción, en caso de existir, en un territorio concreto del mismo. Sin embargo, reflexionando sobre la naturaleza del currículo, comprendimos que su uso por parte de los profesores es como «referente estandarizado» de los contenidos y capacidades que debe aprenderse y desarrollarse en un curso o etapa, con indicaciones de la forma en que deben impartirse y aprenderse los contenidos. Este tipo de referentes existen fuera del currículo, pudiendo un profesor conocer lo que ciertas asociaciones profesionales como la NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) proponen en ese sentido, o también la opinión de profesores expertos, con gran experiencia y conocimiento de la práctica docente sobre qué, cómo y cuándo explicar los contenidos matemáticos.

4. Ejemplificando MTSK

En lo que sigue, mostraremos un problema puesto en clase por un profesor de 6.º de Primaria y cómo lo ha resuelto uno de sus estudiantes. A continuación, detallaremos un posible análisis de la resolución del mismo y utilizaremos el modelo MTSK para poner de relieve el conocimiento especializado que un profesor necesitaría para proporcionar una interpretación en esta línea.

El problema en cuestión y la resolución del alumno aparecen en la figura 2.

4.1. Análisis de la resolución

El alumno usa una representación continua para representar el tablón de madera. Pareciera una representación lineal (en la representación inicial de $\frac{7}{4}$), si bien es usada como área (en la posterior representación de $\frac{14}{8}$). El alumno realiza una representación gráfica correcta de la fracción impropia, identificando la unidad ($\frac{7}{4}$ de metros como 1 metro y $\frac{3}{4}$ de otro metro, o $\frac{4}{4}$ y $\frac{3}{4}$), aunque desprecia la idea de la unicidad del tablón. Considera la fracción equivalente a $\frac{7}{4}$ con denominador 8, y

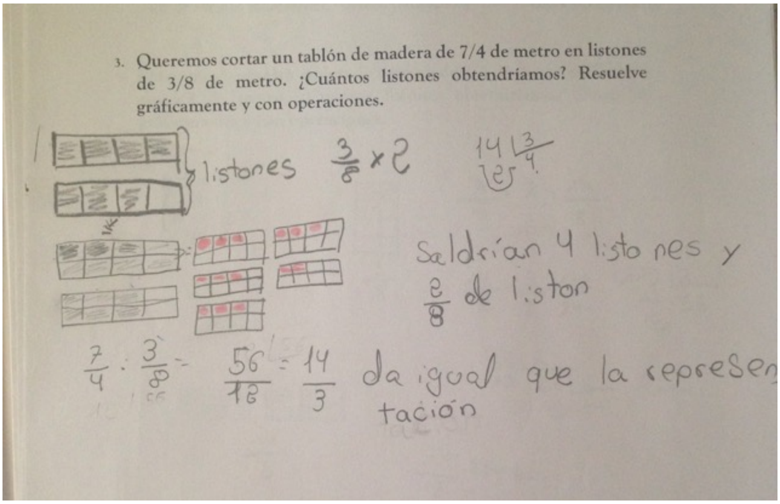

Figura 2: Protocolo de resolución de un alumno de primaria respecto de un problema sobre división de fracciones.

representa $\frac{14}{8}$ en los dos tablones de metro que usó antes para $\frac{7}{4}$, convirtiendo los cuartos en octavos. Sobre esta representación (extracto en figura 3) va señalando trozos de $\frac{3}{4}$; dibuja aparte cada trozo que obtiene ($\frac{3}{8}$ de metro), de modo que le salen 4 trozos de $\frac{3}{8}$ de metro y le sobran 2 partes (de octavos de metro, esto es $\frac{2}{8}$ de metro de tablón).

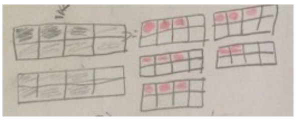

Figura 3: Primer fragmento del protocolo del alumno.

El alumno concluye (extracto en figura 4) que le salen 4 listones (número de veces que $\frac{3}{8}$ está contenido en $\frac{7}{4}$) y le sobran $\frac{2}{8}$ de listón (aunque no usa el término «sobran» sino «salen»). El listón es de $\frac{3}{8}$ de metro, con lo que estaría diciendo que le sobran $\frac{2}{8}$ de $\frac{3}{8}$ de metro, esto es, $\frac{6}{64}$ de metro. Lo que parece querer decir es que le sobran $\frac{2}{8}$ de tablón, esto es, de metro (por los dibujos). Parece haber confundido listón con tablón y estar perdiendo la referencia de la unidad en cada caso.

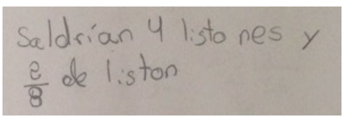

Figura 4: Segundo fragmento del protocolo del alumno.

El enunciado del problema puede ser confuso para el alumno al usar los términos tablón y listón; el alumno usa desde el principio «listón» para referirse a los trozos de metro y de $\frac{3}{8}$ de metro. La representación de fracción usada por el alumno no se ajusta a la situación y contribuye a esta confusión de la unidad de referencia en las fracciones. Si hablamos de un tablón de $\frac{7}{4}$ de metro que va a dividirse en listones, y no hay ninguna referencia al ancho del tablón ni de los listones, cabe entenderlos como un segmento de $\frac{7}{4}$ de metros, que se va a cortar en trozos de $\frac{3}{8}$ de metro. En ese sentido, la representación continua lineal representa mejor la situación y mantiene la idea de la unidad de referencia: el metro.

El alumno resuelve el problema también numéricamente y compara sus resultados con el obtenido con la resolución gráfica. Usa el algoritmo de productos cruzados para la división de fracciones e identifica el problema con una situación de división de fracciones, con lo que calcula que $\frac{7}{4} : \frac{3}{8} = \frac{56}{12}$, expresión que simplifica hasta obtener $\frac{14}{3}$. A partir de aquí es donde podría haber hecho la división de 14 entre 3 (aunque espacialmente se sitúe antes en su resolución escrita). Al hacer esa división obtiene 4 como cociente y 2 como resto, lo que identifica con la solución obtenida gráficamente (se pueden sacar 4 listones y sobran 2 trozos de $\frac{1}{8}$ de metro). Si observamos el resultado numérico de la división de fracciones por el algoritmo $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$, cabe plantearse por qué salen $\frac{2}{3}$ de resto si lo que sobran son $\frac{2}{8}$ de metro. Son $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{8}$ de metro (el divisor de $\frac{7}{4} : \frac{3}{8}$ es $\frac{3}{8}$), lo que equivale a $\frac{2}{8}$ de metro. El trozo restante de tablón se puede expresar como fracción de la unidad, que es 1 metro (sobran $\frac{2}{8}$ de metro) o como fracción del listón (sobran $\frac{2}{3}$ de listón de $\frac{3}{8}$ de metro).

4.2. Conocimiento especializado que sustenta el análisis

El primer elemento de conocimiento que se desprende directamente del enunciado del problema es que es necesario conocer y saber representar en sus distintas formas (modelos continuos o discretos) las fracciones impropias, así como el concepto de división cuotitiva (KoT) y su potencialidad para problematizar la división de fracciones (KMT).

Asimismo, es necesario conocer la equivalencia de fracciones y el procedimiento para su obtención, así como la representación de estas nuevas fracciones que emergen (KoT).

El profesor, además, necesita conocer las dificultades que suelen tener los alumnos para identificar la unidad, de modo que pueda interpretar la expresión del alumno relativa a que sobran $\frac{2}{8}$ de listón (KFLM-KoT). Es preciso ser consciente de que un enunciado que no contuviera la duplicidad tablón-listón quizás habría suavizado este problema. En este mismo sentido, ante la representación realizada por el alumno, que es rectangular de área, el profesor tendría que considerar la representación continua de línea como una mejor opción (KFLM-KMT).

Es preciso diferenciar entre la representación del resultado y del proceso, de forma que la resolución gráfica sea la que lleve al resultado y no que sólo se represente el resultado (KoT), para poder apreciar que el alumno resuelve el problema gráficamente (KFLM), puesto que su resolución numérica es, de hecho, una comprobación de la solución obtenida por el método gráfico.

Por otro lado, se requiere de un conocimiento de los distintos algoritmos para dividir fracciones. Además, en el caso del algoritmo convencional de los productos cruzados, saber que una posible justificación procede de considerar la división como inversa de la multiplicación. Este conocimiento de la fundamentación del contenido supone vislumbrarlo desde una perspectiva más avanzada (de lo que el nivel educativo de primaria exige) ligada a la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$, lo que podemos situar en KSM. Identificar el paso de $\frac{56}{12}$ a $\frac{14}{3}$ implica saber simplificar fracciones (KoT), así como la interpretación del cociente y del resto de la misma, permitiendo comprender la división (14 entre 3) que hace el alumno (KoT).

A la hora de proponer este problema y de sus posibles variantes, de analizar su dificultad o de proponer una secuencia de problemas sobre división de fracciones (para ayudar al alumno a llegar inductivamente a este conocimiento), se podría considerar que este problema tiene menor dificultad que otro similar en el que los denominadores de las fracciones no sean uno múltiplo del otro, aunque teniendo en cuenta el tamaño de los números implicados para que no supongan un obstáculo para la representación (KMT). Además, es difícil resolver gráficamente la división en caso contrario (KFLM). También sería útil conocer cómo se resolvería gráficamente el problema anterior si las medidas fueran: a) tablón de $\frac{7}{8}$ y listones de $\frac{3}{4}$ (denominador uno múltiplo de otro), b) tablón de $\frac{7}{4}$ de madera y listones de $\frac{2}{3}$ (denominadores primos entre sí), y c) tablón de $\frac{7}{4}$ y listones de $\frac{3}{10}$ (denominadores con divisores comunes y no comunes); los dos últimos casos son similares en cuanto a su resolución gráfica (los denominadores no son múltiplos uno de otro) (KoT). La propuesta de dicha secuencia podría considerar la tendencia a representar como iguales las partes de las unidades y las restricciones conceptuales que ello comporta para la noción de fracción como parte/todo (KFLM). O también el conocimiento de las diferentes posibilidades de orden en el que los distintos significados de fracción deben introducirse en el proceso de aprendizaje del alumno, con la consiguiente toma de conciencia de sus ventajas e inconvenientes (KMLS-KMT).

Utilizar este problema también supone conocer qué conocimientos matemáticos necesarios precisa el alumno para poder afrontarlo con éxito (concepto de división, de número mixto, de fracción, de unidad, por ejemplo, aprendidos en este curso o en cursos anteriores) (KMLS). Visualizar la división de fracciones desde una perspectiva avanzada, en el sentido de Klein ([18]), también implica conocer el papel de este contenido en la construcción de contenidos matemáticos posteriores como las escalas, la estructura de cuerpo de $\mathbb{Q}$ o su densidad (KSM) ([26]).

5. Reflexiones finales

Finalizamos aportando una serie de reflexiones sobre el modelo MTSK y su utilidad.

En primer lugar, debemos destacar que el MTSK es un modelo teórico que persigue propósitos analíticos. Desde esta perspectiva, no pretende reflejar cómo se organiza el conocimiento del profesor de matemáticas, sino que proporciona una herramienta útil para investigar sobre él. El modelo, como cualquier herramienta analítica, nos permite diseccionar el conocimiento del profesor con el fin de comprenderlo, pero no olvida el carácter sintético e integrado del mismo. De hecho, el conjunto de investigaciones en curso tratan de poner de relieve, entre otras cuestiones, las relaciones que existen entre los diferentes subdominios, que refuerzan la idea de la complejidad del conocimiento del profesor y muestran la necesidad de contemplar el modelo de conocimiento, no como una colección de compartimentos estancos, sino como un conjunto de elementos de conocimiento interrelacionados, y condicionados unos por otros, que son lo que denominamos «conocimiento especializado del profesor de matemáticas», cuyas componentes, como ya se ha señalado, tienen su fundamento en las matemáticas, su estructura, la forma en que se construyen y su visión como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Así, y continuando con la ejemplificación que hemos presentado, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la importancia de la definición de la unidad en el concepto de fracción, la división como medida (como elemento fenomenológico y como sustento de la división cuotitiva), el concepto de fracción impropia, junto con las diferentes fenomenologías (que proporcionan los diferentes sentidos) y representaciones, la equivalencia de fracciones y sus relaciones con la divisibilidad (y la relevancia de las clases de equivalencia como paso al concepto de número racional), las operaciones con fracciones (en nuestro ejemplo, básicamente la división), sus algoritmos (convencionales y alternativos) con sus correspondientes fundamentaciones matemáticas, el significado del cociente y el resto de una división de fracciones (cuando el cociente no es entero) y la resolución gráfica de estas operaciones, son entre otros, conocimientos de naturaleza matemática (dominio MK) necesarios. Unido a esto, como hemos puesto de relieve en el ejemplo, el profesor de matemáticas también necesita conocer el potencial de los modelos discretos y continuos para problematizar la división cuotitiva de fracciones, los recursos (manipulativos o digitales) que pueden contribuir a una mejor comprensión del concepto y sus distintos significados, ser consciente de que variables como el tamaño de los números o los diferentes términos del contexto del enunciado pueden facilitar u obstaculizar la comprensión y la resolución (gráfica) de un problema, saber sopesar las ventajas e inconvenientes sobre cada uno de los significados de fracción y sus representaciones, conocer las dificultades de los alumnos para identificar la unidad y sobre qué unidad u objeto deben aplicar las fracciones, la dificultad de los alumnos ante las fracciones impropias y números mixtos frente a las fracciones propias, las inherentes a la simplificación de fracciones, que en la representación gráfica los estudiantes tienden a representar el resultado en vez del proceso (unido a ello, la relevancia del proceso ante el resultado en los protocolos de resolución de problemas), tomar conciencia de la debilidad del lenguaje matemático de los estudiantes y la necesidad de abordar su mejora con la conjunción de lenguajes simbólicos y gráficos en el aula. Asimismo, el profesor debe tomar en consideración las orientaciones curriculares que al respecto aportan asociaciones profesionales como el NCTM, así como las que emanan del Estado o Comunidad Autónoma. Todo esto forma parte del dominio del Conocimiento Didáctico de las Matemáticas.

Otro aspecto que emerge del modelo MTSK es que al permitirnos una mejor comprensión de qué conoce el profesor de matemáticas, cómo conoce, qué le posibilita dicho conocimiento y qué necesita, nos proporciona un sustento sobre el que diseñar propuestas de formación, tanto inicial como continua, consistentes con dichas necesidades. Las investigaciones en curso están poniendo de relieve que cada etapa educativa, incluyendo Educación Infantil, requiere de un conocimiento matemático especializado para la enseñanza sólido, muy específico, y fuertemente enraizado en la propia disciplina.

Esta solidez en conocimientos matemáticos que parece demandar la actuación docente contrasta con el escaso nivel de conocimiento con el que acceden los estudiantes a los Grados de Maestro y con el escaso valor que la sociedad concede a estos profesionales y a su formación para la enseñanza de la matemática. Si asumimos la importancia que debe concederse a la Educación Primaria y a la Educación Infantil, la formación de maestros, al menos en lo concerniente a la Educación Matemática, requiere una profunda reflexión.

Referencias

[1] M. Askew, M. Brown, V. Rhodes, D. Johnson y D. William, *Effective Teachers of Numeracy*, King's College, London, 1997.

[2] D.L. Ball, Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation, *Advances in research on teaching* (J. Brophy, ed.), 1–48, JAI Press, Greenwich, 1991.

[3] D.L. Ball y H. Bass, With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures, comunicación presentada en el *43. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Oldenburg (Alemania), 2009.

[4] D.L. Ball, H.C. Hill y H. Bass, Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?, *American Educator* **29** (1) (2005), 14–46.

[5] D.L. Ball, M.H. Thames y G. Phelps, Content knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of Teacher Education* **59** (5) (2008), 389–407.

[6] H. Bass, Matemáticas, matemáticos y educación matemática, *La Gaceta de la RSME* **10** (3) (2007), 689-706.

[7] E.G. Begle, *Critical Variables in Mathematics Education. Finding of a Survey of the Empirical Literature*, NCTM, Washington, DC, 1979.

[8] R. Bromme, Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer y B. Winkelman, eds.), 73–88, Kluwer, Dordrecht, 1994.

[9] J. Carrillo y L.C. Contreras, The relationship between the teachers' conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis, *Proceedings of the 18th PME Conference* (J.P. da Ponte y J.F. Matos, eds.), 152–159, PME, Lisboa, 1994.

[10] J. Carrillo, L.C. Contreras y P. Flores, Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, *Investigación en Didáctica de la Matemática* (L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia, eds.), 193–200, Comares, Granada, 2013.

[11] N. Climent y J. Carrillo, El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras, *Enseñanza de las Ciencias* **21** (3) (2003), 387–404.

[12] N. Climent y J. Carrillo, El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos, *Investigación en la Escuela* **61** (2007), 23–36.

[13] T.A. Eisenberg, Begle revisited: teacher knowledge and student achievement in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education* **8** (1977), 216–222.

[14] E. Fennema, T.P. Carpenter y P.L. Peterson, Teachers' decision making and cognitively guided instruction: a new paradigm for curriculum development, *Facilitating Change in Mathematics Education* (K. Clements y N.F. Ellerton, eds.), 174–187, Deakin University Press, Geelong, Victoria, 1989.

[15] E. Flores-Medrano, D. Escudero-Ávila, M.A. Montes y J. Carrillo, ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las Matemáticas con su entendimiento sobre los Espacios de Trabajo Matemático?, *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium* (I.M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard, eds.), 473–484, Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2015.

[16] H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[17] H.C. Hill, B. Rowan y D.L. Ball, Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement, *American Educational Research Journal* **42** (2) (2005), 371–406.

[18] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, B.G. Teubner, Leipzig, 1908.

[19] J. Kilpatrick, G. Blume y B. Allen, *Theoretical framework for secondary mathematical knowledge for teaching*, University of Georgia and Pennsylvania State University, 2006; manuscrito no publicado.

[20] S. Kuntze, B. Murphy, S. Lerman, E. Kurz-Milcke, S-H. Siller y P. Winbourne, Development of pre-service teachers' knowledge related to big ideas in mathematics, *Proceedings of the 35th PME* (B. Ubuz, ed.), vol. 3, 105–112, Middle East Technical University, Ankara (Turquía), 2011.

[21] L. Ma, *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ, 1999.

[22] M. Mellone, A. Jakobsen y C.M. Ribeiro, Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning, *Actas del CERME 9*, ERME, Praga, 2015; por aparecer.

[23] M. Montes, *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Huelva, 2015.

[24] M. Montes, A. Aguilar, J. Carrillo y M.C. Muñoz-Catalán, MSTK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures, *Actas del CERME 8* (B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti, eds.), 2055–3064, ERME, Antalya (Turquía), 2013.

[25] M. Montes y J. Carrillo, What does knowing infinity mean as a teacher? The case of the convergence of series, *Actas del CERME 9*, ERME, Praga, 2015; por aparecer.

[26] M. Montes, L.C. Contreras y J. Carrillo, Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y MTSK, *Investigación en Educación Matemática XVII* (A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent, eds.), 403–410, Servicio Editorial de la UPV/EHU, Bilbao, 2013.

[27] M.C. Muñoz-Catalán, J. Carrillo y N. Climent, Mathematics teacher change in a collaborative environment: to what extent and how, *Journal of Mathematics Teacher Education* **13** (5) (2010), 425–439.

[28] L. Rico, *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*, Síntesis, Madrid, 1997.

[29] T. Rowland, The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching, *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (A. Gagatsis, ed.), 69–81, Cyprus Mathematical Society, Nicosia, 2005.

[30] T. Rowland, Developing knowledge for teaching: A theoretical loop, *Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education* (S. Close, D. Corcoran y T. Dooley, eds.), 14–27, St. Patrick's College, Dublín, 2007.

[31] T. Rowland, P. Huckstep y A. Thwaites, Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi, *Journal of Mathematics Teacher Education* **8** (3) (2005), 255–281.

[32] J.J. Schwab, Education and the structure of the disciplines, *Science, curriculum and liberal education* (I. Westbury y N.J. Wilkof, eds.), 229–272, University of Chicago Press, Chicago, 1978.

[33] L.S. Shulman, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15** (2) (1986), 4–14.

María Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla, España
Correo electrónico: `mcmunozcatalan@us.es`

Luis Carlos Contreras, José Carrillo, Miguel Ángel Montes y Nuria Climent, Universidad de Huelva, España
Correo electrónico: `lcarlos@uhu.es`, `carrillo@uhu.es`, `miguel.montes@ddcc.uhu.es`, `climent@uhu.es`

Nielka Rojas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile
Correo electrónico: `nielka001@gmail.com`